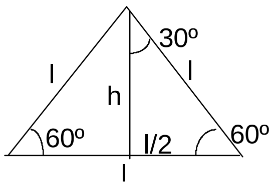
Examen de trigonometría 1º Bach 2 noviembre 2011

1. Demuestra: a) El valor del cos30º

Dibujamos un triángulo equilátero de lado l. Por ser equilátero todos sus ángulos son iguales y, por lo tanto miden 60º. Trazamos una de sus alturas que dividirán la base a la mitad.



Calculamos ahora, mediante el teorema de Pitágoras el valor de h: $h^2+(l/2)^2=l^2$; $h=\sqrt{l^2-l^2/4} = \sqrt{3l^2/4} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Por lo tanto, de la definición de coseno, se sigue:

$\text{Cos}30º=\dfrac{h}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}/2}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}(\alpha-\beta)$ a partir de la fórmula del $\text{sen}(\alpha+\beta)$;

$\text{sen}(\alpha\text{-}\beta)=\text{sen}(\alpha+(-\beta))=\text{sen}\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta-\text{sen}\alpha\cos\beta$; ya que $\text{sen}(-\beta)=\text{sen}(\beta)$ y $\cos(-\beta)=-\cos\beta$

c) Que no existe ningún ángulo α que cumpla: $\text{tg}\alpha=2/3$ y $\text{sen}\alpha=1/2$

Si $\text{sen}\alpha=1/2 \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-(\tfrac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ y, por lo tanto, $\text{tg}\alpha=\dfrac{1/2}{\pm\sqrt{3}/2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \neq \dfrac{2}{3}$

2. a) Si $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ y α>90º a) Calcula el valor **exacto** de las restantes razones del ángulo α sin calcular su valor.

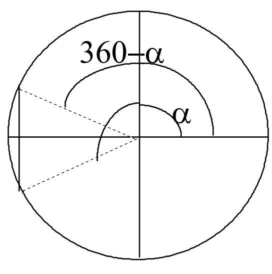
Dado que la tangente es positiva y α >90º el ángulo pertenece al tercer cuadrante.

$\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow sen\alpha = \dfrac{\sqrt{7}\cos\alpha}{3}$; $sen^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{7\cos^2\alpha}{9}+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 16\cos^2\alpha = 9 \Rightarrow$

$\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$ y dado que $\alpha \in 3^{er}$ cuadrante $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$; $sen\alpha = \dfrac{\sqrt{7}\cos\alpha}{3} = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$;

$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3}$; $\text{cosec}\alpha=\dfrac{1}{sen\alpha} = -\dfrac{4}{\sqrt{7}} = -\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$; $\text{ctg}\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

b) ¿Hay algún otro ángulo que tenga el mismo coseno que α? ¿Cual/es ? Explica como calcular sus valores en función de α

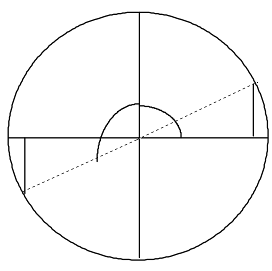


Los ángulos que tienen el mismo coseno que α son:

α+360k y (360-α)+360k

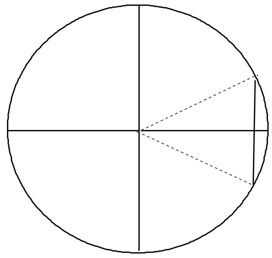
3. a) Relaciona las razones trigonométricas de los siguientes ángulos con las de un ángulo agudo. Di cual es su valor sin utilizar la calculadora:

$$240º = 180º+60º \Rightarrow \begin{cases} sen240 = -sen60 = -\sqrt{3}/2 \\ \cos 240 = -\cos 60 = -1/2 \\ tg240 = tg60 = \sqrt{3} \end{cases};$$

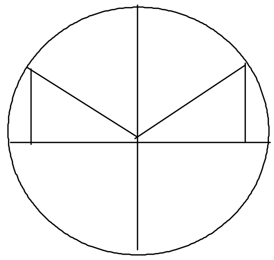


1770º=4.360+330, por lo tanto todas las razones de 1770º serán iguales a las de 330º;

330º=360º-30º$\Rightarrow \begin{cases} sen1170 = sen330 = -sen30 = -1/2 \\ \cos 1770 = \cos 330 = \cos 30 = \sqrt{3}/2 \\ tg1770 = tg330 = -tg30 = -\sqrt{3}/3 \end{cases}$;



-225º=135º=180º-45º$\Rightarrow \begin{cases} sen(-225) = sen135 = sen45 = \sqrt{2}/2 \\ \cos(-225) = \cos 135 = -\cos 45 = -\sqrt{2}/2 \\ tg(-225) = tg135 = -tg45 = -1 \end{cases}$

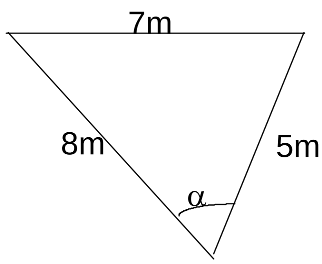


b)sabiendo que sen12º=0'2, sen37º=0'6 y cos37º=0'8 Calcula

cos12º=$\sqrt{1 - sen^2 12^0} = \sqrt{1 - 0'2^2} = \sqrt{0'96} = 0'97$
sen49º=sen(37+12)=sen37.cos12+cos37.sen12=0'6.0'97+0'8.0'2=0'742
cos6º=$\sqrt{\frac{1+\cos 12}{2}} = \sqrt{\frac{1+0'97}{2}} = \sqrt{0'985} = 0'99$
tg25º=tg(37-12)=$\frac{tg37 - tg12}{1 + tg37.tg12} = \frac{0'75 - 0'2}{1 + 0'75.0'2} = 0'47$; tg37=$\frac{sen37}{\cos 37} = 0'75$; tg12=$\frac{sen12}{\cos 12} = 0'2$
sen78=cos12=0'97 ya que 12 y 78 son complementarios
cos168=cos(180-12)= -cos12= -0'97

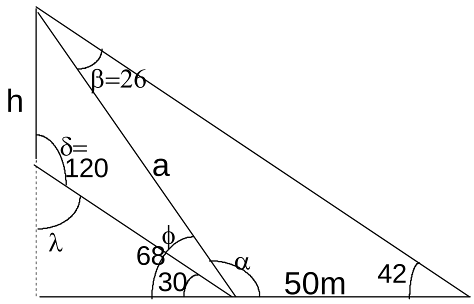
4. Resuelve paso a paso la siguiente ecuación trigonométrica: $\cos 2a + 1 = 3sena$
$\cos^2 a - sen^2 a + 1 = 3sena \Rightarrow 1 - sen^2 a - sen^2 a + 1 = 3sena \Rightarrow 2sen^2 a + 3sena + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow sena = \frac{-3 \pm \sqrt{4+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2; \text{ solución no válida} \\ 1/2 \Rightarrow a = \begin{cases} 30^0 + 360k \\ 150^0 + 360k \end{cases} \end{cases}$

5.En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5m y 8m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Teorema del coseno: $7^2=5^2+8^2-2.5.8.\cos\alpha$
$49=25+64-80\cos\alpha$
$-40=-80\cos\alpha$; $\cos\alpha=1/2$;
A=60º

6. Calcula la altura de una torre situada sobre una roca más alta que el punto donde te encuentras, si tomas las siguientes medidas:
a) El ángulo de visión del punto más alto de la torre es de 42º desde donde tu estás
b) Si te acercas 50m ese ángulo será de 68º y el del punto más bajo de 30º



El ángulo $\alpha = 180 - 68 = 112$º;
Por tanto $\beta = 180 - 112 - 42 = 26$º
Por otra parte, λ=90-30=60º y, por lo tanto,
$\delta = 180 - 60 = 120$º
Además ϕ=68–30=38º
Ahora podemos utilizar el teorema del seno:
$\frac{50}{sen26} = \frac{a}{sen42}$; operando a=76’32m

$\frac{76'32}{sen120} = \frac{h}{sen38}$; y operando h=54’25m