Examen de Álgebra Curso 2011-2012

Nombre...

1.-a)Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius 0’5 Ptos. (En los apuntes)

b)Discutir para los distintos valores de a el sistema $\begin{cases} 3x-ay+2z=a-1 \\ 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-(a-1)z=0 \end{cases}$. Resolverlo en los casos de compatibilidad utilizando la regla de cramer cuando sea posible. (2 puntos)

AM=$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -a+1 & 0 \end{array}\right)$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos de la única forma posible en A $\begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{vmatrix} = -2a^2+14a-20=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=5 \end{cases}$ Esto significa que si a=2 o a=5 RgA=2; si a≠2 y a≠5 RgA=3⇒RgAm=3 y el sistema es SCD.

Orlamos el menor de partida de la otra forma posible en AM

$\begin{vmatrix} 3 & -a & a-1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 10a-20=0 \Rightarrow a=2$. Por tanto si a=2 RgAM=2 (al hacerse cero los dos menores) para cualquier otro valor de a RgAM=3. En consecuencia:

Si a=2 RgA=RgAM=2<nº incógnitas. SCI

Si a=5 RgA=2 y RgAM=3. SI

Si a≠2 y a≠5 RgA=RgAM=3 SCD.

Vamos a resolverlo primero para a=2. Como el sistema es indeterminado eliminamos la ecuación que no intervino en el rango (en nuestro caso la 1ª) y pasamos para el t´rmino independiente la incógnita que no perteece al menor que determinó el rango, (en nuestro caso z). El sistema queda: $\begin{cases} 2x-5y=1-3z \\ x+3y=z \end{cases}$ Resolviendo $\begin{cases} x=3/11-4/11\lambda \\ y=-1/11+5/11\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Resolvemos ahora para a≠2 y a≠5 por Cramer. |A|= $-2a^2+14a-20$ (hallado antes)

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} a-1 & -a & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -a+1 \end{vmatrix}}{-2a^2+14a-20} = \dfrac{4a^2-18a+20}{-2a^2+14a-20}$; y= $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & a-1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -a+1 \end{vmatrix}}{-2a^2+14a-20} = \dfrac{2a^2-4a}{-2a^2+14a-20}$

Z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -a & a-1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-2a^2+14a-20} = \dfrac{10a-20}{-2a^2+14a-20}$

2. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$ Calcular su rango para los distintos valores de a utilizando el método de Gauss (1’5 ptos)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \underset{\substack{F2\text{-}a.F1 \\ F3\text{-}F1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 0 & a-1 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \underset{C2\leftrightarrow C4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \underset{F3+F2}{\sim}$$

$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$; La tercera fila se anula si $2\text{-}a\text{-}a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$ si a=1 también se anula la segunda. En consecuencia:

Si a=1 RgA=1
Si a=-2 RgA=2
Si a ≠ 1 y a ≠ -2 RgA=3

3.--a)Enuncia el teorema de caracterización de matrices inversibles (0’5)(En los apuntes)

b) Dadas las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Resolver, utilizando la matriz inversa, la ecuación matricial AX+B=C

|A|=4≠ 0 por lo que A es inversible. Entonces, AX+B=C⇒AX=C-B⇒X=A^{-1}(B-C)

Calculamos $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos C-B= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & -1 \\ 2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ Calcula razonadamente $\begin{vmatrix} -3b+1 & -3a+1 & -3c+1 \\ 2n & 2m & 2p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix}$.

Enuncia las propiedades que utilizas (1’5 puntos)

$$\begin{vmatrix} -3b+1 & -3a+1 & -3c+1 \\ 2n & 2m & 2p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2.\begin{vmatrix} -3b+1 & -3a+1 & -3c+1 \\ n & m & p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \underset{\substack{(2) \\ F1-F3}}{=} 2.\begin{vmatrix} -5b & -5a & -5c \\ n & m & p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$=-10\begin{vmatrix} b & a & c \\ n & m & p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \underset{\substack{(2) \\ F3-2F1}}{=} -10\begin{vmatrix} b & a & c \\ n & m & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 10\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

(1) El determinante es función lineal de sus filas y sus columnas, por lo que si unba fila está multiplicada por un número el determinante queda multiplicado por el mismo número.

(2) Si sumamos a una de las filas un múltiplo de otra el determinante no varía

(3) Si intercambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

5.-a) Define: sistema homogéneo y sistema de Cramer (0’5 ptos) (en los apuntes)

b) Sea S un sistema cuyo homogéneo asociado tiene solución única. Discutir bajo qué condiciones S sería un sistema de Cramer. ¿Puede ser S incompatible?. ¿ Puede ser S compatible indeterminado? .(0’75 puntos)

Sea S el sistema AX=B, su homogéneo asociado será AX=0. Que el asociado tenga solución única es equivalente a decir que RgA= número de incógnitas.

Si el sistema es cuadrado, n ecuaciones y n incógnitas, que el RgA=n es equivalente a decir que $|A|\neq 0$ y por lo tanto sería de Cramer.

S puede ser incompatible siempre que tenga más ecuaciones que incógnitas ya que, en ese caso, puede ocurrir RgA<RgAM

S no puede ser compatible indeterminado porque para ello tendría que ocurrir que RgA fuese menor que el nº de incógnitas y ya hemos explicado al principio que RgA=nº de incógnitas

c)Dado un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

i) Supuesto que es compatible determinado ¿Cómo podría ser si añadimos una ecuación?, ¿Y si la eliminamos?

ii) Supuesto que es incompatible ¿Cómo podría ser si añadimos una ecuación? ¿Y si la eliminamos? (0’75 puntos)

i) Si el sistema es SCD y añadimos una ecuación que es CL de las demás seguiría siendo SCD, si añadimos una que no lo es pasaría a ser SI.

Si eliminamos una ecuación será necesariamente SCI ya que RgA=RgAM=2

ii) Si el sistema es incompatible no hay ninguna solución común a todas las ecuaciones del sistema. En consecuencia, si añadimos una ecuación seguirá siendo SCI

Si eliminamos una ecuación podría ocurrir: que el sistema sea SCI, en caso de que hallamos eliminado la ecuación que producía la incompatibilidad, o que siga siendo incompatible en caso de que hallamos eliminado otra de las ecuaciones

d)Si sabemos que A es una matriz cuadrada y que |A|=2 decide, explicando en qué propiedades de los determinantes te basas, los valores de : $|A^7|$ y $|A^t.A^{-1}|$ (0’5 puntos)

$|A^7| \underset{(1)}{=} |A|^7=2^7.$ | ; $|A^t.A^{-1}| \underset{(1)}{=} |A^t|.|A^{-1}| \underset{(2)}{=} |A|.|A^{-1}| \underset{(1)}{=} |A.A^{-1}| \underset{(3)}{=} |I|=1$

(1) |A.B|=|A|.|B|; (2) $|A^t|=|A|$; (3) Definición de matriz inversa.