OBTENER UN MÁXIMO

1. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A y como mínimo 60.000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución: Llamamos **x** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo A e **y** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo B

	inversión	rendimiento
Tipo A	x	0,1x
Tipo B	y	0,08y

La función objetivo es; **F(x, y)= 0,1x+0,08y**

Condiciones que deben cumplirse (restricciones):

$x \geq 0$

$y \geq 0$

R_1 $x + y \leq 210000$

R_2 $x \leq 130000$

R_3 $y \geq 60000$

R_4 $x \leq 2y$

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones para conseguir la región factible (conjunto de puntos que cumplen esas condiciones)

r_1

x	y
0	210000
210000	0

r_2 (paralela a OY)

x	y
130000	0

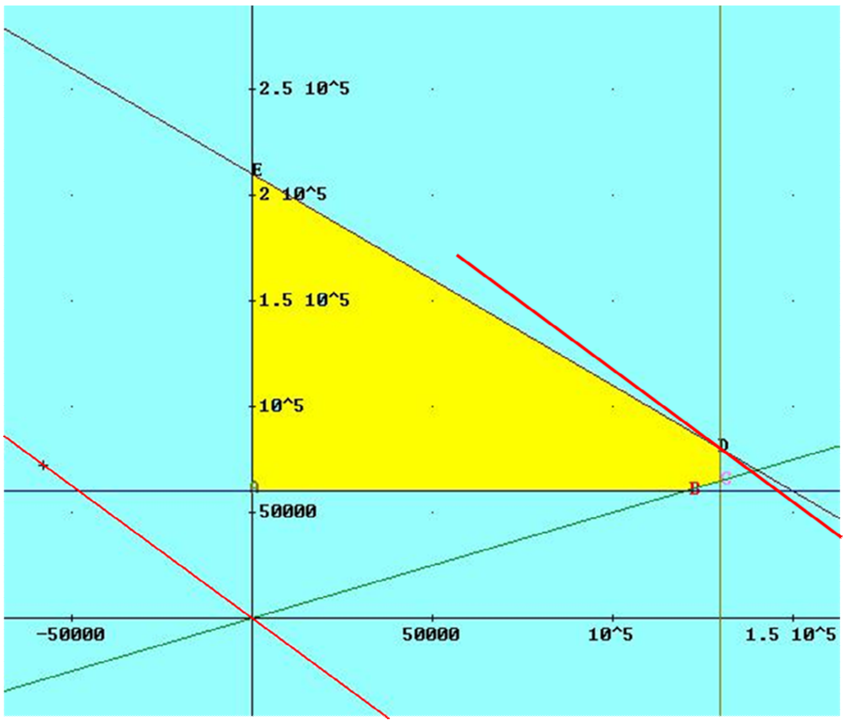
r_3(paralela a OX)

x	y
0	60000

r_4

x	y
0	0
130000	65000

La región factible es la pintada de amarillo, de vértices A, B, C, D y E



Hallamos los vértices intersecando las rectas asociadas a las restricciones dos a dos y obtenemos:

A(0, 60 000),
B(120000, 60000),
C(130000, 65000),
D(130000, 80000)
E(0, 210000)

Si dibujamos la recta F(x, y) =0 (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice mas alejado es el **D, y por tanto es la solución óptima.**
Vamos a comprobarlo analíticamente (es decir comprobar que el **valor máximo de la función objetivo**)
El interés en A sería: **F**(0, 60 000)= **0,1. 0 +0,08. 60 000=4800**

El interés en B sería: **F**(120000, 60000)=**0,1. 120 000 +0,08. 60 000=16 800**

El interés en C sería: **F**(130000, 65000)=**0,1. 130 000 +0,08. 65 000=18 200**

El interés en D sería: **F**(130000, 80000)=**0,1. 130 000 +0,08. 80000=77 000**

El interés en E sería: **F**(0, 210000)=**0,1. 0 +0,08. 210 000=16 800**

Por tanto el máximo se alcanza en el punto D: 130000 euros en acciones de tipo A y 80000 euros en acciones de tipo B

OBTENER UN MÍNIMO EN UNA REGIÓN NO ACOTADA

Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?.
Solución
Organizamos los datos en una tabla:

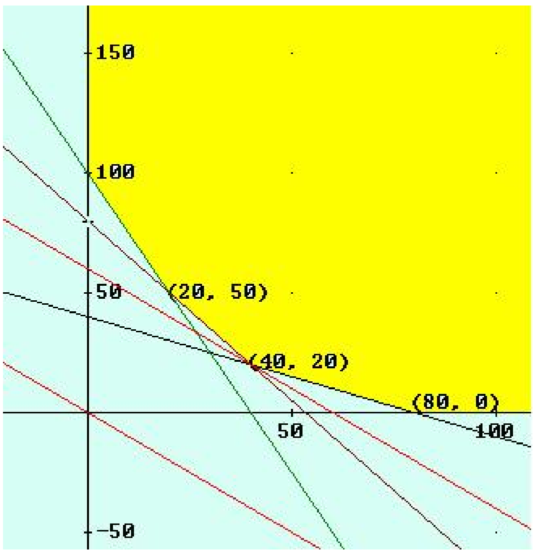
	días	**Alta calidad**	**Calidad media**	**Baja calidad**	**Coste diario**
Mina A	x	1x	3x	5x	2000x
Mina B	y	2y	2y	2y	2000y
		80	160	200	

La función objetivo C(x, y)=2000x + 2000y

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x+2y \geq 80 \\ 3x+2y \geq 160 \\ 5x+2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible la obtenemos dibujando las rectas auxiliares: $r_1 \equiv x + 2y=80$, $r_2 \equiv 3x + 2y= 160$ y $r_3 \equiv 5x + 2y=200$ en el primer cuadrante y considerando la región no acotada que determina el sistema de restricciones:



Los vértices son los puntos A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0), que se encuentran al resolver el sistema que determinan dos a dos las rectas auxiliares y (y que estén dentro de la región factible).
A y D son muy sencillos de calcular, intersección r_1 con el eje OX y r_3 con el eje OY

$r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x+2y=80 \\ 3x+2y=160 \end{cases}$ nos da el punto (40, 20)

$r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 3x+2y=160 \\ 5x+2y=200 \end{cases}$ nos da el punto (20, 50)

$r_1 \cap r_3$ no hace falta calcularlo pues queda fuera de la región factible.

Si dibujamos la recta C(x, y) =0 (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice mas cercano es el **C, y por tanto es la solución óptima.**
Luego la solución es trabajar 40 días en la mina A y 20 en la B. (método gráfico)

Lo comprobamos aplicando el método analítico:
C(0, 100)=2000.100=200000
C(20, 50)=2000.20+2000.50=40000 + 100000= 140000
C(40, 20)= 2000. 40+2000.20=80000 + 40000= 120000 coste mínimo
C(80, 0)= 2000.80 =160000

SOLUCIONES MÚLTIPLES

3. Un fabricante de muebles produce 2 tipos de mesas: clásicas y modernas. Cada mesa de tipo clásico requiere 4 horas de lijado y 3 de barnizado y deja un beneficio de 200 euros. Cada mesa moderna necesita 3 horas de lijado y 4 de barnizado y su beneficio es de 150 euros. Se dispone de 48 horas para lijado y 60 para barnizado. Si no deben de fabricarse más de 9 mesas clásicas ¿cuál es la producción que maximiza el beneficio?

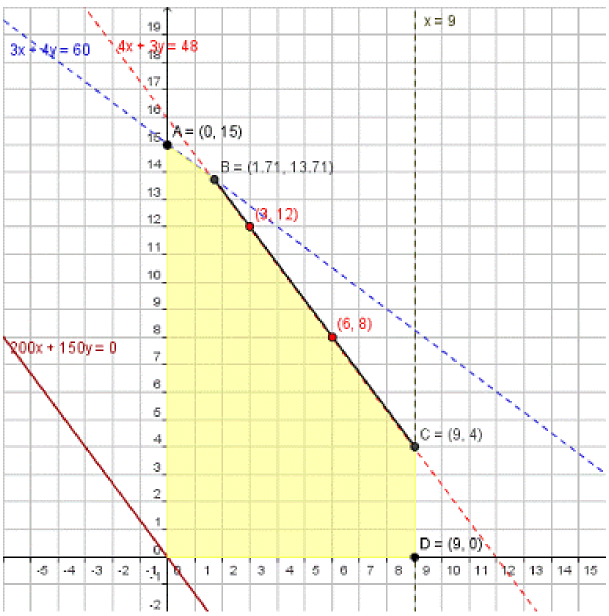
Organizamos los datos:

Optimizar soluciones múltiples			
	Mesa clásica	**Mesa moderna**	**Disponible**
Horas de lijado	4	3	48
Horas de barnizado	3	4	60
Beneficio (€)	200	150	

x = "nº de mesas clásicas"
y = "nº de mesas modernas".

Las restricciones serán $\begin{cases} 4x+3y \le 48 \\ 3x+4y \le 60 \\ 0 \le x \le 9 \\ y \ge 0 \end{cases}$

La función objetivo: B(x,y)=200x+150y
Representamos las restricciones y nombramos los vértices de la región factible



Calculamos los vértices:
A(0,15)

B(48/28, 96/7)

C(9,4)

D(9,0)

O(0,0)

Representamos la recta de nivel 200x+150y=0 (en el gráfico anterior representada en rojo). y la desplazamos, Como las rectas de nivel son paralelas a 4x+3y=48, el máximo se obtendrá en los puntos de esa recta que pertenecen, al mismo tiempo, a la región factible. Es decir, el máximo se alcanzará en cualquier punto del segmento cuyos extremos son B(48/28, 96/7) y C(9,0), esto implica que, en principio, este problema de programación lineal tiene infinitas soluciones.
En este ejercicio sin embargo, tenemos que tener en cuenta que el número de mesas fabricadas tiene que ser un número entero y, por lo tanto, solo nos servirán los puntos del segmento BC que tengan enteras sus dos coordenadas. Como podemos ver gráficamente esto solo ocurre en tres puntos de dicho segmento (9,12); (6,8) y (9,4) que serán los valores reales de fabricación con los que podemos obtener un beneficio máximo.

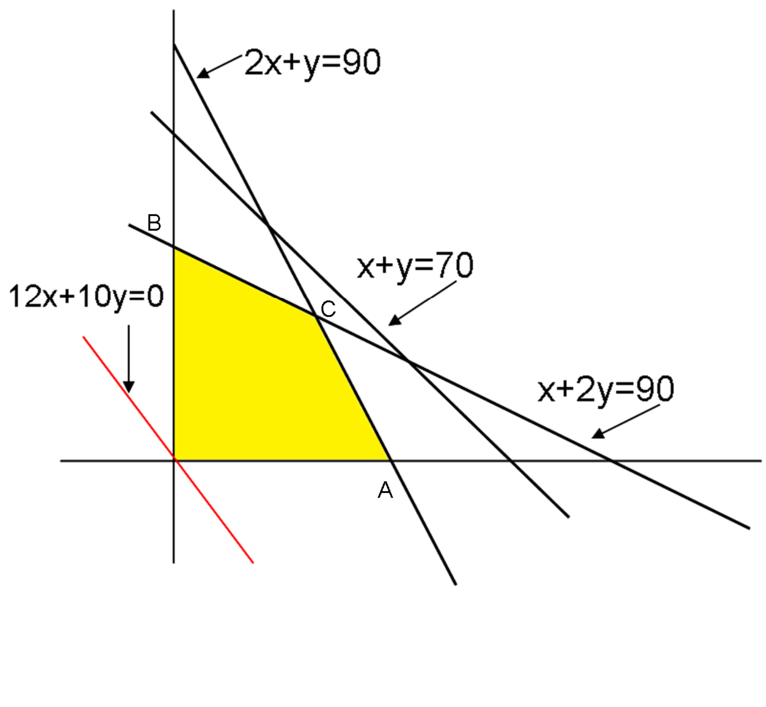
Para realizar el problema analíticamente deberíamos haber evaluado la función objetivo en todos los vértices obteniendo que
B (O)=B(0,0)=0; B(A)=B(0,15)=200.0+150.15=225;
B(B)=B(48/28,96/7)=2400;
B(C)=(9,4)=2400;
B(D)=(9,0)=1800.
Vemos que el beneficio máximo se alcanza en los puntos B y C y, por lo tanto en todos los puntos de dicho segmento. Razonaríamos después igual que lo hemos hecho para decidir que hay únicamente 3 soluciones válidas, aquellas que tienen sus dos coordenadas enteras.

RESTRICCIÓN SUPERFLUA
En la fabricación de piensos se utilizan 3 ingredientes: P, Q y R. Se dispone de 90 toneladas de P, 90 de Q y 70 de R y se desea fabricar dos tipos de pienso M_1 y M_2. Una ración de pienso M_1 requiere 2 toneladas de P, 1 de Q y 1 de R y se vende a 12 €, una ración de M_2 requiere 1 de P, 2 de Q y 1 de R y se vende a 10€ ¿Cuántas raciones de cada pienso debemos fabricar para que el beneficio sea el mayor posible?

Organizamos los datos

	Toneladas P	Toneladas Q	Toneladas R	Precio
M_1	2	1	1	12
M1	1	2	1	10
Disponibilidad	90	90	70	

Sea x la cantidad de raciones que fabricamos del pienso M_1 e y la cantidad de raciones fabricadas de M_2. Entonces, la función objetivo vendrá dada por: B(x,y)=12x+10y



Las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 90 \\ x + 2y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \end{cases}$$

Dibujemos la región factible

Observamos que la restricción x+y=70 es superflua ya que si la eliminásemos del problema, la región factible sería la misma.
Calculamos los vértices: O(0,0), A(45,0), B(0,45) y C(30,30)

Dibujamos las rectas de nivel, en el gráfico en rojo, y observamos que el máximo se obtiene en el punto C(30,30). Por lo tanto deberíamos fabricar 30 unidades del pienso M_1 y 30 del M_2 para obtener el beneficio máximo.

Para realizar el ejercicio por el método analítico deberíamos valorar la función objetivo en cada uno de los vértices:

B(O)=B(0,0)=0

B(A)=B(45,0)=12.45=540€

B(B)=10.45=450€

B(C)=12.30+10.30=660€ máximo