Examen Cálculo diferencial 2º BACH. 2 diciembre 2014

Nombre...

1. a) Define función continua en un punto. Una función y=f(x) es continua en un punto x=a de su dominio si $\lim_{x\to a} f(x)$=f(a)

b)¿ Qué tipo de discontinuidad posee la función y=$\frac{L(1+x^2)}{x}$ en x=0?
Dado que 1+x^2 es mayor que cero para todos los valores de x, el dominio de esa función es R-{0}. $\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x^2)}{x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=0$. Por lo tanto en x=0 existe límite pero no imgen por lo que tiene una discontinuidad evitable

c)¿Para qué valores de k la función y= $\frac{e^x}{x^2+k}$es continua? Para que la función sea continua no puede anularse el denominador, esto significa que la ecuación x^2+k=0 no puede tener solución. Si resolvemos x^2+k=0⇒ $x=\sqrt{-k}$ para que esa raíz no exista no exista k tiene que ser positivo. Es decir, la función es continua $\forall K\in(0,\infty)$

d) ¿ Que tipo de discontinuidad posee la función anterior en los restantes valores de k?
Si k>0 las raíces de x^2+k=0 son $\pm\sqrt{-k}$; $\lim_{x\to\pm\sqrt{-k}}\frac{e^x}{x^2+k}=\frac{e^{\pm\sqrt{-k}}}{0}=\infty$ Es decir la función posee una discontinuidad de tipo asintótico en x=$\sqrt{-k}$ y en x=$-\sqrt{-k}$

e) Define función derivable en un punto. Dada una función y=f(x), se dice que es derivable en un punto x=a de su dominio si existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ al que llamamos derivada de f en x=a

Calcula, si existen, los valores de a y b para que sea derivable la función

f(x)=$\begin{cases}\frac{1-x}{e^x} & \text{si } x<0\\ x^2+ax+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ La función es continua y derivable en $(-\infty,0)$ por ser y=$\frac{1-x}{e^x}$ una función elemental con dominio R; la función también es continua y derivable en (0,∞) por ser y=x^2+ax+b una función polinómica para cualquier valor de a y b. El único punto problemático es, por lo tanto, x=0

Continuidad en x=0: $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{e^x}=1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2+ax+b=b\\ f(0)=b\end{array}\right. \Rightarrow b=1$

Derivabilidad en x=0: Estudiamos la función derivada antes y después de x=0

F '(x)=$\begin{cases}\frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}} & \text{si } x<0\\ 2x+a & \text{si } x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0)=\frac{-e^0-(1-0)e^0}{e^0}=-2\\ f'_+(0)=2.0+a=a\end{cases} \Rightarrow a=-2$

2. a) Demuestra que la función y = L(senx+1)+cosx toma el valor 0'5 en el intervalo [0,π]. Enuncia el teorema en el qué te basas.

Nos basaremos en el teorema del valor intermedio para funciones continuas o teorema de Darboux que dice: Sea f una función continua en un intervalo [a,b], sea y∈ R t.q f(a)<y<f(b)⇒ $\exists c\in(a,b)$ t.q. F(c)=y. Es decir, la función toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b) al menos 1 vez en el intervalo (a,b).

f(0)=L(sen(0)+1)+cos(0)=1; f(π)=L(sen(π)+1)+cosπ=-1; f es continua en el intervalo [0,π] por ser senx+1 positivo en dicho intervalo. En consecuencia, toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre las imágenes de sus extremos, es decir todos los valores comprendidos entre -1 y 1, en particular tomará el valor 0’5 como nos piden que demostremos.

Este ejercicio podría haberse resuelto también por el teorema de Bolzano: Queremos probar que L(senx+1)+cosx=0’5 tiene solución en $[0,\pi]$, o, lo que es lo mismo, que L(senx+1)+cosx-0’5=0 en dicho intervalo. Tomamos la función y=L(senx+1)+cosx-0’5, continua en $[0,\pi]$, por lo explicado anteriormente; f(0)=L1+cos(0)-0’5=0’5>0; f(π)=L1+cos(π)-0’5=-1’5<0. Por lo tanto f se anula al menos una vez en ese imtervalo.

B) Define: función creciente en un intervalo (a,b): f es creciente en (a,b) si $\forall x,y \in (a,b)$, x<y$\Rightarrow f(x) < f(y)$

Máximo absoluto: Sea f una función y x=a un punto de su dominio. X=a será un máximo absoluto de la función si $\forall x \in D$ se verifica que f(x)≤f(a)

Máximo relativo de una función: Una función y=f(x) posee en un punto x=a, de su dominio, un máximo relativo si existe un entorno de dicho punto (a-h,a+h) tq $\forall x \in (a-h, a+h)$, x≠ a, se verifica que f(x)<f(a)

3. a) Determinar los valores de a,b,c,d para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo relativo en el punto (0,4) y un punto de inflexión en el punto (2,0). Para esos valores de a,b,c,d , halla la recta tangente en el punto de inflexión

Si $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $g'(x)=3ax^2+2bx+c$; $g''(x)=6ax+b$

Que el punto (0,4) sea un mínimo significa que g(0)=4 y g ‘(0)=0; que (2,0) sea un punto de inflexión significa que g(2)=0 y g ‘’(2)=0. Escribimos estas cuatro condiciones:

g(0)=d=4

g ‘(0)=c=0

g(2)=8a+4b+2c+d=0

g’’(2)=12a+2b=0. Resolviendo el sistema formado por las cuatro ecuaciones se obtiene: d=4, c=0, a=1/4, b=-3/2

Nos piden ahora que calclemos la recta tangente en su punto de inflexión, es decir en (2,0).
m=g’(2)=3.1/4.4+2(-3/2).2=-3; Recta tg $m(x-x_0)=y-y_0$. En nuestro caso: -3(x-2)=y

b) Calcula las asintotas oblicuas de la función y=$\sqrt{x^2-4x+5}$; **(resuelto en la pág 90 de los ejercicios de clase)**

c)Estudia el Dominio, Intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas verticales de

y=$xe^{-\frac{1}{x}}$·**(en la pág 84 de los ejercicios de clase está resuelto** y=$xe^{\frac{1}{x}}$·)

D=R-{0}; y’=$e^{-1/x}$ $(1+\frac{1}{x}) = e^{1/x}(\frac{x+1}{x})$; $\begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases}$ y dando valores en los intervalos correspondiente obtenemos: Creciente $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$ decreciente (-1,0). Máximo en x=-1

AVlim $\lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0$; $\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = 0.e^{\infty} = 0.\infty$ indeterminado

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1/x^2.e^{-1/x}}{-1/x^2} =$$

$$=\lim_{x\to 0^-} -e^{-1/x} = -\infty \Rightarrow$$ x=0 AV izd.

4. Dibuja la gráfica de la función y=$\frac{x^2}{x-2}$ Estudiando previamente: dominio, puntos de corte con los ejes, Intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas.

D=R-{2}; Cortes con los ejes: (0,0)

y'=$\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$Y'=. El denominador de esa fracción es positivo por lo que el signo depende solo del numerador. x^2-4x=0⇒ $\begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$ Dando valores en los subintervalos en los que esas raíces dividen a la recta real resulta que f '>0 y por tanto f es creciente en $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$; f '<0 y por tanto f es decreciente en $(0,2)\cup(2,4)$

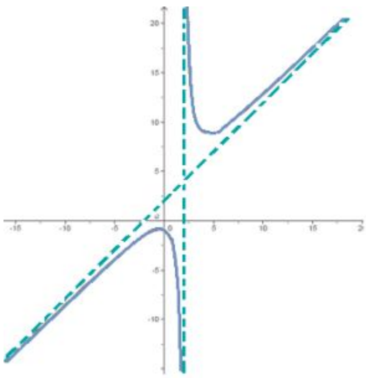
Y''=$\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x).2.(x-2)}{(x-2)^4} \underset{(1)}{=} \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x).2}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^2}$ El numerador de esa fracción es positivo por lo que el signo depende solo del denominador. x-2=0⇒X-2=0x=2, dando valores se obtiene que en (–∞, 2) f ''<0 por lo que f es cóncava y en (2,∞) f ''>0 por lo que f es convexa. La función no tiene puntos de inflexión al no pertenecer x=2 al dominio.

(1) simplificando

AV: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0} = \infty$ ⇒x=2 es A.V.

AH: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2} = \infty$ No tiene AH

AO: m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x} = 1$; n=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2} - x$ =$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x-2}$ =$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2} = 2$ y=x+2 AO



5. a)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}$ =1^∞**.** Llamamos A=$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx} \Rightarrow LA = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx.L(1-\cos x) \underset{(1)}{=}$

=$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L(1-\cos x)}{1/tgx} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L(1-\cos x)}{ctgx} \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{senx}{1-\cos x}}{-\cos ec^2 x} = \frac{1}{-1} = -1$; LA=-1⇒A=$e^{-1}$ =1/e

(1) el límite es del tipo 0.∞, lo convertimos en 0/0

(2)El límite es del tipo 0/0, aplicamos L'Hôpital

b**)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^2)} \underset{(1)}{=} \lim\limits_{z\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2senx}{2x.\cos(x^2)} \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{2.\cos(x^2)+2x.2x.(-sen(x^2))} = \frac{4}{2} = 2$

(1 y 2) Límites del tipo 0/0 aplicamos L'Hôpital