Soluciones Examen de Análisis Curso 2010-2011

.Nombre...

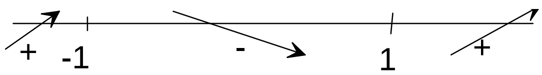
1. a) Teorema del valor medio del cálculo integral. Enunciado e interpretación geométrica (Teoría)

   b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral (teoría)

   c) Dada la función F(x)=$\int_0^x (t^2-1)e^{-t^2}dt$, estudia sus intervalos de crecimiento sin calcular la integral

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos la derivada de la función, por el teorema fundamental del cálculo integral F'(x)=(x^2-1)e^{-x^2}.

Comprobamos ahora su signo: $(x^2-1)e^{-x^2}=0 \Rightarrow (x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$



F es creciente $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; F es decreciente (-1,1)

2. Dada la función f(x)=xe^{-x}

   a) Representa gráficamente la función

y=x.e^{-x}=$\frac{x}{e^x}$

D=R; corte (0,0)

No es simétrica

$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow$

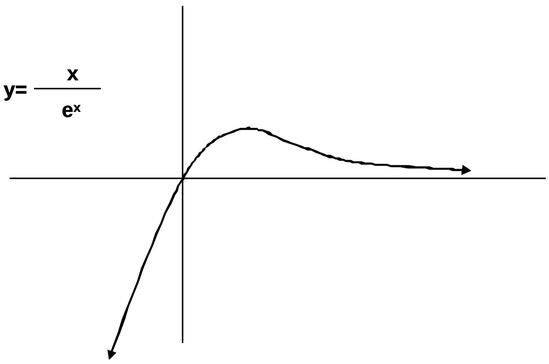
1-x=0$\Rightarrow$ x=1 $(-\infty,1)$ crece, (1,∞) decrece

(1,1/e) máximo

$y'' = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-2+x) = 0 \Rightarrow$

-2+x=0 $\Rightarrow$x=2; $(-\infty,2)$cóncava, (2,∞)convexa

(2,$\frac{2}{e^2}$) punto de inflexión



No tiene AV

AH Dcha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{e^{+\infty}}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminado. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$ y=0 AH dcha

AH izd $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{e^{-\infty}}=\frac{\infty}{0}=\infty$ No tiene AH izd

AO izd m=$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x.e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{0}=\infty$ No tiene AO

b) Halla el área del recinto limitado por la función y=f(x), los ejes de coordenadas y la recta x=-1

A=$\left|\int_{-1}^{0} x.e^{-x}dx\right| = \left| -xe^{-x} - e^{-x}]_{-1}^{0}\right| = |-1-(e-e)| = |-1| = 1ua;$

.$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

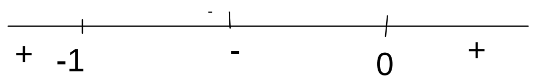
Partes: u=x dv=e^{-x}dx

du=dx; v=$-e^{-x}$

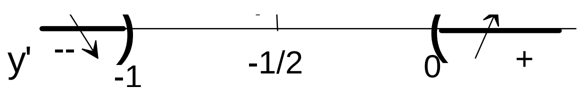
3. a) Dada la función y=L(x^2+x), estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

x^2+x ha de sr positivo para que exista L(x^2+x). $x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Por tanto D=$(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$



y'=$\frac{2x+1}{x^2+x}$. Su denominador es positivo en su dominio por tanto el signo depende del numerador. 2x+1>0⇒ $2x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$



Por tanto es creciente en $(-\infty,-1)$ decreciente en $(0,\infty)$

Asíntotas: $\lim_{x\to -1^-} L(x^2+x) = L0 = \infty \Rightarrow x = -1$ es AV Izda.

$\lim_{x\to -0^+} L(x^2+x) = L0 = \infty \Rightarrow x = 0$ es AV Dcha

AH $\lim_{x\to\infty} L(x^2+x) = L\infty = \infty \Rightarrow$ No tiene AH

A Oblicuas m= $\lim_{x\to\infty} \frac{L(x^2+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = 0 \Rightarrow$ No hay A Oblicuas.

b) Estudia las asíntotas de la función y= $\sqrt{x^2+1}$

AO dcha: m=$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$;

n=$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\, x - x\right) = \infty - \infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado

n= $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)} ==$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{+1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{\infty}=0$

y=x AO dcha

AO Izd: m=$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$;

n=$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado

n= $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}==$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{+1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\frac{1}{\infty}=0$

4. Una función tiene como derivada f '(x)=$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y verifica que f(0)=3. Calcula f(x)

.f '(x)=$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow$ f(x)=$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x.(1-x^2)^{-1/2}dx=-\frac{1}{2}\int -2x.(1-x^2)^{-1/2}dx=$

$=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2}+C=-\sqrt{1-x^2}+C$. Para calcular C utilizamos que f(0)=3

F(0)=$-1+C=3\Rightarrow C=4$ luego f(x)=$-\sqrt{1-x^2}+4$

5.-a) $\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ (cambio $e^x-1=t^2$) ;

$e^x-1=t^2$; $e^x dx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}$

$\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{1}{t}\frac{2tdt}{t^2+1}=2\int\frac{1}{t^2+1}=2arctg$ t+C=2arctg$\sqrt{e^x-1}+C$

b) $\int\frac{x+2}{x^2-6x+5}dx$

$x^2-6x+5=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=5\end{cases}\Rightarrow\frac{x+2}{x^2-6x+5}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$

Dando valores se obtiene: para x=1 3=-4A$\Rightarrow A=-3/4$; para x=5 7=4B$\Rightarrow B=7/4$, entonces

b) $\int\frac{x+2}{x^2-6x+5}dx=\int\frac{-3/4}{x-1}dx+\int\frac{7/4}{x-5}dx=-\frac{3}{4}L|x-1|+\frac{7}{4}L|x-5|+C$

c)$\int arctgxdx$ =x.arctgx-$\int\frac{x}{1+x^2}dx=x.arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x.arctgx-\frac{1}{2}L|1+x^2|+C$

u =arctgx; du=$\frac{1}{1+x^2}dx$

dv=dx; v=x

d) $\lim_{x\to0}(\cos x+\operatorname{sen}x)^{1/x}=1^\infty$; A=$\lim_{x\to0}(\cos x+\operatorname{sen}x)^{1/x}$

$LA=\lim_{x\to0}\frac{L(\cos x+senx)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}=1\Rightarrow$ A=e