Examen de Álgebra Matemáticas II Curso 13-14 Soluciones

Nombre:...

1. Sen C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det(M)=4. Calcula, enunciando las propiedades de los determinantes que utilices, el determinante de una matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, son: $-C_2$, $2C_1-C_3$, C_2+C_3. **(1'25)**

Solución: $M=(C_1, C_2, C_3)$; $|M|=4$; nos piden calcular $|-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3|$

$$|-C_2, 2C_1-C_3, C_2+C_3| \underset{1}{=} |-C_2, 2C_1-C_3, C_3| \underset{2}{=} |-C_2, 2C_1, C_3| \underset{3}{=} -2|C_2, C_1, C_3| \underset{4}{=} 2|C_1, C_2, C_3| = 2.4 = 8$$

1. Columna 3+columna1 Propiedad: Si a una fila o columna se le suma un múltiplo de otra el determinante no varía
2. Columna 2+ columna 3. Propiedad: la misma enunciada anteriormente
3. Extremos (-1) y 2, que multiplican respectivamente a la segunda y tercera columna, fuera del determinante. Propiedad: Si una fila o columna se multiplica por un número el determinante queda multiplicado por el mismo número
4. Intercambiamos la primera y segunda columnas. Propiedad: Si se intercambian dos filas o columnas el determinante cambia de signo.

2. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx+y+z=0 \\ x-my-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$. Resuélvelo en los casos de compatibilidad. **(1+1)**

Solución

AM$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Partimos del menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Lo orlamos de la única forma posible en A $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2+3m-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$

Podemos garantizar por tanto que:
Si m=1 Rg(A)=2
Si m=2 Rg(A)=2
Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 2 Rg(A)=3 y, en consecuencia Rg(AM)=3

Orlamos ahora el menor de partida de la otra forma posible en la matriz AM:

$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2+m=0 \Rightarrow m=2$. Esto significa que para m=2 el Rg(AM) =2 (por ser cero los dos menores de orden tres estudiados), para m≠2 Rg(AM)=3

En consecuencia concluimos:
Si m=1 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI
Si m=2 Rg(A)=Rg(AM)=2. SCI
Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 2 Rg(A)=Rg(AM)=3. SCD

Nos piden ahora que lo resolvamos en los casos compatibles.

Lo hacemos primero para el caso indeterminado, m=2. Al haber 3 ecuaciones y ser el Rango 2, una de las ecuaciones es supérflua y podemos eliminarla, lo hacemos con la primera ecuación ya que es la que no pertenece al menor de orden 2 que determinó el rango.
Cogiendo las ecuaciones segunda y tercera, sustituyendo m por 2, y pasando para el término independiente la incógnita y, que tampoco intervino en el rango, obtenemos:

$\begin{cases} x - z = 1 + 2y \\ 2x + z = -y \end{cases}$ Resolvemos por Cramer x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1+2y & -1 \\ -y & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{1+y}{3}$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2y \\ 2 & -y \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-2-5y}{3}$

Solución del sistema: $\begin{cases} x = 1/3 + 1/3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2/3 - 5/3\lambda \end{cases}$

Resolvemos ahora los casos determinados, esto es $\forall m \in R tq m \neq 1 y m \neq 2$ Aplicamos la regla de Cramer.

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2} = \dfrac{0}{-m^2+3m-2} = 0$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2} = \dfrac{m-2}{-m^2+3m-2} = \dfrac{m-2}{-(m-1)(m-2)} = \dfrac{-1}{m-1}$

z= $\dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2} = \dfrac{2-m}{-m^2+3m-2} = \dfrac{-(m-2)}{-(m-1)(m-2)} = \dfrac{1}{m-1}$

Solución: (0, $\dfrac{-1}{m-1}, \dfrac{1}{m-1}$)

3. Sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m-1 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, discutelo, por el método de Gauss, para los distintos valore del parámetro m.**(1'25)**

Solución

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m-1 \end{pmatrix} \underset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m-2 \end{pmatrix} \underset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m-2 \end{pmatrix}$ 1: Fila3-Fila1; 2:Fila3-Fila2

Una vez escalonada la matriz procedemos a discutir el sistema para los distintos valores de m. Si analizamos la última fila, observamos que para m=1 la última ecuación quedaría: 0x+0y+0z=-1, por lo tanto para m=1 el sistema es incompatible. (Podríamos haberlo pensado utilizando el teorema de Rouché: la última fila de A es (0,0,0) y, por tanto el rg(A)=2, la última de la matriz AM es (0,0,0,-1), esta matriz tiene por tanto 3 filas que son vectores escalonados y, en consecuencia, Rg(AM)=3 S.I.)
Analizamos ahora la 2ª fila; si m=0 la 2ª y 3ª filas no están escalonadas, tenemos que ver entonces que ocurre con las matrices A y AM para dicho valor. Sustituimos por m=0 y obtenemos que la matriz quedaría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{3. Fila3+Fila2}$$

Como vemos la última fila sería 0x+0y+0z=-2, por tanto el sistema es incompatible para m=0
En consecuencia concluimos:

Si m=1 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI

Si m=0 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI

Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 0 Rg(A)=Rg(AM)=3. SCD

4. a) Pon un ejemplo de matriz simétrica de orden 3 y otro de matriz antisimétrica de orden 3

Solución:

Una matriz simétrica es aquella que es igual a su traspuesta: $A=A^t$. Para que eso sea posible tienen que ser $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i,j$. Ejemplo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Una matriz antisimétrica es aquella que verifica que su opuesta es igual a su traspuesta: $A^t=-A$
Para que eso sea posible tiene que ocurrir que $a_{ij}=-a_{ji}\forall i,j$ tq $i\neq j$; $a_{ii}=0$

Ejemplo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, puede comprobarse que $A^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}=-A$

b) Sea M una matriz simétrica de orden 3 con det(M)=-1. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $M+M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M.

Solución

M simétrica$\Rightarrow M=M^t \Rightarrow \det(M+M^t)=\det(M+M)=\det(2M)\underset{1}{=}2^3.\det(M)=-8$

1. Por cada fila que está multiplicada por 2 el determinante queda multiplicado por dicho número. En consecuencia, al tener A tres filas el determinante queda multiplicado por 2^3.

c) Calcula una matriz X simétrica y de rango 1 que verifique: $X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(0’5+0’5+0’5)**

Solución: Al ser simétrica $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ b+2c & -b-2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ -a-2b=-2 \\ b+2c=0 \\ -b-2c=0 \end{cases}$ La 2º ecuación es Linealmende dependiente de la 1ª, por ser su opuesta, y por lo tanto es una ecuación superflua. Lo mismo ocurre con la 4ª ecuación que es opuesta de la 3ª.

Nos dicen además que el rg(X)=2, lo que es equivalente a decir que su determinante es igual a cero. Es decir: $a.c-b^2=0$. Añadiendo esta nueva ecuación y eliminando las dos superfluas el sistema queda: $\begin{cases} a+2b=2 \\ b+2c=0 \\ ac=b^2 \end{cases}$ Resolviéndolo se obtiene: a=2, b=0, c=0$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: solución del sistema despejamos en la 2ª : b=-2c, sustituimos en la 1ª: a-4c=2$\Rightarrow$a=2+4c
Sustituimos ambos valores en la 3ª: $(2+4c).c=(-2c)^2 \Rightarrow 2c+4c^2=4c^2 \Rightarrow 2c=0 \Rightarrow c=0; \Rightarrow$ b=-2c=0 y a=2+4c=2

5. Resolver la ecuación matricial XA-C=B, utilizando para ello la matriz inversa, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$ **(1’5)**

Solución: Hallamos el $|A|=1\neq0\Rightarrow$ A tiene inversa. Por tanto:

$XA-C=B\Rightarrow XA=B+C\Rightarrow XAA^{-1}=(B+C)A^{-1}\Rightarrow X=(B+C)A^{-1}$

Hallamos A^{1}:

$$a_{11}=\begin{vmatrix}4&6\\2&9\end{vmatrix}=24;\quad a_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&9\end{vmatrix}=-5;\quad a_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\4&6\end{vmatrix}=-2$$

$$a_{12}=-\begin{vmatrix}3&6\\4&9\end{vmatrix}=-3;\quad a_{22}=-\begin{vmatrix}1&2\\4&9\end{vmatrix}=1;\quad a_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}=0$$

$$a_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\4&2\end{vmatrix}=-10;\quad a_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}=2;\quad a_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}$. Calculamos ahora $B+C=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$

$$X=(B+C)A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69&-14&-6\\-2&1&0\\15&-3&-1\end{pmatrix}$$

6. a) Define matriz inversa y enuncia el teorema de caracterización de las matrices inversibles
   b) Enuncia elteorema de Rouché- Fröbenius **6a y 6b apuntes**
   c) Si A y B son matrices cuadradas, sabemos que de A.B=0 no puede deducirse que una de las dos matrices sea la matriz nula. Demuestra que si $|A|\neq0$ y A.B=0 entonces si puede deducirse que B=0

   Solución: Si $|A|\neq0\Rightarrow\exists A^{-1}$ y por tanto $A.B=0\Rightarrow A^{-1}(A.B)=A^{-1}.0\Rightarrow(A^{-1}A)B=0\Rightarrow I.B=0\Rightarrow B=0$

   d) Define la operación producto de matrices y enuncia sus propiedades. **(Apuntes)** **(0’75+0’5+0’5+0’75)**