Examen Cálculo diferencial. SOLUCIONES

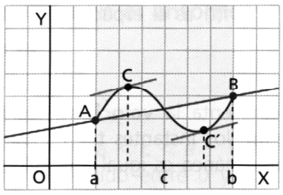
1.-a)Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Enunciado e interpretación geométrica.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), se verifica que existe un punto c$\in$(a,b) tal que : f ' (c)=$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica

el teorema del valor medio garantiza que si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en el abierto (a,b) existe al menos un punto, de dicho intervalo abierto, cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))



b)Determinar las parámetros a y b para que la función y=$\begin{cases} e^{bx}+2 \ si \ x<0 \\ a+L(x+1) \ si \ x\geq 0 \end{cases}$

verifique las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-1,1]

Para que la función verifique las hipótesis del teorema es preciso comprobar que es continua en [-1,1] y derivable en (-1,1).

La función y=e^{bx}+2 es continua y derivable en R, por tanto lo es en [-1,0).

La función y=a+L(x+1) es continua y derivable en su dominio, es decir en (-1,∞), por lo tanto lo es en el intervalo (0,1].

Así pues es necesario únicamente comprobar la continuidad y derivabilidad en x=0

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} e^{bx}+2=e^0+2=3$; $\lim_{x\to 0^+} a+L(x+1)=a \Rightarrow$ a=3 para que f sea continua en x=0

Derivabilidad en x=0: $y'=\begin{cases} b.e^{bx} \text{ si x<0} \\ \dfrac{1}{x+1} \text{si x>0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0)=b.e^0=b \\ f_+'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow b=1$ para que f sea derivable en x=0.

En consecuencia. Para a=3 y b=1 la funcióne cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-1,1].

2. Determina las tangentes a la curva y=$\dfrac{2x}{x-1}$ **paralelas a la recta 2x+y=0**

Para que dos rectas sean paralelas deben tener la misma pendiente. Dado que la pendiente de la recta tangente en un punto coincide con la derivada en dicho punto y la pendiente de la recta 2x+y=0, o lo que es lo mismo y=-2x, es m=-2, hemos de calcular los puntos de la curva cuya derivada vale -2.

$$y'=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}?=\frac{-2}{x^2-2x+1}=-2\Rightarrow -2=-2x^2+4x-2\Rightarrow -2x^2+4x=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Calculamos ahora la recta tangente en esos puntos.

x=0, y=f(0)=0; m=-2 ⇒**-2x=y será la recta tangente en x=0**

x=2, y=f(2)=4; m=-2 ⇒-2(x-2)=y-4; -2x+4=y-4; **y=-2x+8 será la recta tangente en x=2**

3. Estudia, utilizando la definición de derivada, la derivabilidad de la función:

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

La función $y=\frac{x}{2x-1}$ es continua y derivable en su dominio, es decir en R-{1/2}. La función $y=x^2+x$ es continua y derivable en R. Por tanto sabemos que f es continua y derivable en R-{0}, debiendo estudiar únicamente la derivabilidade en x=0, punto en el que se produce el cambio de función.

Derivabilidad en x=0

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{h}{2h-1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{2h^2-h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h(2h-1)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{2h-1}=-1$$

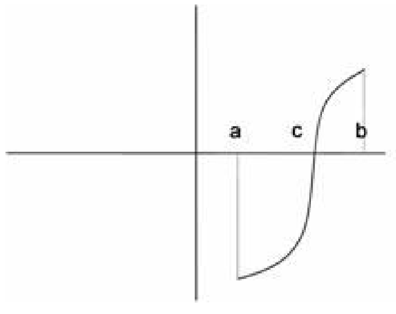
$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h+1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h+1)=1$$

Dado que las derivadas laterales no coinciden la función no es derivable en x=0

4. Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que que las funciones f(x)=2-x y g(x)=Lx se cortan al menos en un punto.

Teorema de Bolzano:

Sea f continua en [a,b], si f(a).f(b)<0 $\Rightarrow \exists$ c$\in (a,b)$ tq f(c)=0



Interpretación geométrica:

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y f(a) y f(b) tienen distinto signo, entonces la gráfica corta al eje OX al menos en un punto perteneciente al intervalo abierto (a,b).

Nos piden que demostremos que f(x) =2-x y g(x)=Lx se cortan es decir que la ecuación 2-x=Lx tiene solución. O lo que es lo mismo que la tiene la ecuación 2-x-Lx=0.
Consideremos la función h(x)=2-x-Lx
Se verifica que:
h(1)=2-1-L1=1>0 ; h(e)=2-e-Le=1-e<0 y h es continua en su dominio: $(0,\infty)$ y por tanto lo es en el intervalo [1,e].
h verifica entonces las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [1,e]$\Rightarrow \exists c \in (1,e)$ tq h(c)=0 lo que garantiza que las funciones f y g se cortan en ese punto.

5. Comprueba si la función f(x)=$|x^2-2x|$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,3]

Para que f cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el [-1,3] hemos demostrar que f(-1)=f(3) y que f es continuna en [-1,3] y derivable en (-1,3)

1º) f(-1)= f(3)=3.
2º) continuidad en [-1,3]

$$f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x \text{ si } x<0 \\ -x^2+2x \text{ si } 0\le x\le 2 \\ x^2-2x \text{ si } x>2 \end{cases}$$

Todas las funciones que conforman f(x) son continuas y derivables en todo R, por lo tanto los únicos puntos que hemos de estudiar son x=0 y x=2

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2x)=0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x^2+2x)=0$; f(0)=0 luego f es continua en x=0
Continuidad en x=2: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x^2+2x)=0$; $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-2x)=0$; f(2)=0 luego f es continua en x=2
En consecuencia f es continua en el intervalo [-1,3]
3º) derivabilidad en (1,3)
Por lo dicho en el apartado anterior hemos de estudiar solo si f es derivable en x=0 y x=2

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 \text{ si } x<0 \\ -2x+2 \text{ si } 0\le x\le 2 \\ 2x-2 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

$f_-'(0)=-2$; $f_+'(0)=2 \Rightarrow \nexists f'(0)$ por lo que f no es derivable en (-1,3). En consecuencia no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle