EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

1) a) Define base y comprueba razonadamente si los vectores (2, 6) y (2/3, 2) forman una base del plano.

Definición: ver teoría en el libro o en vuestros apuntes.

Comprobación: Los vectores dados son linealmente dependientes ya que se cumple: $\frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2\cdot 3}{2} = 3 = \frac{6}{2}$, entonces no son base.

b) Explica razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o no: ($\vec{a}$. $\vec{b}$)$\vec{c}$ es un número para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Es FALSA puesto que ($\vec{a}$. $\vec{b}$) es un escalar (nº) y por lo tanto el producto: ($\vec{a}$. $\vec{b}$)$\vec{c}$ es el producto de un escalar por un vector que dará como resultado un vector (que tendrá la misma dirección de $\vec{c}$)

c) Calcula el valor de k para que los puntos: A=(-3, 5) , B=(2, 1) y C=(6, k) estén alineados.

Si A, B, C están alineados los vectores que se forman tomando como origen y extremo esos tres puntos (AB, AC, BC, BA, CA y CB) son linealmente dependientes, tienen la misma dirección (la recta que contiene los tres puntos). Por lo tanto para calcular el valor de k escribimos dos de esos vectores y les exigimos dependencia lineal, por ejemplo: AB = (5, -4) y AC= (9, k-5) debe cumplirse:

$$\frac{5}{9} = \frac{-4}{k-5} \Rightarrow 5(k-5) = -36 \Rightarrow 5k = -36 + 25 \Rightarrow k = -\frac{11}{5}$$

(Podría hacerse escribiendo la ecuación de la recta que pasa por A y B y calculando k ara que C sea un punto de dicha recta (cumpla su ecuación), el proceso es más largo).

(1'75 = 0'5 + 0'5 + 0'75)

2) a) Dada la recta r: $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$ escribe la ecuación explícita, de la recta perpendicular a r que pasa por el punto B=(-2, 5)

Nos dan las ecuaciones paramétricas de la recta r, de ella deducimos que su vector director es $\vec{v}$ =(-5, 1) (los coeficientes del parámetro). Nos piden una recta perpendicular a ella por lo tanto su vector director será $\vec{w}$=(1,5) (ó (-1, -5)), con esto sabemos que m= $\frac{v_2}{v_1} = 5$, por lo que la ecuación será y= 5x + n, el valor de n lo calculamos sustituyendo las coordenadas de B, 5 = 5 . (-2) + n $\Rightarrow$ n = 5 + 10 =15
Es decir: y = 5x + 15, es la ecuación de la recta perpendicular a r pasando por B.

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P (1, -3) y es paralela a la recta 2x – 3y + 5 = 0

Rectas paralelas tienen la misma ecuación general excepto la C.

La ecuación de la recta que nos piden será de la forma: 2x – 3y + C =0

Para calcular C hacemos que P sea un punto de ella, es decir, que cumpla esa ecuación: $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + C = 0 \Rightarrow C = -11$

La ecuación es: 2x – 3y -11 = 0

c) Escribe la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo P = (0, 4) y Q = (-6, 0)

PQ = (-6, -4) $\Rightarrow$ Vector director de la recta pedida (4, -6) o (-4, 6)

Pasa por el punto medio del segmento PQ, que es M= $\left(\frac{0+(-6)}{2}, \frac{4+0}{2} \right)$

Es decir: M = (-3, 2)

No se especifica el tipo de ecuación podéis dar la que queráis:

Vectorial: $(x, y) = (-3, 2) + (4, -6) \cdot t$; $t \in \Re$

Paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \; ; \; t \in \Re \end{cases}$

Continua: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-6}$

Implícita: 6x + 4y + 10 = 0

Explícita: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

(2’25 = 0’75 · 3)

3) a) Halla la distancia entre las rectas:

r: x – 2y + 8 = 0 y s:-2x + 4y – 7 = 0

IMPORTANTE: HAY QUE COMPROBAR PRIMERO LA POSICIÓN RELATIVA

De las ecuaciones deducimos: v_r = (2, 1) y v_s = (-4, -2)

(Recuerda $v_2x - v_1y + C=0$)

$\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} \Rightarrow$ Los vectores directores son paralelos$\Rightarrow$Las rectas son paralelas o coincidentes(No lo comprobamos, con la distancia ya lo sabremos). Calculamos un punto de uno de ellas y la distancia de ese punto a la otra.

Ejemplo: (0, 4) es un punto de r (Hago x=0 y calculo y)

Calculo la distancia del punto (0,4) a la recta s:

d ((0,4),s)= $\frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10} u.$

De esto deducimos que las rectas son paralelas no coincidentes.

b) Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

El ángulo que forman dos rectas es el **menor** de los ángulos que forman sus vectores directores.
De las ecuaciones dadas deducimos:
v_r = (1, 2) y v_s = (1, -3)

Así: $\cos\alpha = \dfrac{|v_r \cdot v_s|}{|v_r|\cdot|v_s|} = \dfrac{|1\cdot 1 + 2\cdot(-3)|}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{1+9}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$

(1'5 = 0'75 · 2)

4) Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos que distan seis unidades de la recta 4x – 3y + 11=0. **(2)**

Utilizamos la fórmula de distancia de un punto a una recta y el dato de que debe ser 6: $\dfrac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16+9}} = 6 \Rightarrow |4x - 3y + 11| = 30$

De esto se sacan dos igualdades y de cada una de ellas la ecuación de una recta, puesto que el lugar geométrico que nos piden son dos rectas paralelas a la dada y que están a distancia 6 de ella, por encima y por debajo:

4x – 3y + 11= 30 y 4x – 3y + 11 = -30

4x – 3y – 19 = 0 y 4x – 3y + 41 = 0

5) Resuelve la ecuación: cos 2x = cos x **(1)**

Sustituyendo cos 2x por su expresión equivalente tenemos:

$$\cos^2 x - sen^2 x = \cos x \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Ecuación de segundo grado, de donde:

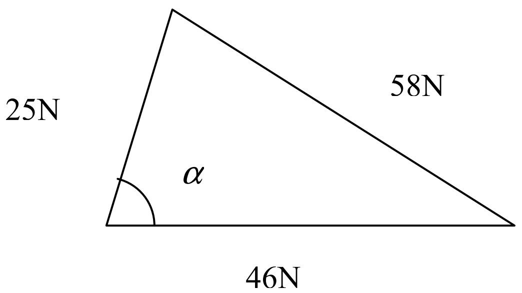
cos x= $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = 1 y -1/2$

cos x = 1 $\Rightarrow$x=360ºk=2kΠ ; $k \in Z$

cos x= -1/2 $\Rightarrow$ x = $120^{\circ}+360^{\circ}k$ ó x= $240^{\circ}+360^{\circ}k$; $k \in Z$

6) Dos fuerzas de 46N y 25 N dan una resultante de 58N. Calcula el ángulo que forman dichas fuerzas entre sí. **(1'5)**

Las tres fuerzas forman un triángulo cuyos lados miden 46, 25 y 58u.



Tenemos que calcular el ángulo que forman los lados de 46 y 25, aplicando el teorema del coseno:

$$58^2 = 46^2 + 25^2 - 2\cdot 46\cdot 25\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{623}{-2300} \Rightarrow \alpha = 105^{\circ}42'58''$$