Examen cálculo diferencial 2º BACH (SOLUCIONES) Noviembre 2011

Nombre...

1. a) **Teorema de Rolle: Enunciado e interpretación geométrica**. **Pregunta teórica ver apuntes (0’75)**

   b) **Calcula el valor de k para que la función f(x)=x^3-kx+10 cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] (0’5)**

   La función es continua y derivable en todo R por ser una función polinómica. Para que cumpla el teorema de Rolle en ese intervalo es necesario únicamente que se verifique que f(-2)=f(0). f(-2)=-8+2k+10=2+2k; f(0)=10. Por tanto 2+2k=10$\Rightarrow k=4$

   c) **Para ese valor de k halla el punto del intervalo que cumple la tesis del teorema(0’5)**

   Para k=4 la función es: f(x)=x^3-4x+10; f ‘(x)=3x^2-4=0$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ como el punto debe pertenecer al intervalo(-2,0) el punto que cumple la tesis es x=$-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. **Dada la función f(x)=**$\begin{cases} \frac{1-x}{e^x} \text{ si } x<0 \\ x^2+ax+b \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$ **, calcula los valores de a y b para que verifique las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-1,1] (1’25)**

   Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio f ha de ser continua en el intervalo [-1,1] y derivable en (-1,1). Dado que tanto la función y=$\frac{1-x}{e^x}$ como y=x^2+ax+b son continuas y derivables en todo R, independientemente de los valores de a y b, lo único que tenemos que comprobar es la continuidad y derivabilidad en x=0

   Continuidad en x=0: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-x}{e^x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}$ f(x)=$\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+ax+b$ =b; f(0)=b$\Rightarrow$b=1 para que f sea continua en x=0

   Derivabilidad en x=0:

   $$f'(x)=\begin{cases} \frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}= \text{ si } x<0 \\ 2x+a \text{ si } x>0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{-2e^x+xe^x}{e^{2x}} \text{ si } x<0 \\ 2x+a \text{ si } x>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'_-(0)=-2 \\ f'_+(0)=a \end{cases}\Rightarrow a=-2$$

3. **Utilizando la definición de derivada comprueba si la función y=| x^2-3x | es derivable en x=3 (1’5)**

   $$y=|x^2-3x|=\begin{cases} x^2-3x \text{ si } x<0 \\ -x^2+3x \text{ si } 0\leq x\leq 3 \\ x^2-3x \text{ si } x>3 \end{cases}$$

   $$f_-'(3)=\lim_{h\to o^-}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to o^-}\frac{-(3+h)^2+3(3+h)}{h}=\lim_{h\to o^-}\frac{-9-h^2-6h+9+3h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(-h-3)}{h}=-3$$

f_+ '(3)=$\lim_{h\to o^+}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to o^+}\frac{(3+h)^2-3(3+h)}{h}=\lim_{h\to o^+}\frac{9+h^2+6h-9-3h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h+3)}{h}=3$

Como las derivadas laterales no coinciden la función no es derivable en x=3

4. **Dada la función f(x)=L$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$, definida para x>1, calcular el punto donde su recta tangente es paralela al eje OX.(1'5)**

Si la recta tangent**e** es paralela al eje OX en un punto la derivada en ese punto vale cero. Así pues hemos de derivar y buscar el punto que anule la derivada.

y'=$\frac{\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}}{\frac{x^2}{x-1}}=\frac{(2x^2-2x-x^2)(x-1)}{x^2(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{x^2(x-1)}=\frac{x(x-2)}{x^2(x-1)}=\frac{x-2}{x(x-1)}=0\Rightarrow x=2$

5. **Demuestra que la ecuación senx+2x+1=0 tiene una única solución real. (1'75)**

Para demostrar que tiene una solución utilizaremos el teorema de Bolzano: Sea f una función continua en [a,b] y tal que f(a).f(b)<0, entonces $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

Consideremos la función y=senx+2x+1, f(0)=1>0 y f($-\pi$)=-2π+1<0, como f es continua en todo R lo es en el intevalo [- π, 0] y por lo tanto cumple el teorema de Bolzano, es decir $\exists c\in(-\pi,0)/f(c)=senc+2c+1=0$. Lo que es equivalente a decir que la ecuación de partida tiene solución.

Debemos ahora demostrar que esa solución es única. La función y=senx+2x+1 es continua y derivable en todo R, por lo que si tuviese dos raíces cumpliría todas las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo comprendido entre ellas. Esto quiere decir que entre las dos raíces debería haber una raiz de la derivada. Pero y'=cosx+2 y no tiene raíces pues cosx=-2 no tiene solución. Por lo tanto la función y no puede tener dos raíces reales.

6. **Resuelve los siguientes límites: a)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$ **(0'75)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-senx}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{-\cos x}=-2$$

b) $\lim_{x\to 0^+}(senx)^{tgx}$ **(1)**

A=$\lim_{x\to 0^+}(senx)^{tgx}$ **=1**$^{\infty}$

LA=$\lim_{x\to 0}$tgxL(senx)=$\lim_{x\to 0}\frac{L(senx)}{ctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{-1}{sen^2x}}=\lim_{x\to 0}-\cos x.senx=0$; LA=0$\Rightarrow A=e^0=1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^{2x}$ **(0'5)**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^{2x}=3^{+\infty}=\infty$$