Soluciones Examen de Cálculo diferencial MatemáticasII Curso 2010-2011

1. a)Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. (en la teoría)

b)Calcula b para que la función f(x)= $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\; + b \; si \; x \le 0 \\ xLx \; si \; x > 0 \end{cases}$ sea continua .

La función y= $\sqrt[3]{x^2}\; + b$ es c ontinua en R para cualquier valor de b, por tanto lo será en $(-\infty, 0)$. La función y=xLx es continua en (0,∞). El único punto que puede tener problemas de continuidad es x=0. Estudiamos la continuidad en ese punto:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^2}\; + b = b;$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{N\to 0+} x.Lx = 0.\infty$indeterminado ; $\lim_{N\to 0+} x.Lx = \lim_{x\to 0+} \frac{Lx}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$

f(0)=0⇒ f es cntinua si b=0

c)Para ese valor de b ¿es aplicable el teorema del valor medio en el intervalo [-1,1]

Dado que para b=0 f es continua en R, también lo es en [-1,1]. Por tanto solo nos falta comprobar la hipotesis de derivabilidad en el abierto (-1,1)

Y'= $\begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \text{ si x<0} \\ Lx + 1 \text{ si x>0} \end{cases}$ $\Rightarrow f'_-(x) = \frac{2}{0}\nexists$; $f'_+(x) = L0 + 1 \nexists$ Por lo tanto no es derivable en x=0 y en consecuencia no ño es en el intervalo (-1,1) ⇒ No se caumplen las hipótesis del teorema.

2. a)Calcula a,b,c,d sabiendo que la la función y=ax^3+bx^2+cx+d tiene un máximo en el punto(1,4), un punto de inflexión en x=0 y que la recta tangente a dicha función en x=0 es paralela a la recta y=6x

y=ax^3+bx^2+cx+d; y'=3ax^2+2bx+c; y''=6ax+2b

$\Rightarrow \begin{cases} (1,4) máximo \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d = 4 \\ 3a+b+c = 0 \end{cases} \\ x = 0 \text{ punto inflexión } \Rightarrow f''(0) = 0 \;\Rightarrow 2b = 0 \\ \text{recta tg en x=0 paralela a y=6x} \Rightarrow f'(0)=6 \Rightarrow c = 6 \end{cases}$ Rcesolviendo esas 4 ecuaciones

obtenemos: a=-2, b=0, c=6, d=0

b)Demuestra que la ecuación 2x^5+x+1=0 tiene una raiz real y sólo una. Enuncia los teoremas en los que te basas

Utilizaremos el teorema de Bolzano para demostrar que tiene alguna raiz real: Sea f continua en [a,b] y f(a).f(b)<0, se verifica que existe c∈(a,b) / f(c)=0.

Consideremos el intervalo [-1,1], la función es continua en R y por lo tanto lo es en dicho intervalo. f(-1)=-2-1+1>0 ; f(1)=2+1+1>0 $\Rightarrow \exists c \in (-1,1)$ /f(c)=0 Hemos probado que la función tiene al menos una raiz real que pertenece a ese intervalo.

Para demostrar que la raiz es única nos basaremos en el teorema de Rolle: Sea f una función continua en [a,b] y derivable en (a,b) $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$/ f '(c)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Como consecuencia directa de este teorema, se puede demostrar que entre dos raíces cualesquiera de una función se encuentra una raiz de su derivada. Así pues si f tiene dos raices y cumple las hipótesis del teorema de Rolle, tendríamos que encontrar al menos una raiz de f ' que se encontraría entre ellas.

En nuestro caso f es continua y derivable en R y por lo tanto en cualquier intervalo que tomemos. Si hallamos las raíces de su derivada tenemos: f '(x)=$10x^4+1=0 \Rightarrow 10x^4=-1$ Dado que esta ecuación no tiene solución la derivada no tiene ninguna raiz y, por lo tanto, la función f no puede tener dos raíces.

3. a) Calcula las asíntots de y=$\frac{L(x+4)}{x-3}$

D=(-4,∞) $-\{3\}$

$\lim_{x\to 3}\frac{L(x+4)}{x-3}=\frac{L7}{0}=\infty \Rightarrow x=3$ AV

$\lim_{x\to 4^+}\frac{L(x+4)}{x-3}=\frac{L0}{1}=\infty \Rightarrow x=4$ AVDcha. (del dominio se deduce que no podemos hacer el límite cuando x tiende a 4 por la izd)

$\lim_{x\to +\infty}\frac{L(x+4)}{x-3}=\frac{\infty}{\infty};\ \lim_{x\to +\infty}\frac{L(x+4)}{x-3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+4}}{1}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow$ y=0 es AH por a dcha. (del dominio se deduce que no podemos hacer el límite cuando x tiende a --∞)

b)Calcula las asintotas oblicuas de la función y=$\sqrt{x^2-4x+5}$;

$x^2-4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2} \nexists \Rightarrow D=R$

AV Dcha: m=$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x}$=1;

n=$\lim_{x\leftrightarrow +\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}-x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+5}-x).(\sqrt{x^2-4x+5}+x)}{(\sqrt{x^2-4x+5}+x)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+5-x^2}{(\sqrt{x^2-4x+5}\ +x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x+5}{(\sqrt{x^2-4x+5}\ +x)}=-2$ AV Dcha y=x-2

AV Izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x}$=-1;

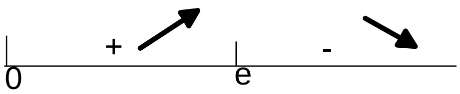
n=$\lim\limits_{x\leftrightarrow-\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}\ +x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+5}\ +x).(\sqrt{x^2-4x+5}\ -x)}{(\sqrt{x^2-4x+5}\ -x)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+5-x^2}{(\sqrt{x^2-4x+5}\ -x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x+5}{(\sqrt{x^2-4x+5}\ -x)}=2$ AV Izd y=-x+2

c)Crecimiento y decrecimiento de y=$\frac{Lx}{x}$

D=(0,∞); y'=$\frac{\frac{1}{x}.x-Lx}{x^2}=\frac{1-Lx}{x^2}$ El denominador es positivo por lo que solo hemos de estudiar el signo del numerador. 1-Lx=0⇒ $1=Lx\Rightarrow x=e$

(0,e) crece; (e,∞) decrece; x=e máximo



d)$\lim\limits_{x\to0}$ (cosx+senx)$^{1/x}$ =1$^{\infty}$

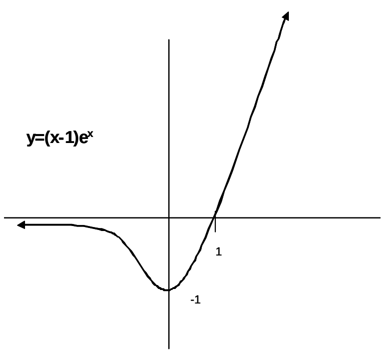
$\lim\limits_{x\to0}$ (cosx+senx)$^{1/x}$ =A; LA=$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$(cosx+senx) =$\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{cosx+senx}}{x}$=

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}=1; LA=1\Rightarrow A=e$

4. Representa graficamente la función y=e^x(x-1), estudiando previamente: dominio, cortes con los ejes, intervalos de monotonía y de curvatura y asíntotas.

y=(x-1)e^x

D=R; cortes (0,-1), (1,0)



$y'=e^x+(x-1)e^x=e^x.x=0\Rightarrow x=0$

$(-\infty,0)$ decrece, (0,∞) crece, (0,-1) mínimo

$y''=e^xx+e^x=e^x(x+1)=0\Rightarrow x=-1$

$(-\infty-1)$ convexa, (1,∞) cóncava; x=1 pto infle.

AV no tiene

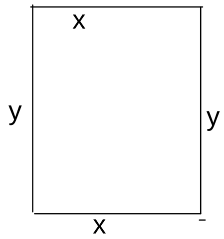
AH dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=\infty.e^{+\infty}=\infty.\infty=\infty$ No tiene

AH izd $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=-\infty e^{-\infty}=-\infty.0$ indeter.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{\infty}=0$ y=0 AH izd

AO Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+(x-1)e^x}{1})=\lim\limits_{x\to+\infty}e^xx=\infty.\infty=\infty$ No tiene

5. Se quiere construir un marco para una ventana de 1 m^2 de área. El coste del marco se estima en 12 euros el metro para el alto de la ventana y 3 euros el metro para el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico?



Perímetro=2x+3y. Por lo tanto Coste=3.2x+12.2y=6x+24y.

C=6x+24y; función a minimizar Àrea=1$\Rightarrow x.y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

C=6x+$\frac{24}{x}$; C'=6-$\frac{24}{x^2} = \frac{6x^2-24}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 = 24$; x=$\pm\sqrt{\frac{24}{6}} = \pm 2$

La solución x=-2 no tiene sentido. Tenemos que comprobar si para x=2 tiene un mínimo, para ello hallamos C'' y sustituimos por x=2;

C''=$\frac{12x.x^2-(6x^2-24).2x}{x^4} = \frac{48x}{x^4} = \frac{48}{x^3}$; C''(2)=$\frac{48}{8} > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo.

Para x=2 y=1/x=1/2.