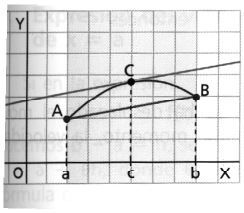
Examen 1ª evaluación matemáticas II. Curso 2010-2011

1.-a)Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Enunciado e interpretación geométrica.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), se verifica que existe un punto c$\in$(a,b) tal que : f ' (c)= $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica

el teorema del valor medio garantiza que si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en el abierto (a,b) existe al menos un punto, de dicho intervalo abierto, cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))



b) Demuestra que la función y s= L(senx+1)+cosx toma el valor 0'5 en el intervalo [0,π]. Enuncia el teorema en el qué te basas

Nos basamos en el Teorema de los valores intermedios o de Darboux**:** Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a,b],$\Rightarrow \forall$ y tq f(a)<y<f(b) $\exists$c$\in$(a,b) tq f(c)=y

Es decir, Si f es una función continua en [a,b], su gráfica alcanza en el intervalo (a,b) todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b) al menos una vez.

En nuestro caso f(x)=L(senx+1)+cosx; f(0)=1; f(π)=-1 Por tanto f alcanza todos los valores comprendidos entre -1 y 1, en particular alcanaza el valor 0’5.

NOTA: Podría hacerse tambien por el teorema de Bolzano tomando la función y=L(senx+1)+cosx-0’5 y demostrando que se hace 0 en el intervalo [0,π].

2.-a) Define: función creciente en un intervalo (a,b); máximo absoluto y máximo relativo de una función.

Se dice que una función y=f(x) es creciente en (a,b) si $\forall x, y \in (a,b), x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

Se dice que y=f(x) posee un máximo absoluto en x=x_0 si $\forall x \in Df(x) \le f \le (x_0)$

Se dice que y=f(x) posee un máximo relativo en x=x_0 si existe un entorno de x_0 (x_0-h,x_0+h) tal que $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ x$\neq$ $x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

b) Responde verdadero o falso indicando la razón

1. Si f es derivable en x=a entonces f es continua en x=a
2. Si f ' (a)=0 entonces f posee en x=a un extremo relativo

1 Verdadero. Si f es derivable en x=a $\exists\, f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = f'(a).\lim\limits_{h\to 0} h = 0 \Rightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \Rightarrow$ f es continua en x=a

2 Falso. Por ejemplo la función y=x^3 verifica que f ‘(0)=0 y sin embargo es creciente en ese punto Si f ‘ (a)=0 la función puede ser en x=a creciente, decreciente, tener un máximo o un mínimo.

3.-Intervalos de crecimiento de y=x$e^{-\frac{1}{x}}$ y concavidad de y=$\frac{x^2}{2-x}$

a) y=x$e^{-\frac{1}{x}}$; D=R-{0}; y'= $e^{-\frac{1}{x}}$+x.$e^{-\frac{1}{x}}$.(1/x^2)= $e^{-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})$ =$e^{-\frac{1}{x}}.\frac{x+1}{x}$

$e^{-\frac{1}{x}}$>0 $\forall x \in D$ por tanto el signo depende del de $\frac{x+1}{x}$; raices x=0 y x=-1 Damos valores y resulta

+ - +
-1 0

Por tanto f es creciente $(-\infty-1)\cup(0,\infty)$ y decreciente en (-1,0); En x= -1 hay un máximo.

b)y=$\frac{x^2}{2-x}$ D= R-{-2} ; y'=$\frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$; y''=$\frac{(4-2x)(2-x)^2+(4x-x^2)2.(2-x)}{(2-x)^4}$

=$\frac{(4-2x)(2-x)+(4x-x^2).2}{(2-x)^3}=\frac{8}{(2-x)^3}$ Como el numerador es positivo el signo depende del denominador. 2-x=0, x=2

+ -
2

En consecuencia, es convexa en $(-\infty,2)$ y cóncava en $(2,\infty)$

4.-Dada la función y = $\frac{1-Lx}{x}$

a) Estudia sus intervalos de crecimiento

b) Halla su recta tangente en x=1

a) D=$(0,\infty)$; y'=$\frac{\frac{-1}{x}.x-(1-Lx)}{x^2}=\frac{-2+Lx}{x^2}$ El denominador es positivo por lo que el signo depende del numerador; -2+Lx=0 $\Rightarrow x=e^2$

Dando valores se obtiene que f es decreciente en (0,e^2) y creciente en (e^2, ∞); en x=e^2 tiene un mínimo

- +
0 e^2

b) x=1 y=f(1)=1; m=f '(1)= $\frac{-2+L1}{1^2}=-2$. Recta tangente en x=1: -2(x-1)=y-1; y=-2x+3

5. a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}$; b) $\lim_{x\to0}\frac{sen^2 2x}{x^3+x}$;

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}=1^{\infty}$; Llamemos A=$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}$; LA=$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}$tgx.L$(1-\cos x)=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{senx.L(1-\cos x)}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x.L(1-\cos x)+senx.\frac{senx}{1-\cos x}}{-senx}=\frac{1}{-1}=-1$. LA=-1$\Rightarrow$A=e^{-1}

b)$\lim_{x\to0}\frac{sen^2 2x}{x^3+x}=\frac{0}{0}$; $\lim_{x\to0}\frac{sen^2 2x}{x^3+x}$B)==$\lim_{x\to0}\frac{4sen2x.\cos 2x}{3x^2+1}=\frac{0}{1}=0$

6)**2º A .** Estudia la derivabilidad de la función y=$\frac{|x|}{1+x^2}$

y=$\frac{|x|}{1+x^2}$=$\begin{cases} \frac{-x}{1+x^2} & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ D=R dado que el denominador no se anula en ningún punto.

La función está compuesta por funciones continuas y derivables, el único punto que puede tener problema es x=0. Estudiamos primero la continuidad en este punto

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{1+x^2} = 0$; $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0^{+-}} \frac{x}{1+x^2} = 0$; f(0)=0⇒f es continua en x=0

Derivabilidad en x=0: y'=$\begin{cases} \frac{-1+x^2}{(1+x^2)^2} & \text{si } x<0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$ f-'(0)=–1; f_+'(0)=1 Por tanto la función no es derivable en x=0

6)**2ºB** Estudia las asíntotas de las siguientes funciones: a) y=$e^{\frac{x^2+7}{x-1}}$; b) y)=L($\frac{x+1}{x-2}$)

a) y=$e^{\frac{x^2+7}{x-1}}$; =R-{1}

AV: $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x^2+7}{x-1}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x^2+7}{x-1}} = e^{+\infty} = \infty \Rightarrow$ x=1 es AV por la derecha

AH: $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x^2+7}{x-1}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2+7}{x-1}} = e^{+\infty} = \infty \Rightarrow$ y=0 es AH por la izquierda

b) y)=L($\frac{x+1}{x-2}$) Para calcular el dominio hemos de ver donde esr positiva la fracción $\frac{x+1}{x-2}$

x+1=0⇒ x=-1; x-2=0⇒x= dando valores obtenemos

Por tanto D=$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

+ - +
-1 2

AV $\lim_{x\to -1^-} L(\frac{x+1}{x-2}) = L0 = -\infty$; $\lim_{x\to -2^+} L(\frac{x+1}{x-2}) = L\infty = \infty$ Por tanto, x=-1 es AV izd y x=2 AV dcha.

AH $\lim_{x\to -\infty} L(\frac{x+1}{x-2}) = L1 = 0 \Rightarrow$ y=0 es AH