PROGRAMACIÓN LINEAL.

La programación lineal es una técnica matemática muy utilizada en estudios de planificación. Su objetivo es distribuir de forma óptima unos recursos escasos. Nos enseñará métodos que permitan maximizar o minimizar un objetivo primario que está sujeto a una serie de restricciones.

Ejemplos:

1. Obtener el máximo rendimiento de los quirófanos de un hospital, sin disminuir la calidad del servicio y sin incrementar el personal sanitario. (En este caso el objetivo es maximizar el número de operaciones realizadas y las restricciones son el tiempo mínimo necesario para cada operación y el número máximo de personal del que se dispone).

2. Planificar un territorio para que albergue un número máximo de viviendas (objetivo), ajustándonos a: un número mínimo de zonas verdes, de suelo dedicado a zonas comerciales y escolares y a un presupuesto determinado (restricciones)

3. Minimizar los costes de una fábrica (objetivo), sin rebajar los beneficios de la misma ni la calidad de los productos que fabrica (restricciones)

De forma general un problema de programación lineal consistirá en encontrar el valor máximo o mínimo de una expresión algebraica (que constituye la función objetivo), cuando las variables deben de cumplir una serie de desigualdades lineales o inecuaciones (que constituyen las restricciones)
Los objetivos más comunes son maximizar los beneficios o los rendimientos de producción y minimizar los costes o los medios materiales o humanos. En definitiva, obtener un optimo aprovechamiento de los recursos.
Las restricciones más usuales son de carácter presupuestario, humanas , de tiempo, de energía o, en general, de medios productivos.

Aunque el desarrollo de la programación lineal comenzó en la segunda guerra mundial y se debió a necesidades logísticas y militares, fue en la industria y en la economía donde posteriormente ha encontrado sus aplicaciones más importantes. Así la programación lineal permite resolver problemas de distribución de factorías, adscripción de personal a distintos puestos de trabajo, almacenaje, planes de producción, problemas de circulación y de optimización semafórica, estudios de comunicaciones, etc.
El primer campo no militar en el que se utilizó la programación lineal fue en el de la dieta de animales, para determinar las cantidades de diferentes piensos que se debían proporcionar a un animal asegurándole la nutrición necesaria a un coste mínimo. Planteamientos semejantes se realizaron posteriormente en relación a la dieta humana. Concretamente, en países en vía de desarrollo, se han realizado estudios para planificar la producción de alimentos con el fin de proporcionar a la población los requerimientos necesarios de calorías, proteinas, vitaminas, hierro, calcio, etc; teniendo en cuenta las disponibilidades de suelo cultivable, el clima, las posibilidades de inversión, etc Se ha estimado que si todos los países en vía de desarrollo

utilizasen técnicas de programación lineal en su gestión, su producto interior bruto (PIB) aumentaría entre un 10% y un 15% en un año.
Naturalmente las variables de estos problemas son múltiples y complejas, necesitan de potentes ordenadores y rebasan sobradamente los objetivos de este curso, pero son un ejemplo de las magníficas aplicaciones de la programación lineal.

Las personalidades del siglo XX que más han influido en el desarrollo de la programación lineal han sido: Dantzing, Tjalling Koopmans y Leonid Kantorovitch; los dos últimos recibieron en 1975 el premio nobel de economía por sus trabajos.

Vamos a analizar a continuación algún problema típico de programación lineal.

Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100 kg. de almendra y 85 kg. de fruta. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A de calidad extra que contiene 3 kg. de chocolate, 1 kg. de almendra y 1 kg. de frutas y la caja de tipo B de calidad suprema que tiene 2 kg. de chocolate, 1'5 kg. de almendras y 1 kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A son de 13€ y las de tipo B 13’5€. ¿ Cuántas cajas de cada tipo debe de fabricar para maximizar los beneficios obtenidos?

Por lo general es conveniente resumir la información que tenemos en una tabla que nos facilite su comprensión y manejo.

	Caja tipo A: **x**	Caja tipo B: **y**	Disponibles
Chocolate	3 kg.	2 kg.	500 kg.
Almendras	1 kg.	1'5 kg.	100 kg.
Frutas	1 kg.	1 kg.	85 kg.
Precio	13€	13’5€	

A continuación plantearemos la función objetivo que queremos optimizar (maximizar o minimizar según los casos) y las inecuaciones lineales o restricciones a las que está sometida.

En nuestro caso, si designemos por **x** el número de cajas de tipo A y por **y** el número da cajas de tipo B que se han de fabricar, la función beneficio vendra dada por: **B= 13x + 13’5y**
Las restricciones al problema quedan determindas por las siguientes inecuaciones

$$3x + 2y \leq 500 \quad (\text{ chocolate })$$
$$x + 1'5y \leq 100 \quad (\text{ almendra })$$
$$x + y \leq 85 \quad (\text{ frutas })$$

Por otra parte x e y no pueden ser negativas, por lo que debemos contemplar también como restricciones: $x \geq 0$ e $y \geq 0$

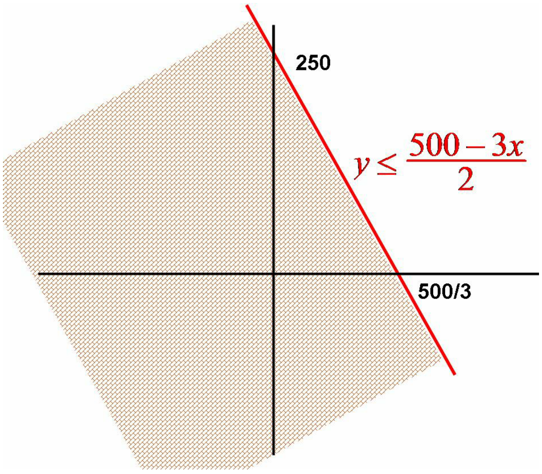
El problema podemos establecerlo entonces de la siguiente forma: encontrar los valores de x e y que, verificando todas las inecuaciones , hacen máximo el valor de B.

Dado que el par (x,y) debe satisfacer todas las inecuaciones, tendra que pertenecer a la región del plano que se obtiene al intersecar las soluciones de todas ellas (a esa región se le conoce con el nombre de región factible). Comenzaremos entonces buscando gráficamente dicha región.

3x+2y≤ 500 $\Rightarrow 2y \leq 500 - 3x \Rightarrow y \leq \frac{500-3x}{2}$.

Representamos la recta y=$\frac{500-3x}{2}$ y dibujamos la región que resuelve esta inecuación:

Valores de la recta: x=0 y=250; y=0 x=500/3; $y \leq \frac{500-3x}{2}$



La zona marcada es el conjunto de puntos del plano que son solución de la primera inecuación.

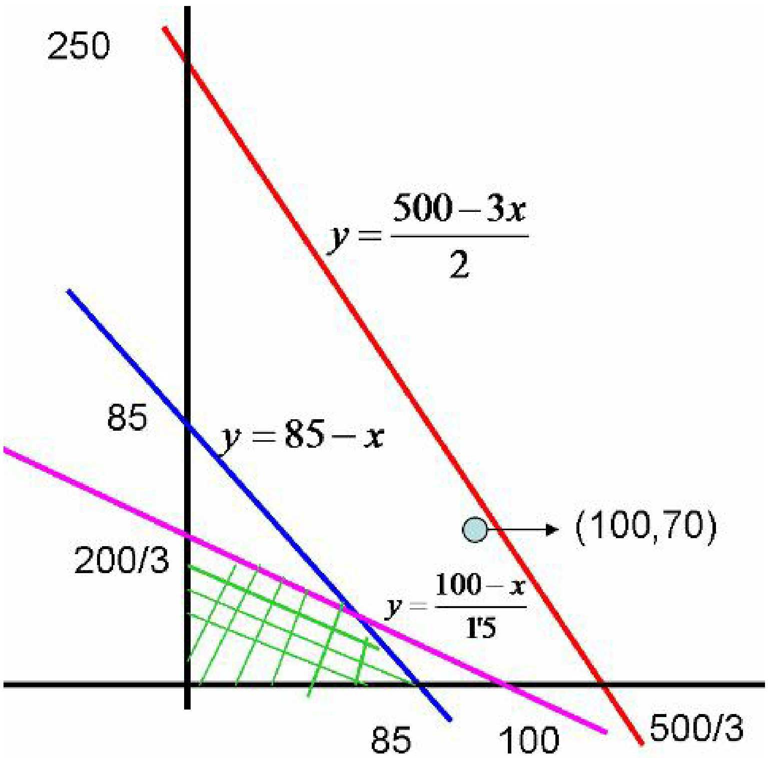
Procedemos ahora a realizar el mismo proceso con las restantes inecuaciones.

La región sombreada en la figura es la unica que satisface todas las inecuaciones del problema. Es decir, los puntos (x,y) de dicha región son las únicas soluciones factibles que la fábrica puede adoptar. Ninguna fabricación que estuviese fuera de esta región sería posible para la empresa.

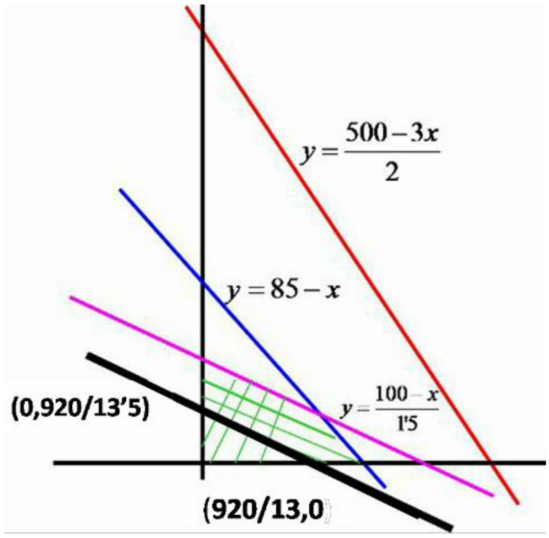
Por ejemplo: Si la fábrica decidiese adoptar la solución (100,70), que se encuentra fuera de la región factible necesitaría:

3.100 + 2.70 = 440 (kg de chocolate)
1.100 + 1'5.70= 205 (Kg de almendra)
1.100 + 1.70= 170 (Kg de frutas)

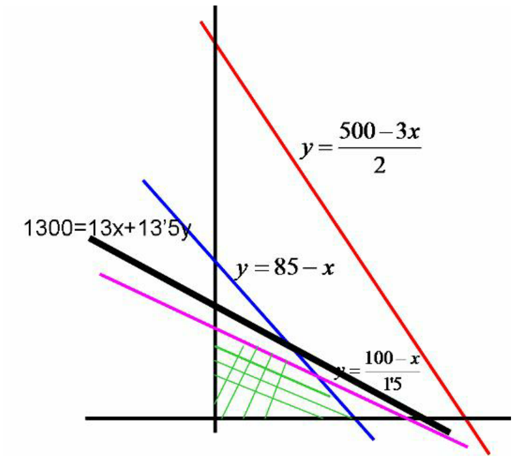
que excede la cantidad de almendra y frutas de las que puede disponer



Hemos pues finalizado la primera fase de nuestro problema: conocer el conjunto de todas las soluciones que se pueden adoptar. Tenemos ahora que decidir cual de estas soluciones hace máxima la función beneficio: **B= 13x + 13'5y**



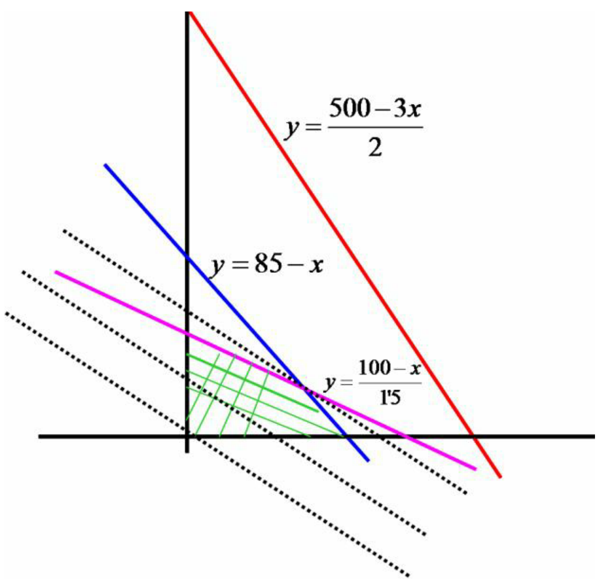
Comenzaremos estudiando como obtener las soluciones que conducen a un beneficio determinado. Por ejemplo: ¿es posible obtener 920 € de beneficio?. La producción (x,y) de cajas de tipo A y B que conduzcan a dicho beneficio han de ser solución de la ecuación 13x+13'5y=920, es decir debe ser un punto perteneciente a la recta que tiene dicha ecuación.
Dibujamos dicha recta:
Para x=0 y= 920/13'5; para y=0 x=920/13
Observamos que un segmento de puntos de la misma se encuentran dentro de la región factible. Si la empresa adopta cualquier producción (x,y) que se corresponda con dicho segmento, su producción sería posible y obtendría 920€ de beneficio.



Consideremos el mismo problema si el beneficio que que quisieramos obtener fuese de 1300 euros. Dibujamos la recta 13x+13'5y=1300.
Para x=0 y=1300/13'5; para y=0 x=1300/13

Observamos que en este caso ningún punto de la recta pertenece a las soluciones factibles de solución, por lo tanto es imposible para la fábrica obtener dicho beneficio.

Generalizando, el conjunto de puntos que conducen a un beneficio determinado B serán los puntos de la recta de ecuación B=13x+13'5y. Para los distintos valores de B dichas rectas son paralelas, verificándose que están más alejadas del origen a medida que B aumenta.



Si queremos obtener el beneficio máximo debemos elegir aquella de las paralelas que, teniendo algún punto en común con la región factible, esté lo más alejada posible del origen de coordenadas.
En nuestro ejemplo esto se verifica en el vértice de la región factible en el que se intersecan las rectas y=85-x e $y=\frac{100-x}{1'5}$.

Resolviendo el sistema formado por dichas ecuaciones $\begin{cases} y = 85 - x \\ y = \dfrac{100 - x}{1'5} \end{cases}$ se obtiene como solución x=55 y=30, que será la producción, de entre las posibles, en la que obtenemos un beneficio máximo.

El ejemplo analizado muestra el procedimiento para resolver de forma gráfica un problema de programación lineal y podría utilizarse independientemente del número de restricciones o desigualdades que concurran y también en caso de que deseemos minimizar la función en lugar de maximizarla.
<u>En todos los casos se verifica que la solución óptima se encontrará en alguno de los vértices del polígono que acota la región factible</u>.

Este último resultado nos permite obtener la solución del problema de forma analítica en lugar de hacerlo gráficamente. En efecto, podemos calcular todos los vértices de la región factible intersecando dos a dos las rectas que la limitan. Posteriormente evaluamos el valor de la función a optimizar en cada uno de esos vértices, escogiendo como solución aquel en el que dicho valor sea máximo o mínimo según lo que nos pidan.

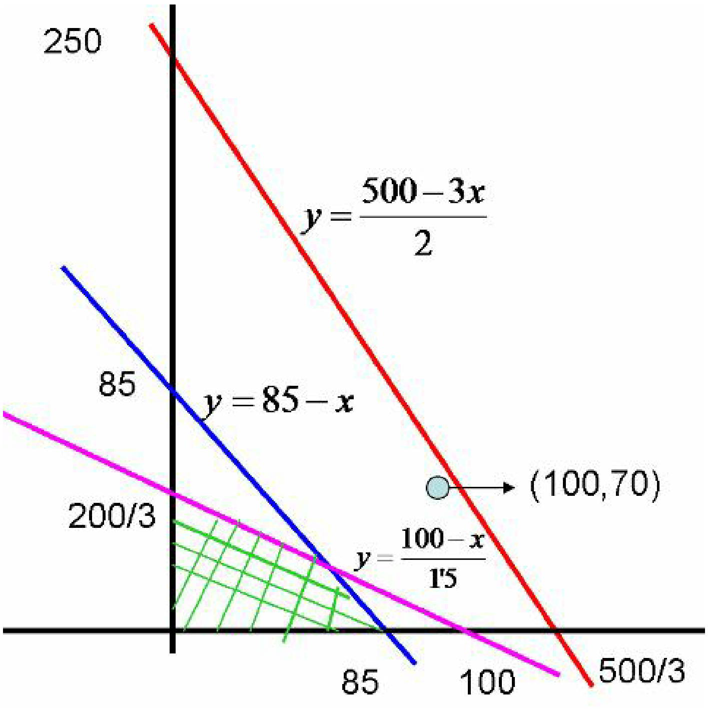
Vamos a realizar de este modo el problema de nuestro ejemplo:
En primer lugar dibujamos la región factible como lo hemos hecho.
Observamos que ésta tiene 4 vértices que se obtendrían intersecando las siguientes rectas:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Solución (0,0)

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{100 - x}{1'5} \end{cases}$ Solución (0, 200/3)

$\begin{cases} y = 0 \\ y = 85 - x \end{cases}$ Solución (85,0)

$\begin{cases} y = \dfrac{100 - x}{1'5} \\ y = 85 - x \end{cases}$ Solución (55,30)



A continuación evaluamos el valor de la función B=13x+13'5y en cada uno de dichos vértices

Si x=0 e y=0⇒ B=0€
Si x=0 e y=200/3 ⇒ B=13'5.200/3=900€
Si x=85 e y=0 ⇒ B=13. 85= 1105€
Si x=55 e y=30⇒ B=13. 55+ 13'5. 30= 1120€
Ello implica que la solución óptima se obtiene para x=55 e y=30. El beneficio máximo obtenido es de 1120€ y le llamaremos valor del programa lineal.

PLANTEAMIENTO GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL. DEFINICIONES

Un problema de programación lineal para dos variables, x e y, consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal z=ax+by, a la que llamamos **función objetivo**, sujeta a un sistema de desigualdades lineales $\begin{cases} a_1x+b_1y \le c_1 \\ a_2x+b_2y \le c_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny \le c_n \end{cases}$ que llamamos **restricciones.**

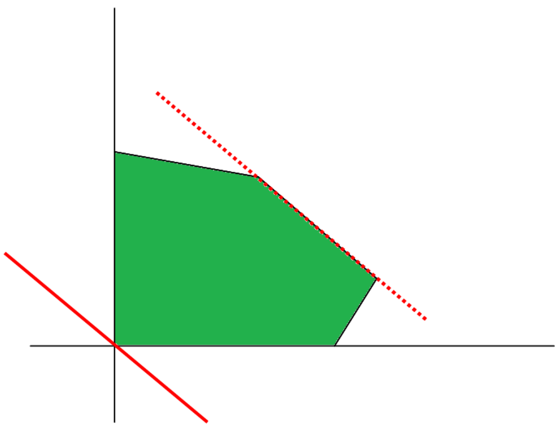
Cada desigualdad lineal de las anteriores determina un semiplano. El conjunto de los puntos que cumplen todas las desigualdades determina una región del plano que recibe el nombre de **región factible**, este recinto puede estar acotado o no. A los puntos de la región factible se les conoce con el nombre de **soluciones factibles**, por cumplir todas las restricciones.

Llamamos **solución óptima** a una solución factible que maximiza o minimiza, según los casos, a la función objetivo, se puede demostrar que si existe una única solución óptima ésta se encuentra en alguno de los vértices de la región factible.
Al valor que toma la función objetivo en dicha solución óptima se le llama **valor del programa lineal**.

Para resolver el problema analíticamente calcularemos las coordenadas de los vértices del recinto y evaluaremos la función objetivo en cada uno de ellos, el vértice en que la función objetivo tome mayor o menor valor, según lo que estemos estudiando, será la solución óptima.

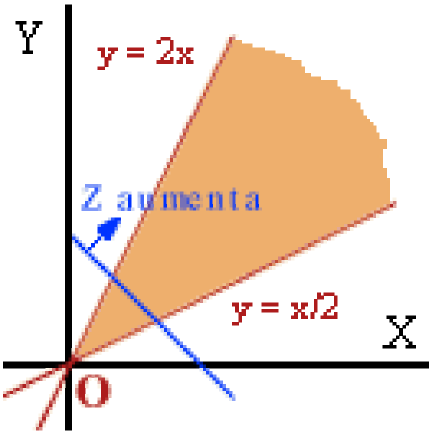
Dado que la función objetivo es de la forma z=ax+by, para cada valor constante de z: z=K representará a una recta. Para los distintos valores de K se obtiene un haz de rectas paralelas a las que llamamos **rectas de nivel asociadas a la función objetivo**. La solución óptima se corresponde con el punto de la región factible que, al mismo tiempo, pertenece a la recta de nivel con mayor o menor ordenada en el origen. Este punto se encuentra siempre en uno de los vértices de la región factible.
Para resolver el problema gráficamente representaremos la región factible y una de las rectas de nivel asociadas a la función objetivo. Moviendo dicha recta de forma paralela encontraremos el vértice de la región factible que constituye la solución óptima.

En caso de que las rectas de nivel sean paralelas a alguno de los lados de la región factible, el problema podría tener infinitas soluciones, siempre que sea en ese lado donde se alcance el máximo o el mínimo.
Supongamos que tenemos un problema cuya región factible y rectas de nivel coinciden con los de la figura. Si debemos maximizar la función objetivo obtendremos infinitas soluciones que coinciden con el lado de la región factible paralelo a las rectas de nivel. Es decir todos los puntos del segmento determinado por los 2 vértices consecutivos de la región factible



Si estamos resolviendo el problema analíticamente nos encontraríamos con que el máximo o el mínimo se obtienen en dos vértices consecutivos de la región factible. Esos dos vértices constituyen los extremos del segmento cuyos puntos constituyen las infinitas soluciones óptimas buscadas.

También es posible que no exista solución óptima si la región factible es una linea poligonal abierta y, por lo tanto, no acotada superior o inferiormente. Si el recinto no tiene cota superior la función objetivo puede crecer indefinidamente y, en consecuencia, no alcanzaría un máximo. Si el recinto no tiene cota inferior, el problema no tiene solución si lo que buscamos es minimizar la función objetivo.



Así por ejemplo, el problema al que representa la figura tendría solución si necesitamos minimizar la función objetivo, pero no lo tendría si deseamos maximizarla ya que ésta se hace tan grande como queramos dentro de las posibilidades de nuestras soluciones factibles.