PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

De ordinario se ha considerado como campo propio del estudio científico el de los fenómenos deterministas, caracterizado por situaciones en las que al repetir el experimento en las mismas condiciones se obtiene el mismo resultado. Dentro de estos campos están multitud de fenómenos clásicos estudiados en Física, Química, Astronomía, etc.

Pareció durante siglos que debía quedar fuera del estudio científico todo fenómeno no determinista o aleatorio. Sin embargo, la posición científica actual es completamente diferente. Los fenómenos aleatorios constituyen ya un campo propio y natural del estudio científico.

Una de las propiedades de los sucesos aleatorios es su contingencia, es decir que pueden ocurrir o no ocurrir. A pesar de ello, esta posibilidad de ocurrir o no ocurrir no es la misma para todos los sucesos. Todos estamos acostumbrados a decir con frecuencia que “tal suceso es más posible que tal otro”. Siempre que una característica es comparable se hace necesario encontrar una forma de cuantificarla, es decir de medirla. La probabilidad es precisamente la medida de la posibilidad de que ocurra un determinado suceso aleatorio.

Esta disciplina, bastante reciente, tiene su origen en los juegos de azar. En el siglo XVII Cardano, después de haber desarrollado junto con Tartaglia la combinatoria, comienza a interesarse por problemas sobre juegos de dados. En esa misma época un jugador italiano expresó a Galileo su sorpresa al observar que “al jugar con tres dados a la suma 10 ganaba más veces que si lo hacía a la suma 9” Galileo da la solución correcta al problema y publica un manuscrito sobre el juego de dados.

En la sociedad francesa del siglo XVII, muy aficionada a todo tipo de juegos de azar, el noble “Caballero de Mere” propone al matemático Pascal diversos problemas relacionados con estos juegos, pidiéndole explicaciones sobre algunas contradicciones aparentes entre su razonamiento teórico y las observaciones recogidas por la vía experimental, mediante el juego. Pascal comunica por carta o otro matemático Francés: Fermat, estos problemas y ambos los resuelven por caminos distintos. La correspondencia entre Pascal y Fermat se considera hoy día como el origen de la teoría de la probabilidad.

La primera definición que se conoce del concepto de probabilidad se debe a Laplace en el siglo XIX. Sin embargo, es a lo largo del siglo XX cuando se desarrolla por completo convirtiéndose en una rama más de la matemática formal, Hoy día la teoría de las probabilidades constituye el armazón sobre el que se sostiene la estadística inferencial, permitiendo tomar conclusiones aplicables a toda la población a partir de los datos extraídos de una muestra; es por tanto un instrumento esencial en muchas ciencias aplicadas como: Economía, Medicina, Psicología, Sociología, etc.

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Como ya hemos dicho *llamamos **experimentos deterministas** a aquellos que realizados en las mismas circunstancias se obtiene siempre el mismo resultado.* Así, por ejemplo, son sucesos deterministas dejar caer una piedra desde una altura determinada y observar su aceleración, mezclar en la mismas condiciones y proporciones dos sustancias y observar la mezcla, etc.

*llamaremos **experimento aleatorio** a aquel que, repetido bajo las mismas condiciones iniciales, da lugar a resultados distintos, por lo que no podemos predecir el resultado antes de efectuarlo.* Por ejemplo son experimentos aleatorios; lanzar una moneda al aire, extraer una carta de una baraja, observar el sexo de un recién nacido, comprobar el efecto de un medicamento en un paciente determinado, medir la altura de un grupo de personas, estudiar la profesión de un grupo humano heterogéneo, etc.

Si consideramos varios experimentos aleatorios ejecutados simultáneamente o por etapas, estamos ante un ***experimento aleatorio compuesto***. Por ejemplo: lanzar 3 veces una moneda, lanzar un dado y una moneda, etc

2. ESPACIO MUESTRAL

*Se llama **espacio muestral de un experimento aleatorio** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.* Lo designaremos por E. Por ejemplo:

1. El espacio muestral asociado a tirar una moneda al aire será E={c,x}
2. El espacio muestral asociado a tirar dos monedas al aire será E={(c,c),(c,x),(x,c),(x,x)}
3. El espacio muestral asociado a tirar un dado y una moneda será E= {(1,c),(2,c),(3,c), (4,c), (5,c), (6,c),(1,x),(2,x),(3,x),(4,x),(5,x),(6,x)}

Obsérvese que el número de elementos del espacio muestral de un experimento compuesto es igual al producto del número de elementos de cada uno de los espacios muestrales de los experimentos simples que lo componen. Así en el ejemplo anterior el número de elementos será: 6x2=12.

Ejercicios:

Construye el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos:

A) Hacer 3 extracciones con reemplazamiento de una urna que contiene dos bolas rojas y dos bolas blancas.

B) Número de piezas deectuosas de una caja de 50 piezas

C) Número de ases extraidos al sacar, sin reemplazamiento, 5 cartas de una baraja

D) El mismo experimento del apartado anterior pero efectuado con reemplazamiento.

3. SUCESOS. TIPOS DE SUCESOS

Dado un experimento aleatorio, llamaremos ***suceso*** *a cualquier subconjunto del espacio muestral.* Así, son sucesos correspondientes al experimento tirar un dado: "Salir un cuatro"={4};"salir par"={2,4,6};"salir un número menor que 3"={1,2},etc.

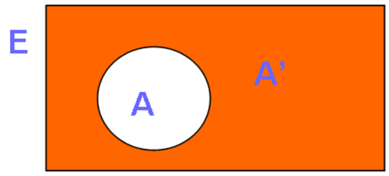
Al conjunto formado por todos los sucesos posibles de un experimento se le denomina ***Espacio de sucesos*** *y se le designa por la letra* Ω

Si el suceso está compuesto por un solo elemento del espacio muestral se llama ***suceso elemental****, en otro caso se llama* ***suceso compuesto*** . Por ejemplo en los ejemplos del párrafo anterior el primero es elemental, los otros dos son compuestos.

Llamamos ***suceso seguro*** *al que siempre se verifica* (es evidente que estará formado por todos los resultados del experimento). Por ejemplo al tirar un dado "salir un número menor que 10"={1,2,3,4,5,6}=E

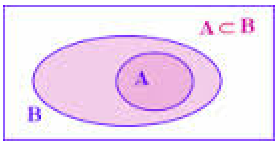
Llamamos ***suceso imposible*** *al que no se verifica nunca*. Por ejemplo "salir un número superior a 6 al lanzar un dado". Se denota por ∅ (y se lee conjunto vacío)

Dado un suceso cualquiera A de un experimento aleatorio, *llamamos* ***suceso contrario o complementario*** *de A al que se verifica si y solo si no se verifica A*, se denota por A' o por $\overline{A}$. Ejemplo en el lanzamiento de un dado el suceso contrario de A="salir un número par"={2,4,6} será A'="salir un número impar"={1,3,5}



4. RELACIÓN DE INCLUSIÓN ENTRE SUCESOS

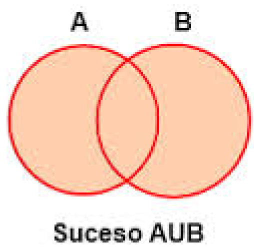
Diremos que un suceso A está incluido en otro suceso B, y se denota A⊂ B, si y solo si la verificación de A supone la verificación de B. Por ejemplo en el experimento de lanzar un dado, sea A="salir un número comprendido entre 1 y 3"={2} y B="salir un número primo={1,2,3,5}, entonces *A⊂B*



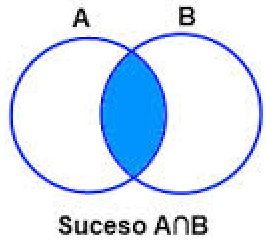
5.OPERACIONES CON SUCESOS. PROPIEDADES

UNIÓN

Si A y B son dos sucesos se define el suceso unión y se representa por , A∪B ***como el suceso que se verifica al hacerlo A o B o ambos a la vez****.* Estará formado por todos los resultados que pertenezcan a A o a B o a ambos. Así por ejemplo si al lanzar un dado A="salir par"={2,4,6} y B="salir un número menor que 4={1,2,3}, entonces A∪B={1,2,3,4,6}



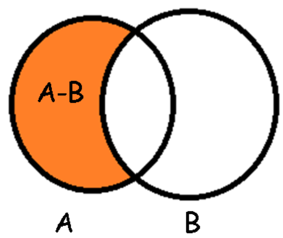
INTERSECCIÓN



Si A y B son dos sucesos, se define el suceso intersección y se representa por A∩B***, como el suceso que se verifica solo si lo hacen simultáneamente A y B,*** estará formado por los resultados que pertenezcan a ambos a la vez. Así por ejemplo si al lanzar un dado A=”salir par”={2,4,6} y B=”salir un número menor que 4={1,2,3}, entonces A∩B ={2}.

*Diremos que dos sucesos son **incompatibles** si* A∩B =∅ Ejemplo: “salir par” y “salir múltiplo de 5”

DIFERENCIA



Si A y B son dos sucesos, se define su diferencia: A-B como el suceso formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B*.* Así por ejemplo si al lanzar un dado A=”salir par”={2,4,6} y B=”salir un número menor que 4={1,2,3}, A-B={4,6}

Ejercicios:

1. Supongamos que entre los habitantes de la Coruña consideramos los sucesos: A: ser hincha del deportivo y B: ser mujer. Describe los siguientes sucesos: A’; B’; A-B; A∪B; A∩ B; (A∪B)’; (A ∩B)’; (A-B)’
2. Consideremos el experimento de lanzar 3 monedas al aire y ver el resutado, sean los sucesos A={sacar más caras que cruces} y B={sacar una o dos cruces}. Describe los siguientes sucesos: A∪B, A∩B; A-B; A’; A∩B’; A’∩B; A-(A∪B)
3. Si los sucesos A, B y C representan: A={llover hoy}; B={llover mañana}; C={llover pasado mañana}

   A) Expresa mediante operaciones con sucesos las siguientes situaciones:

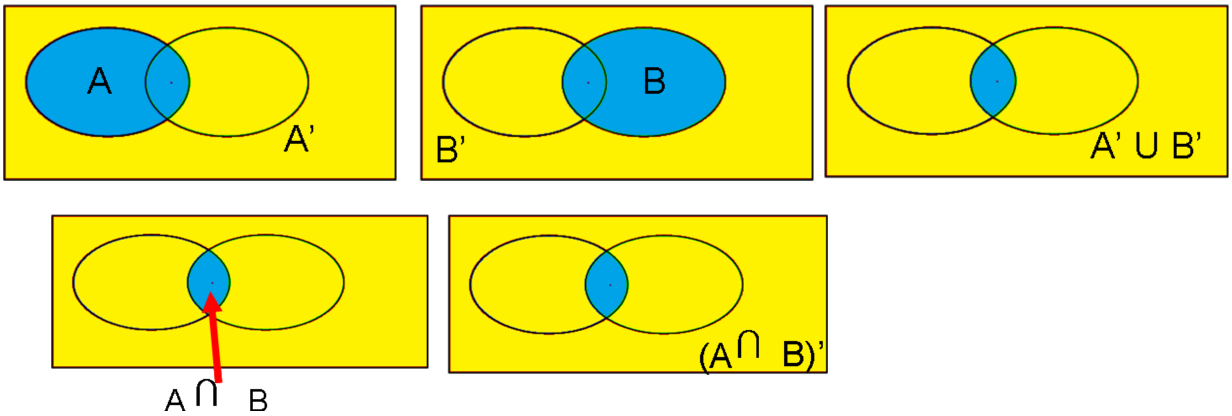
   - LLover al menos uno de los tres días
   - Llover uno solo de los tres días
   - LLover hoy pero no mañana ni pasado mañana
   - No llover ninguno de los tres días
   - LLover como máximo dos de los tres días
   - Llover hoy pero no mañana

   B) Explica el significado de los siguientes sucesos: (A∩B)-C; (A∪B)-C; A ∪ B ∪ C’; (A∩B)∪ (C∩A)

6. PROPIEDADES DE LA UNIÓN Y LA INTERSECCIÓN

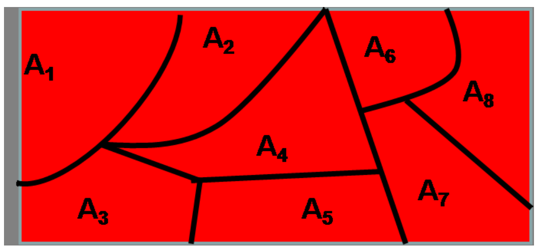
	UNIÓN	INTERSECCIÓN
ASOCIATIVA	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$((A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
CONMUTATIVA	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
IDEMPOTENTE	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
ELEMENTO NEUTRO	$A\cup\varnothing = A$	$A\cap E = A$
SIMPLIFICACIÓN	$A\cup(A\cap B) = A$	$A\cap(A\cup B) = A$
DISTRIBUTIVA	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
LEYES DE MORGAN	$((A\cup B)' = A'\cap B'$	$(A\cap B)' = A'\cup B'$
COMPLEMENTACIÓN	$A\cup A' = E$	$A\cap A' = \varnothing$
ABSORCIÓN	$A\cup E = E$	$A\cap\varnothing = \varnothing$

Ejercicio: Las siguientes figuras demuestran gráficamente la segunda ley de Morgan**,** trata de demostrar de forma similar la 1ª



Ejercicio: consideremos el ejemplo de tirar un dado y una moneda **y** los siguientes sucesos: S_1={salir un nº menor y igual que 3}; S_2={ salir cara}. Halla: $\overline{S_1};\overline{S_2};S_1\cup S_2;S_1\cap S_2$. Comprueba las leyes de Morgan en este ejemplo.

7. SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS



*Diremos que los sucesos $A_1,A_2,.......A_n$ constituyen un **sistema completo de sucesos** para un determinado experimento aleatorio si se verifica:*

1º $A_1\cup A_2\cup .....\cup A_n = E$

2º $A_1, A_2,..........A_n$ son incompatibles dos a dos.

EJEMPLO: En el lanzamiento de un dado, los sucesos A{1,26}; B{3,4} y C{5} forman un sistema completo de sucesos ya que: la unión de todos ellos da el espacio total y tomándolos dos a dos su intersección es vacía. Se comprende que en un experimento puede haber más de un sistema completo de sucesos. Así, en el experimento que estamos tratando otro sistema completo de sucesos sería, por ejemplo, D={1,2,4,5} y E{3,6}. En particular un suceso y su contrario formarían un sistema completo de sucesos. Más adelante veremos la utilización práctica de este concepto.

8. FRECUENCIA RELATIVA DE UN SUCESO. PROPIEDADES

Supongamos que lanzamos 100 veces un dado obteniendo los siguientes resultados:

Suceso	1	2	3	4	5	6
Nº de veces que se verifica	16	17	17	16	15	19

Llamaremos ***frecuencia absoluta de un suceso*** *al número de veces que se verifica en una serie de observaciones.* Ej: F("salir par")=17+16+19=52; F({1})=16

Llamaremos ***frecuencia relativa de un suceso*** *al cociente de su frecuencia absoluta entre el número total de observaciones.* Ej f_r ("salir par")=52/100; fr({1})=16/100

PROPIEDADES

1. Cualquiera que sea el suceso A se verifica que $0 \leq f_r(A) \leq 1$
2. f_r (E)=1
3. Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

   Además de estas propiedades evidentes, se verifican también las siguientes:
4. Si A y B son sucesos cualesquiera se verifica que $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$

   (Pensemos que la $f_r(A \cap B)$ la estamos contando 2 veces, en f_r(A) y en f_r(B), de ahí que tengamos que restarla una vez)
5. F_r (A')=1-f_r(A) (En efecto $A \cup A' = E$ y $A \cap A' = \varnothing$ por lo que aplicando las propiedades 2 y 3 se tiene que $f_r(A \cup A') = f_r(A) + f_r(A') = 1 \Rightarrow f_r(A') = 1 - f_r(A)$)
6. $f_r(\varnothing) = 0$ (ya que $\varnothing$=E', por lo que aplicando la propiedad anterior $f_r(\varnothing) = 1 - f_r(E) = 0$)

9. PROBABILIDAD DE UN SUCESO: LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Las frecuencias relativas de un suceso se obtienen al realizar un experimento un número determinado de veces. Estas frecuencias varían según el número de veces que realizamos el experimento, pero la práctica nos dice que estos valores de las frecuencias relativas tienden a "estabilizarse" alrededor de un valor determinado cuando se hace un número de repeticiones del experimento suficientemente grande. Así, si lanzamos una moneda al aire 20 veces puede ocurrir que la f_r(c)=0'9 y la f_r(x)=0'1, pero la experiencia nos dice que si realizamos muchas veces el experimento ambas tenderán a aproximarse al valor 0'5.

Cuando decimos estabilizarse queremos indicar que la frecuencia relativa del suceso toma valores, por defecto o por exceso, cada vez más próximas a ese valor y que las oscilaciones son tanto más pequeñas cuantas más veces realicemos el experimento. Este límite al que tienden las frecuencias relativas de un suceso lo llamaremos probabilidad de dicho suceso.

Que la frecuencia relativa de cualquier suceso, en cualquier experimento aleatorio, se estabiliza cuando el número de observaciones es suficientemente grande, es una verdad empírica (observada por experimentación), no demostrable matemáticamente pero si reiteradamente comprobada. Su enunciado es el principio básico del azar, conocido como "ley del azar" o "ley de los grandes números", es debido a Bernouilli (1700) y dice así:

"Al realizar repetidamente un experimento aleatorio en condiciones estables, cualquiera que sea el suceso S existe $\lim_{n\to\infty} f_r(S)$***. Al valor de dicho límite se le llama P(S) (probabilidad de S)"***

Por tanto, si se ha realizado un experimento un número suficiente de veces, la frecuencia relativa obtenida puede tomarse como valor aproximado de la probabilidad. A esta definición de probabilidad se le llama definición estocástica. Esta forma de asignar probabilidades tiene un inconveniente de tipo práctico pues, para calcular la probabilidad de un suceso, sería necesario realizar un gran número de pruebas con el fin de obtener experimentalmente el valor al que se aproximan las frecuencias relativas. Por otra parte, de esta forma obtendremos siempre un valor aproximado de la probabilidad y no el valor exacto. Sin embargo, veremos más adelante que en muchas ocasiones es la única forma de asignar probabilidades a los sucesos de un experimento.

10. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

El tratamiento matemático de la probabilidad exige una definición más formal que la que hemos dado. La construcción de una axiomática para el cálculo de probabilidades se debe al matemático ruso Kolmogorov (1903-1987). Su idea es la siguiente:

De lo visto anteriormente se deduce que la probabilidad ha de ser una función que asocie a cada elemento del espacio de sucesos (a cada suceso) de un experimento aleatorio un número real. Y dado que este número es el límite de las frecuencias relativas, las probabilidades deberán verificar las propiedades de estas. Generalizando pues las propiedades de las frecuencias relativas se puede expresar de forma axiomática las condiciones que debe cumplir una función de probabilidad.

Se llama probabilidad *a una función* $P:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$S \longrightarrow P(S)$

que asocia a cada suceso S, del espacio de sucesos Ω, un número real que llamaremos probabilidad de S ,P(S), y que verifica los siguientes axiomas:

1. *La probabilidad de cualquier suceso es positiva o nula* $\forall S \in \Omega \; P(S) \geq 0$
2. *La probabilidad del suceso seguro es igual a 1* $P(E)=1$
3. *La probabilidad dedos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de Ellos.* Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Un espacio de sucesos con una probabilidad definida en él se llama ***espacio de probabilidad.***

PROPIEDADES

De la definición de probabilidad pueden deducirse las siguientes propiedades:

1. P(S')=1-P(S). En efecto, como $S \cup S' = E$ y S y S' son incompatibles, aplicando los axiomas 2 y 3 se tiene: $P(S \cup S') = P(S) + P(S') = 1 \Rightarrow P(S') = 1 - P(S)$
2. $P(\varnothing) = 0$. En efecto, el $\varnothing$ es el complementario de E, por lo que aplicando la propiedad anterior y el axioma 2 se tiene: P($\varnothing$) =1-P(E)01-1=0
3. Si $A \subset$ B$\Rightarrow$ P(A)$\leq$ P(B). En efecto, si $A \subset$ B existe un suceso C tal que $A \cup$ C$= B$ y A$\cap C = \varnothing$; como A y C son incompatibles P(B)=P($A \cup$ C)=P(A)+P(C) y dado que por el axioma 1 P(C)$\leq$ 0, se obtiene que P(A)$\leq$ P(B)
4. $\forall$ S$\in \Omega$ P(S)$\leq$ 1. En efecto, S$\subset$E, por lo que aplicando la propiedad anterior P(S)$\leq$1
5. Para cualquier par e sucesos A y B se verifica que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Para demostrarlo observa en el gráfico como los sucesos A, B y $A \cup B$ pueden escribirse como unión de sucesos incompatibles entre sí:

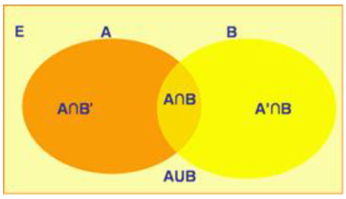
   $A = (A \cap B) \cup (A \cap B'); B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$ y $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

   Podemos por tanto aplicar el axioma 3, obteniendo:

   $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

   $;P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) \Rightarrow P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(A' \cap B).$

   Sustituyendo en la última igualdad los resultados obtenidos para $P(A \cap B')$ y $P(A' \cap B)$, obtenemos

   $P(A \cup B) = (P(A) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) + (P(B) - P(A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Este resultado podría generalizarse para más de dos sucesos.

11. ESPACIO DE PROBABILIDAD DE LAPLACE. DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD.

Es frecuente encontrarnos con experimentos aleatorios en los que los distintos sucesos elementales tienen todos la misma probabilidad de ocurrir. En ese caso, si el espacio muestral está formado por n sucesos elementales la probabilidad de cada uno de ellos valdrá 1/n.

Por ejemplo, si lanzamos un dado corriente el espacio muestral está formado por 6 sucesos E={1,2,3,4,5,6}. Dado que todas las caras tienen la misma probabilidad de salir P(1)=P(2)=......=P(6)=1/6.

Diremos que un espacio de probabilidad es de Laplace si el número de sucesos elementales del experimento aleatorio es finito y todos ellos tienen la misma probabilidad*. En este caso, si el espacio muestral está formado por n sucesos elementales, dado que todos tienen la misma probabilidad esta tendrá el valor 1/n.*

Si en un espacio de Laplace consideramos un suceso cualquiera S, dicho suceso será unión de un número r de sucesos elementales y dado que estos son incompatibles y todos tienen probabilidad 1/n, se verificará que P(S)=1/n+1/n+.......+1/n (r veces)

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado?.

El suceso S=”obtener par”={2,4,6}, luego P(S)=P(2)+P(4)+P(6)=1/6+1/6+1/6=3/6

En definitiva, podemos decir que $P(S)=\frac{N^o \text{ de casos favorables}}{N^o \text{ de casos posibles}}$, entendiendo como casos favorables el nº de sucesos elementales para los cuales se verifica el suceso S y por casos posibles el nº total de sucesos elementales que pueden ocurrir.

Esta relación se conoce con el nombre de Regla de Laplace y fue la primera definición que se ha dado de probabilidad (siglo XIX), por lo que se conoce también con el nombre de definición clásica. Es la de aplicación más sencilla pero solo puede usarse en caso de que todos los sucesos elementales sean equiprobables.

EJEMPLOS:

1. ¿Cuál será la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire se obtenga al menos 1 cara?
   E={(c,c), (c,x), (x,c), (x,x)} luego P(“al menos una cara”)=3/4
2. Se considera el experimento consistente en elegir una carta de una baraja española de 40 cartas. Se pide la probabilidad de los siguientes sucesos: A=”obtener un oro”, B=”obtener un as”, C=”obtener la sota de copas”, D=”obtener un as o un oro”
   P(A)=10/40; P(B)=4/40; P(C)=1/40; P(D)=P(as)+P(oro)-P(as∩oro)=4/40+10/40-1/40=13/40
3. Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados y anotar su suma. Hallar la probabilidad de los sucesos: A=”Suma igual a 11” ; B=”Suma inferior a 7”
   Dado que se trata de un experimento compuesto en el que el espacio muestral de cada uno de los dos experimentos simples que lo componen tiene seis elementos, el espacio compuesto tendrá 6x6=36 elementos (E={(1,1), (1,2),...............(6,6)}
   Para hallar las probabilidades pedidas tendremos que contar el número de casos favorables a los sucesos A y B.
   Los casos favorables para el suceso A son: {(6,5), (5,6)}, por lo que P(A)=2/36
   Para el suceso B los casos favorables son:{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4), (3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)}, luego P(B)=15/36
4. Se sacan 4 cartas de una baraja española ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un as?
   En este caso es más fácil obtener la probabilidad del suceso contrario
   S=”obtener al menos 1 as”; S’=” no obtener ningún as”, P(S)=1-P(S’)
   Nº de casos posibles= 40x39x38x37 Nº de casos favorables a S’=36x35x34x33;

$P(S')=\frac{36x35x34x33}{40x39x38x37}=0,64$; P(S)=1-0,64=0,36

5. Disponemos de dos urnas iguales, cada una con 3 bolas rojas,4 blancas y 3 negras. Sacamos una bola de cada urna, hallar la probabilidad de:

   a) Que las dos bolas sean blancas

   b) Que las dos sean del mismo color

   c) Que una sea blanca y la otra roja

   a) P(B,B)=4/10.4/10; b)P(B,B)+P(R,R)+P(N,N)=4/10.4/10+3/10.3/10+3/10.3/10

   c) P(B,R)+P(R,B)=4/10.3/10+3/10.4/10

6. En una carrera de 6 caballos una persona apuesta a vencedor y segundo, suponiendo que lo hace al azar ¿qué probabilidad tiene de acertar? Casos posibles: 6x5=30 ya que hay 6 caballos que pueden quedar primero y para cada uno de ellos 5 caballos que pueden quedar segundos, casos favorables=1. P(acertar)=1/30

7. Las probabilidades de dos sucesos son: p(A)=1/3; P(B)=2/5; $P(A\cap B)=1/15$. Con estos datos calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   a) Que se cumpla alguno de los sucesos A o B

   b) Que no se cumpla A pero si B

   c) Que se cumpla uno solamente

   d) Que no se cumpla ninguno

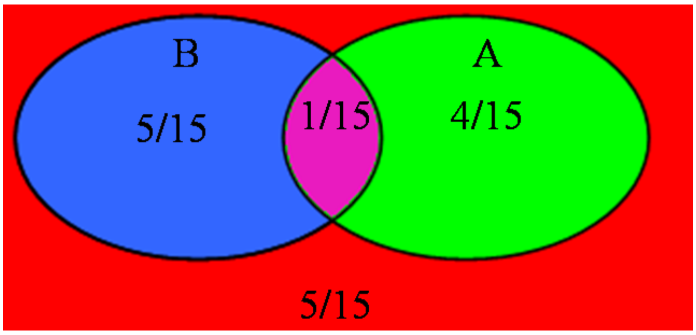
   a) nos piden $P(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1/3+2/5-1/15=10/15$

   b) nos piden $P(A'\cap B)$. Observar que eso será equivalente a que se cumpla el suceso diferencia B-A, lo que quiere decir que se cumple B pero no $A\cap B$. Por tanto,

   $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=2/5-1/15=5/15$

   c) será la probabilidad de que se cumpla alguno menos la de que se cumplan los dos a la vez, esto es: $P(A\cup B)-P(A\cap B)=10/15-1/15=9/15$

   d) nos piden $P(A'\cap B')$. Por las propiedades de los sucesos y de la probabilidad sabemos que $P(A'\cap B')= P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-10/15=5/15$



Otra manera de resolver el ejercicio sería hacer un gráfico que nos ayude a resolverlo. Para ello, calculamos previamente, a través de los datos que nos dan, la probabilidad de cada uno de los sucesos incompatibles que intervienen en el experimento.

8. En un banco hay dos alarmas A y B. En caso de atraco, la probabilidad de que se activen A, B o ambas es: $P(A)=0'75$; $P(B)=0'85$; $P(A\cap B)=0'65$ Calcular la probabilidad de que:

a) se active alguna de las dos; b) se active solo una de ellas; c) no se active ninguna

a) $(A\cup B)= P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'75+0'85-0'65=0'95$

b)$P(A\cup B)-P(A\cap B)=0'95-0'65=0'30$

c)$P(A'\cap B')= P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-0'95=0'05$

9. Se sortea un viaje a Singapur entre los 120 mejores clientes de una empresa de automóviles. De entre ellos 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

a)¿Qué probabilidad hay de que le toque a una mujer soltera?

b)¿Qué probabilidad hay de que le toque a un hombre casado?

c)¿Qué probabilidad hay de que le toque a un hombre soltero?

Solución:

Consideremos los sucesos A="ser mujer", B="estar casado". Nos dan $P(A)=65/120$, $P(B)=80/120$; $P(A\cap B)=45/120$ y nos piden a) $P(A\cap B')$; b) $P(A'\cap B)$; c)$P(A'\cap B')$

Podríamos utilizar las propiedades de la unión e intersección para resolver estas preguntas, pero un método más sencillo es hacer un recuento de datos mediante el empleo de tablas de doble entrada denominadas **tablas de contingencia**. Para rellenar dichas tablas no es preciso que nos den todos los datos pues es posible construirlas completando unas celdas a partir de las otras. Veamos el método aplicándolo al ejercicio:

Tabla 1: Se obtiene de los datos

	Mujeres	Hombres	Total
Casados	45		80
Solteros			
Total	65		120

Tabla 2: Se obtiene completando las celdas

	Mujeres	Hombres	Total
Casados	45	35	80
Solteros	20	20	40
Total	65	55	120

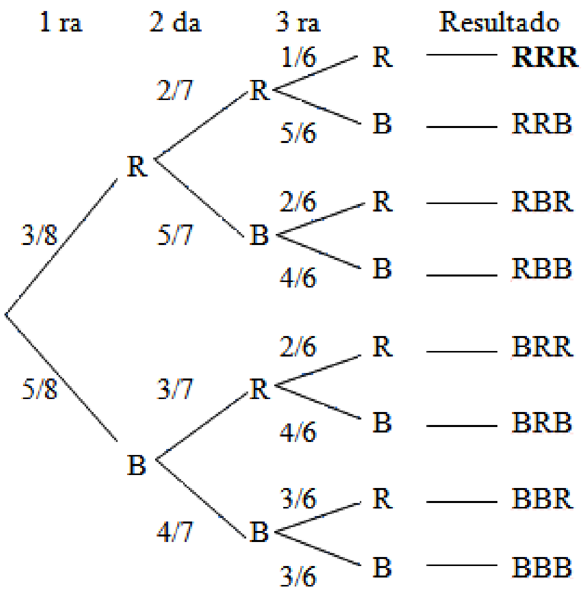
Por tanto a)$P(A\cap B')=20/120$; b)$P(A'\cap B)=35/120$; c)$P(A'\cap B')=20/120$

En las celdas de una tabla de contingencia pueden figurar como en este caso frecuencias absolutas pero también frecuencias relativas, probabilidades o porcentajes. Téngase en cuenta que en el caso de probabilidades o frecuencias relativas el total que figura en la última casilla es igual a 1 y en el caso de porcentajes será igual a 100.

10. De una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 blancas, extraemos tres bolas, sin volver a la urna la bola extraída, calcular la probabilidad de que las 3 bolas extraídas sean: a)Rojas;
b)2 rojas y una blanca; c)Una roja y 2 blancas; d)) 3 blancas

En muchos casos, para ayudarnos a resolver el problema conviene representar un diagrama de árbol del experimento completo, indicando la probabilidad de cada una de sus ramas.

Veamos como hacerlo en este ejemplo y contestemos a las preguntas a partir de el:



a) P(R,R,R)=$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$

b)P(2 rojas y una blanca)= P(RRB)+ +P(RBR)+P(BRR)=$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=$ $\frac{30}{336}+\frac{30}{336}+\frac{30}{336}=\frac{90}{336}$

c)P(1roja y 2 blancas)=P(RBB)+P(BRB)+ +P(BBR)=$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=$ $==\frac{60}{336}+\frac{60}{336}+\frac{60}{336}=\frac{180}{336}$

d) P(BBB)=$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$

Ejercicios propuestos:

1. En una clase de bachillerato al 68% de los alumnos le gustan las matemáticas, al 60% las ciencias y al 54% ambas asignaturas. Se elige un alumno al azar, cuál es la probabilidad d que: a) le gusten las ciencias pero no las matemáticas, b) le gusten las matemáticas pero no las ciencias, c) No le gusten ninguna de las dos asignaturas.
2. Una urna contiene 12 bolas negras y 2 blancas. Se sacan 3 bolas, halla la probabilidad de sacar exactamente 2 blancas y la de sacar al menos 1 blanca, si la extracción se hace: a) con reemplazamiento, b) sin reemplazamiento
3. A un instituto llegan tres periódicos A, B y C. El 30% de los profesores lee A, el 20% B y el 15%C; el 12% lee AyB, el 9% A y C y el 6% B y C. Finalmente el 3% lee A, B y C. Se pide: a) probabilidad de que un profesor lea al menos uno de los periódicos, b) probabilidad de que un profesor lea solo el periódico A, c) probabilidad de que un profesor lea B o C pero no A, d)probabilidad de que un profesor no lea ninguno de los tres.

   Nota: haz previamente un gráfico que te ayude a resolver el ejercicio
4. Se lanza dos veces un dado. Hallar la probabilidad de que: a) ambas caras sean pares; b) la suma de las caras sea un 9
5. Ejercicios página 19: 1-5

12. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Los resultados de una encuesta acerca de la actitud progresista o conservadora realizada entre 334 universitarios de ambos sexos comprendidos entre los 18 y los 22 años, son los siguientes:

	A=”Varones”	A’=”Mujeres”	Total
B=”actitud progresista”	145	42	187
B’=”actitud conservadora”	51	96	147
Total	196	138	334

Consideremos los sucesos: A=”Ser varón”, A’=”Ser mujer”; B=”Tener actitud progresista”; B’=”Tener actitud conservadora”; A⋂B=”Ser varón y tener actitud progresista”

$f_r(A)=196/334$, $f_r(A')=138/334$; $f_r(B)=187/334$, $f_r(B')=147/334$; $f_r(A\cap B)=145/334$

Consideremos ahora una nueva frecuencia relativa, la de aquellos que tienen actitud progresista de entre los varones. Es decir, no nos interesa la proporción de varones progresistas de entre la población total que sería f_r (A⋂B), sino la proporción de progresistas que hay entre los varones, hemos cambiado por tanto la población total a considerar. La nueva población es de 196 varones y de entre ellos tienen actitud progresista 145, por lo que la frecuencia relativa sería de 145/196

Esta nueva frecuencia relativa la representaremos por $f_r(B/A)$ y se denomina frecuencia relativa del suceso B condicionada a que ha ocurrido el sucesoA.

Podemos observar que $f_r(B/A)=145/196$ puede obtenerse del siguiente modo:

$$F_r(B/A)=\frac{f_r(A\cap B)}{f_r(A)}=\frac{145/334}{196/334}=\frac{145}{196}$$

Si tenemos en cuenta que la probabilidad es el límite al que tienden las frecuencias relativas tras una larga serie de observaciones, podemos definir el concepto de probabilidad condicionada del siguiente modo:

Se llama ***probabilidad condicionada del suceso B respecto al suceso A****, y se denota por P(B/A) al cociente:* $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ si $P(A)\neq 0$; análogamente $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si $P(B)\neq 0$

De las dos relaciones anteriores se sigue que: $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$ o bien $P(A\cap B)=P(B).P(A/B)$

Estas fórmulas se conocen con el nombre de ***Ley de las probabilidades compuestas o Ley del producto,*** y permiten hallar la probabilidad de la intersección de dos sucesos cuando es más sencillo hallar la probabilidad condicionada. Veamos algunos **ejemplos:**

1. De una baraja española extraemos dos cartas ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean ases?

   $P(1^a as\cap 2^a as)=P(1^a as).P(2^a as/1^a as)=4/40.3/39$

2. En una empresa el 60% de los trabajadores están casados. Se elige un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea una mujer casada si el 30% de los casados son mujeres?

   Sea A=”Estar casado” y B=”Ser mujer”, nos piden P(A⋂B) y ns dan P(A)=60/100 y P(B/A)=30/100.

   P(A⋂B)=P(A).P(B/A)=60/100.30/100=18/100. La probabilidad pedida es del 18%

13. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. De una baraja española se extrae una carta. ¿cuál es la probabilidad de que sea un rey sabiendo que ha sido una figura?

   Sea A=”Obtener rey” y B=”Obtener figura”, P(A/B)=$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$=$\frac{4/40}{12/40} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   Obsérvese que P(A/B) $\neq P(A) = 4/40 \neq 1/3$

2. Se considera el experimento de lanzar dos veces consecutivas un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un seis en el segundo lanzamiento sabiendo que se ha obtenido un 2 en l primero?

   Sea A=”Obtener un seis en el 2º lanzamiento” y B=”Obtener un 2 en el primer lanzamiento”

   P(A/B)=$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$=$\frac{1/36}{1/6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Obsérvese que en este caso P(A/B)=P(A)=1/6

En los dos ejemplos anteriores hemos visto que en algunas ocasiones P(A/B)=P(A) y en otras son distintas. Es decir, el hecho de que se haya verificado el suceso B en nos casos modifica la probabilidad del suceso A y en otros no. Si el hecho de que sepamos que ha ocurrido B modifica la probabilidad de que ocurra A los sucesos se llaman <u>dependientes</u>, en caso contrario se llaman <u>independientes</u>

Dos sucesos A y B son independientes si se verifica que P(A/B)=P(A)

Dos sucesos A y B son dependientes si se verifica que P(A/B) ≠ P(A)

14. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN. REGLA DEL PRODUCTO

Como ya hemos dicho antes de la definición de probabilidad condicionada se sigue que:

P(A∩B)=P(A).P(B/A). Esta igualdad se conoce con el nombre de Regla del producto. Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de sucesos dependientes e independientes deducimos que para calcular la probabilidad de la intersección se deben distinguir dos casos diferentes:

A) Probabilidad de la intersección de sucesos independientes P(A∩B)=P(A).P(B/A).=P(A).P(B)

B)Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes P(A∩B)=P(A).P(B/A) ≠ P(A).P(B)

Esta regla podría generalizarse para calcular la probabilidad de la intersección de más de dos sucesos, por ejemplo para la intersección de tres obtendríamos:

P(A∩B∩C)=P(A).P(B/A).P(C/A∩B) si son sucesos dependientes

P(A∩B∩C)=P(A).P(B).P(C) si son sucesos independientes

Ejemplos:

1. Hallar la probabilidad de obtener cuatro caras al lanzar 4 veces una moneda.

   Los resultados de cada lanzamiento no afectan a los siguientes, por tanto P(c,c,c,c)=1/2.1/2.1/2.1/2

2. En un examen de sociología un alumno ha estudiado 15 de los 25 temas que contiene el temario. El examen consiste en contestar dos temas extraídos al azar. ¿que probabilidad hay de que ambos temas sean de los que el alumno estudió?.

   En este caso la extracción del primer tema varía la probabilidad de la extracción del 2º por lo que los sucesos son dependientes.

   P(saber1º∩saber2º)=P(saber1º).P(saber2º/saber1º)=15/25.14/24=0,35

3. En una urna hay 3 bolas blancas y 5 negras. Se sacan dos bolas al azar, qué probabilidad hay de que una se blanca y otra negra si se hace la extracción a) con reemplazamiento, b) sin reemplazamiento

   A) Los sucesos son independientes.

   P("una blanca y otra negra")=P(B,N)+P(N,B)=3/8.5/8+5/8.3/8=30/64=15/32

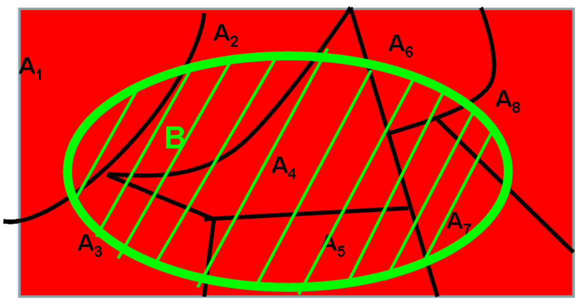
   B) Los sucesos son dependientes

   P("una blanca y otra negra")=P(B,N)+P(N,B)=3/8.5/7+5/8.3/7=30/56=15/28

NOTA: en los ejercicios en que intervengan probabilidades condicionadas puede ser muy práctico organizar previamente la información mediante tablas de contingencia, diagramas de árbol o de otros tipos.

15. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Supongamos que en cierto experimento el espacio muestral puede descomponerse mediante un sistema completo de sucesos A_1, A_2,......A_n (recordemos que para ser un sistema completo de sucesos debe ocurrir que sean incompatibles dos a dos y que su unión de el espacio muestral)



Consideremos ahora un suceso B que contenga elementos de algunos (o todos) los sucesos A_i

Evidentemente se verificará que B= (B∩A_1)∪ (B∩A_2)∪...........∪(B∩A_n) y como los sucesos B∩A_i son incompatibles dos a dos, se verifica que: **P(B)= P(B∩A_1)+P (B∩A_2)+...........+P(B∩A_n)**

Aplicando la regla del producto P(**B**∩A_i)=P(A_i).P(B/A_i) a cada una de esas intersecciones se llega a la fórmula**: P(B)=P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+.................+P(A_n).P(B/A_n)**

EJEMPLOS

1.En cierta población un 20% de sus miembros trabaja en agricultura (A), un 25% en industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63% de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38% y del 44% en los otros dos sectores. Seleccionado un trabajador al azar, ¿que probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?.

Solución: Llamemos B al suceso {tener más de 45 años}. Nos estan pidiedo P(B')=1-P(B)

Dado que A, I y S forman un sistema completo de sucesos (al ser incompatibles dos a dos y dar su unión toda la población), se verifica que:P(B)=P(A):P(B/A)+P(I).P(B/I)+P(S):P(B/S)=

$=\frac{20}{100}\cdot\frac{63}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{38}{100}+\frac{55}{100}\cdot\frac{44}{100}=\frac{4630}{10000}=0'463$ Esta es la probabilidad de que el trabajador tenga más de 45 años, por tanto la probabilidad de que tenga menos será P(B')=1-P(B)=1-0'463=0'537

2. El 63% de los alumnos de bachillerato de un instituto cursan el primer curso y el resto el segundo. En 1º, el porcentaje de mujeres es del 65% y en segundo del 53%. Elegido un alumno al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea varón?

Solución

Sea P={cursar 1º de Bachillerato} y S={ cursar segundo}, los sucesos P y S constituyen un sistema completo de sucesos con P(P)=$\frac{63}{100}$ y P(S)=$\frac{37}{100}$

Consideremos ahora el suceso V={ser varón}, sabemos que P(V/P)=$\frac{35}{100}$ y P(V/S)=$\frac{47}{100}$

Por tanto, P(V)=P(P).P(V/P)+P(S):P(V/S)=$\frac{63}{100}\cdot\frac{35}{100}+\frac{37}{100}\cdot\frac{47}{100}=\frac{3944}{10000}=0'3944$

3. En un instituto se va a realizar una excursión de esquí con dos autobuses, uno grande y otro pequeño. Las dos terceras partes de los alumnos apuntados a la excursión irán en el autobús grande y el resto en el pequeño. Se sabe que todos los alumnos que viajarán en el autobús pequeño saben esquiar, mientras que el 40% de los alumnos que viajan en el grande no saben. Si se escoge un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sepa esquiar?

Solución: Los sucesos P={viajar en el pequeño} y G={viajar en el grande} constituyen un sistema completo de sucesos. P(P)=1/3 y P(G)=2/3.

Consideremos el suceso E={saber esquiar}, sabemos que P(E/P)=1 y P(E/G)=60/100=0'6

En consecuencia, P(E)=P(P).P(E/P)+P(G).P(E/G)=$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{60}{100}=\frac{220}{300}=0'7\widehat{3}$

16. TEOREMA DE BAYES

El teorema de la probabilidad total nos permite calcular la probabilidad de que un suceso se cumpla en la población total conociendo de antemano las probabilidades de que se cumpla en los diversos estratos en que está dividida dicha población. Por ejemplo, en el ejercicio 3 calculamos la probabilidad de que un alumno de la excursión supiese esquiar conociendo de antemano la probabilidad de saber esquiar en cada uno de los dos autobuses en que se divide la excursión.

El teorema de Bayes va a resolver el problema contrario: suponiendo que el suceso se cumple ¿cuál es la probabilidad de que el individuo proceda de un determinado estrato de la población?. Supongamos que en nuestro ejemplo hemos elegido un alumno y resulta que sabe esquiar, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en el autobús pequeño?. Es decir queremos calcular P(P/E)

Por definición $P(P/E)=\dfrac{P(P\cap E)}{P(E)}$; por otra parte $P(P\cap E)=P(P).P(E/P)$,por lo tanto

$$P(P/E)=\frac{P(P).P(E/P)}{P(E)}=\frac{P(P).P(E/P)}{P(P).P(E/P)+P(G).P(E/G)}=\frac{1/3}{220/300}=\frac{10}{22}$$

Obsérvese que hemos utilizado el teorema de las probabilidades totales para hallar la probabilidad del denominador

De forma general podemos enunciar el teorema de Bayes de la siguiente forma:

Supongamos que en un experimento el espacio muestral puede descomponerse mediante un sistema completo de sucesos A_1, A_2,......A_n y sea B un suceso que contenga elementos de algunos (o todos) los sucesos A_i. Se verifica entonces que

$$\mathbf{P(A_i/B)}=\frac{\mathbf{P(A_i).P(B/A_i)}}{\mathbf{P(B)}}=\frac{\mathbf{P(A_i).P(B/A_i)}}{\mathbf{P(A_1).P(B/A_1)+P(A_2).P(B/A_2)+..................+P(An).P(B/An)}}$$

Ejemplos

1. En cierta población un 20% de sus miembros trabaja en agricultura (A), un 25% en industria (I) y el resto en el sector servicios (S). Un 63% de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38% y del 44% en los otros dos sectores. Elegida una persona al azar resulta tener más de 45 años, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del sector industria?

Solución: Llamemos B al suceso {tener más de 45 años}, sabemos que P(B/A)=63/100; P(B/I)=38/100 y P(B/S)=44/100 y nos piden P(I/B)

$$P(I/B)=\frac{P(I).P(B/I)}{P(B)}=\frac{P(I).P(B/I)}{P(A).P(B/A)+P(I).P(B/I)+P(S):P(B/S)}=$$

$$=\frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{38}{100}}{\frac{20}{100}\cdot\frac{63}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{38}{100}+\frac{55}{100}\cdot\frac{44}{100}}=\frac{950}{4630}$$

2. El 63% de los alumnos de bachillerato de un instituto cursan el primer curso y el resto el segundo. En 1º, el porcentaje de mujeres es del 65% y en segundo del 53%. Elegido un alumno al azar resulta ser varón, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en segundo?

Sea P={cursar 1º de Bachillerato} y S={ cursar segundo}, $P(P)=\frac{63}{100}$ y $P(S)=\frac{37}{100}$

Consideremos ahora el suceso V={ser varón}, sabemos que $P(V/P)=\frac{35}{100}$ y $P(V/S)=\frac{47}{100}$. Nos piden

$$P(S/V)=\frac{P(S).P(V/S)}{P(V)}=\frac{P(S).P(V/S)}{P(P).P(V/P)+P(S).P(V/S)}=\frac{\frac{37}{100}\cdot\frac{47}{100}}{\frac{63}{100}\cdot\frac{35}{100}+\frac{37}{100}\cdot\frac{47}{100}}=\frac{1739}{3944}$$

3. Tenemos una urna con 4 bolas blancas y seis bolas rojas. Extraemos una bola y, sin reemplazarla, extraemos una segunda. Sabiendo que la segunda bola ha sido roja ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Solución: Consideremos los sucesos B1={salir blanca la primera bola} y R1={salir roja la primera bola} P(B1)=4/10 y P(R1)=6/10; Consideremos ahora el suceso R2={salir roja la segunda bola}

Es fácil calcular P(R2/B1}=6/9 y P(R2/R1)=5/9; Nos piden P(B1/R2)

$$P(B1/R2)=\frac{P(B1).P(R2/B1)}{P(R2)}=\frac{P(B1).P(R2/B1)}{P(B1).P(R2/B1)+P(R1).P(R2/R1)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}}=\frac{24}{54}$$

17. PROBABILIDAD EXPERIMENTAL. PROBABILIDAD A PRIORI Y A POSTERIORI.

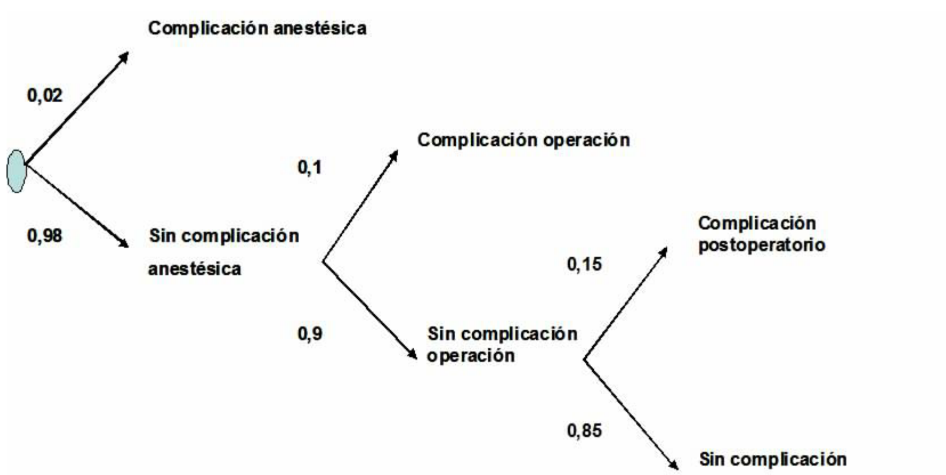
El experimento de lanzar un dado constituye un espacio de Laplace ya que la probabilidad de cada suceso elemental es la misma. Resulta por lo tanto muy sencillo asignar a cada suceso elemental una probabilidad que en este caso sería de 1/6. A estas probabilidades que pueden determinarse de antemano, sin realizar ningún tipo de comprobación experimental, se les denomina probabilidades a priori.

Sin embargo, no siempre es posible establecer a priori la probabilidad de los sucesos elementales, en estos casos asignaremos la probabilidad mediante la experimentación, simulación o estimación. A este tipo de probabilidades se les llama experimentales o a posteriori. Este método es el empleado por ejemplo para calcular las tasas de natalidad, defunción, expectativa de éxito de un determinado producto comercial, estudio de la audiencia de un programa televisivo, posibilidades de éxito de un determinado fármaco o escaños previsibles para cada partido antes de unas elecciones.

Ejemplo:

Un cirujano especialista en trasplantes de corazón, estima tras muchos años de profesión que la probabilidad de que un paciente sufra una grave complicación ante la administración de la anestesia es de 0,02. La probabilidad de que se produzcan otro tipo de complicaciones durante la operación es de 0,1 y la de que se produzca en la fase de recuperación por problemas de rechazo es de 0,15. Hallar la probabilidad de que un paciente determinado no tenga complicaciones.

Realizamos en primer lugar el diagrama de árbol del experinto:



P(no sufrir complicación)=0’98.0,9.0,85=0,7497

EJERCICIOS (RESUELTOS AL FINALIZAR EL ENUNCIADO)

1. En una urna hay 10 bolas blancas, 8 negras y 6 rojas. Se sacan 7 bolas devolviéndolas a la urna cada vez, hallar la probabilidad de obtener primero 3 blancas, luego 2 negras y al final 2 rojas.
2. De una baraja española se extren 5 cartas ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo palo?
3. En una urna hay 10 bolas numeradas del 0 al 9,si se sacan de una en una ¿cuál es la probabilidad de que no salgan en orden correlativo?
4. Una urna U_1 contiene 10 bolas blancas y 20 negras, otra urna U_2 contiene 8 blancas y 6 negras. Se extren al azar 2 bolas de U_1 y se introducen en U_2 ¿cuál es la probabilidad de extraer una bola negra de U_2 despues de haber introducido las de U_1?
5. Si $E=\{a_1, a_2, a_3\}$ es un espacio muestral ¿cuales de las siguientes funciones definidas en él son de probabilidad?

   a) $P(a_1)=1/4$, $P(a_2)=1/3$, $P(a_3)=1/2$

   b) $P(a_1)=2/3$, $P(a_2)=-1/3$, $P(a_3)=2/3$

   c) $P(a_1)=1/6$, $P(a_2)=1/3$, $P(a_3)=1/2$

   d) $P(a_1)=0$, $P(a_2)=1/3$, $P(a_3)=2/3$
6. En una ciudad el 40% de la población tiene el cabello castaño, el 25% los ojos castaños y el 15% el cabello y los ojos castaños. Se escoge una persona al azar: a) Si tiene el cabello castaño ¿cuál es la probabilidad de que también tenga los ojos castaños?, b) Si tiene los ojos castaños ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?, c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabello ni ojos castaños?
7. En una facultad el 25% de los varones y el 10% de las mujeres son estudiantes de matemáticas, constituyendo las mujeres el 60% de todos los estudiantes. Si se selecciona un estudiante al azar y resulta ser de matemáticas ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
8. Una caja contiene 5 tubo de radio de los que 2 son defectuosos. Se prueban los tubos uno tras otro hsta encontrar los 2 defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que se suspenda el proceso en la 2ª prueba? ¿ y en la tercera?
9. Un tirador da en el blanco con una probabilidad de 0,4. Si dispara 4 veces hallar la probabilidad de que: a) de en el blanco exactamente 2 veces, b)de en el blanco al menos 1 vez
10. A una oposición concurren hombres y mujeres en la proporción de 4 a 5. La probabilidad de que apruebe un hombre es de 0,75 y la de que lo haga una mujer es de 0,8. Se sabe que un opositor ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
11. Un producto está compuesto de tres partes a,b y c. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de defecto en la parte a es de 0,03, en la parte b de 0,04 y en la parte c de 0,08 ¿cuál es la probabilidad de que al finalizar el proceso el producto no sea defectuoso?

12. En un centro de enseñanza los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés, escogiendo el inglés el 90% delos alumnos. Sabiendo que el 30% de los que estudian inglés y el 40% de los que estudian francés son chicos ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar resulte ser mujer?
13. Ante un examen un alumno ha estudiado 15 de los 25 temas de la materia. Si el examen consiste en extraer dos temas al azar de los que el alumno tiene que escoger uno para exponer ¿cuál es la probabilidad de que el alumno peda elegir al menos uno de los temas que ha estudiado?
14. Una caja contiene tres monedas. Una es corriente, la segunda tiene dos caras y la tercera está trucada de modo que la probabilidad de que salga cara es de 1/6. Se selecciona una moneda al azar y se tira al aire ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?
15. Dos profesores A y B comparten un número de teléfono. De Las llamadas que llegan 2/5 son para A. Sus ocupaciones les alejan del teléfono de forma que A está fuera el 50% de las veces que suena el teléfono y B el 25%. Calcula la probabilidad de que cuando suena el teléfono no estén ninguno de los dos para responderlo y la probabilidad, para cada uno de los profesores, de que esté presente cuando lo llaman.
16. Un relojero compra relojes a dos casas proveedoras. La 1ª le suministra el 60% de los relojes de los que el 0,4% son defectuosos, la 2ª le proporciona el reso siendo defectuosos el 1’5%. Un día el relojero observa que un reloj no funciona ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la 1ª casa proveedora?
17. Dos medicamentos A y B son eficaces para tratar cierta enfermedad. El medicamento A produce mejoría en el 78% de los casos mientras que el Blo hace en un 83%. Un laboratorio tiene 3 tubos que contienen el medicamento A y 2 que contienen el B. Si se elige un tubo al azar y se administra a un enfermo a) ¿cuál es la probabilidad de que este mejore? B) si el enfermo mejora ¿cuál es la probabilidad de que se le haya adminstrado el medicamento A? ¿y el B?
18. En una clase el 40% de los alumnos aprobaron filosofía y el 50% matemáticas. Se sabe que la probabilidad de aprobar filosofía si aprobó matemáticas es de 0,6. A) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobó ambas materias? B) De los alumnos que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobaron las matemáticas?
19. Juany Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan de en el blanco es de 1/3 y la de que lo haga Pedro de ¼. Supóngase que Uan lanza primero y que los dos se turnan para lanzar a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer lanzamiento que de en el blanco sea el

2º de Juan?, b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan de en el blanco antes de que lo haga Pedro?

20. Un 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. Sabiendo que el 75% delos ingenieros y el 50% de los economistan ocupan cargos directivos, mientras que solo el 20% del resto del personal es directivo, calcular la probabilidad de que un directivo elegido al azar sea ingeniero.
21. En un instituto de 400 alumnos se realiza una encuesta resultando que 180 de los estudiantes manifiestan que les gusta el futbol. Se comprueba que hay 80 chicos a los que no les gusta el futbol y que el 60% de los estudiantes son chicas. Elegido un estudiante al azar, hallar la probabilidad de que: a) sea mujer y le guste el futbol, b) guándole el futbol sea mujer. ¿Son los sucesos "ser mujer" y "gustar el futbol" independietes? ¿e incompatibles?

SOLUCIONES EJERCICIOS PROBABILIDAD

1. P(B,B,B,N,N,R,R)=$\frac{10}{24}\frac{10}{24}\frac{10}{24}\frac{8}{24}\frac{8}{24}\frac{6}{24}\frac{6}{24}$(son sucesos independientes)
2. P(5 cartas del mismo palo)=P(5oros)+P(5bastos)+P(5espadas)+P(5copas)

   P(5 oros)=$\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{7}{37}\frac{6}{36}$ y dado que, por el mismo razonamiento, la probabilidad de 5 cartas de cualquier otro palo sería la misma, obtenemos que P(5 cartas del mismo palo)=4.$\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{7}{37}\frac{6}{36}$
3. P(no salgan en orden correlativo)=1-P(salgan en orden correlativo)=1-($\frac{1}{10}\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}$) (Sucesos dependientes)
4. U_1={10B,20N}, U_2={8B,6N}. Queremos extraer una bola negra de U_2 despues de introducir las dos de U_1. Los sucesos que nos sirven son por lo tanto: (B,B,N), (B,N,N), (N,B,N) y (N,N,N), como todos ellos son incompatibles la probabilidad pedida será la suma de las probabilidades de los sucesos mencionados:

   P(negra U_2)=P(B,B,N)+P(B,N,N)+P(N,B,N)+P(N.N.N)=$\frac{10}{30}\frac{9}{29}\frac{6}{16}+\frac{10}{30}\frac{20}{29}\frac{7}{16}+\frac{20}{30}\frac{10}{29}\frac{7}{16}+\frac{20}{30}\frac{19}{29}\frac{8}{16}$
5. a) no es función de proabilidad pues Pa_1)+P(a_2)+P(a_3)=13/12>1

   b) No es función de probabilidad pues p(a_2)=-1/3<0

   c) y d) si son funciones de probabilidad al verificar los 3 axiomas.
6. A="tenerr cabello cataño), B="tener ojos castaños"

	A	A'	Total
B	15	10	25
B'	25	50	75
Total	40	60	100

   a)P(B/A)=15/40; b)P(A'/B)=10/25; c)P(A'∩B')=50/100
7. A="ser mujer", B="Estudiar matemáticas

   Conocemos P(A)=60/100=0,6; P(A')=0,4 P(B/A)=10/100=0,1; P(B/A')=25/100=0,25

   Podemos por lo tanto hallar P(A,B)=P(A).P(B/A)=0,6. 0,1=0,06

También podemos calcular P(A’,B)=P(A’):P(B/A’)=0,4.0,25=0,1

Construimos ahora la tabla de contingencia de las probabilidades

	B	B’	Total
A	0,06	0,54	0,6
A’	0,1	0,3	0,4
Total	0,16	0,84	1

P(A/B)=$\frac{0,06}{0,16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

8. 5 tubos: 2 defectuososD y 3 no defectuososD’

   a) para que se suspenda en la segunda prueba han de salir los defectuosos en las dos primeras pruebas. Es decir buscamos P(D,D)=2/5.1/4=2/20=1/10=0,1 (son sucesos depenientes)

   b) Para que se suspenda en la tercera prueba el 2º defectuoso tiene que salir en esta, pudiendo salir el 1º el la 1ª prueba o en la segunda. Por tanto:

   P(suspenda 3ª)=P(D, D’,D)+P(D’DD)=2/5.3/4.1/3+ 3/5.2/4.1/3

9. A”Dar en el blanco” P(A)=0,4; P(A’)=0,6

   A) P(2 veces en el blanco)=$C_{4,2}$.0,6.0,6.0,4.0,4 Ya que tenemos que elegir primero los dos lugares en los que dará en el blanco de entre los 4 posibles, siendo la probabilidad de los dos que da en el blanco de 0,4 y la de los dos que no da en el blanco de 0,6

   B) P(dar en el blanco al menos unavez)=1-P(no dar en el blanco ninguna vez)=1- $0,6^4$

10. A=”ser mujer”, B=”aprobar” 4 hombres, 5 mujeres, aprueban el 80% de las mujeres es decir 5.80/100=4 y el 75% de los hombres es decir 4.75/100=3. Costruimos la tabla de contingencia

	B	B’	Total
A	4	1	5
A’	3	1	4
Total	7	2	9

P(A/B)=4/7

11. Sea D_A=”ser defectuoso en A”, P(D_A)=0,03, P(D_A’)=0,97

    D_B=”ser defectuoso en B”, P(D_B)=0,04, P(D_B’)=0,96

    D_c=”ser defectuoso en C”, P(D_c)=0,08, P(D_c’)=0,92;

    P(no defectuoso)=P(D_A’,D_B’D_C’)=0,97.0,96.0,92 al ser sucesos independientes

12. A=” Estudiar inglés”, B=”ser hombre” Costruimos la tabla suponiendo que hay 100 alumnos

	A	A’	Total
B	30%.90=27	40%.10=4	31
B’	63	6	69
Total	90	10	100

P(B’)=69/100 , es decir el 69% son chicas

13. A=”salga uno de los temas estudiados”, Los sucesos que nos servirían serían: (A,A), (A,A’), (A’,A) que son incompatibles entre si por lo que:

P(salir al menos uno de los estudiados)=P(A,A)+P(A,A')+P(A',A)=$\frac{15}{25}\frac{14}{24}+\frac{15}{25}\frac{10}{24}+\frac{10}{25}\frac{15}{24}$

14. El experimento es compuesto, primero tenemos que escoger la moneda entre las tres que tenemos, cada una de ellastiene una probabilidad de 1/3, y después tirarla y observar si sale cara. Los 3 sucesos que nos sirven son: (1ª,c), (2ª,c), (3ª, c) y como son incompatibles la probabilidad de obtener cara será la suma de las probabilidades de esos tres sucesos.

    P(obtener cara)=P(1ª,c)+P(2ª,c)+P(3ª,c)=1/3.1/2+1/3.1+1/3.1/6

15. Sea A=”estar A”, B=”estar B”, LA=”que la llamada sea para A”, LB=”llamada para B”

    P(A)=50/100=1/2, P(B)=75/100=3/4; P(LA)=2/5; p(LB)=3/5

    P(no estar ninguno)=P(A',B')=1/2.1/4=1/8 (son independientes)

    P(estarA cuando lo llamen)=P(A,LA)=1/2.2/5=2/10=1/5 (A y LA son independientes)

    P(estar B cuando lo llamen)=P(B,LB)=3/4.3/5=9/20

16. Sea A=”proceder de la 1ªcasa proveedora”, A'=”proceder de la 2ª”

    D=”ser defectuoso”, D'=”No ser defectuoso”

    Conocemos p(A)=60/100=0,6; P(A')=40/100=0,4, P(B/A)=0,4/100, P(D/A')=1'5/100

    Podemos calcular por tanto P(A,D)=P(A).P(D/A)=60/100.0,4/100=0,0024, de igual modo P(A',D)= P(A').P(D/A')=40/100.1'5/100=0,006

    Construimos así la tabla de contingencia de probabilidades

	D	D'	Total
A	0,0024	0,5976	0,6
A'	0,006	0,394	0,4
Total	0,0084	0,9916	1

    P(A/B)=$\frac{0,0024}{0,0084}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

17. Sea M=”mejorar”, A=”administrar el medicamento A”, B=”administrar el medicamento B”

    Conocemos P(A)=3/5, P(B)=2/5; P(M/A)=78/100; P(M/B)=83/100

    a) El experimento es compuesto, 1º elegimos un tubo y después se lo administramos y observamos si mejora. Por tanto la probabilidad de que mejore vendrá dada por la suma de las probabilidades de los dos sucesos incompatibles que nos favorecen: (A,M) y (B,M)

    P(A,M)=P(A).P(M/A)=3/5.78/100; P(B,M)=P(B).P(M/B)=2/5.83/100

    P(M)=P(A,M)+P(B,M)=3/5.78/100+2/5.83/100=0,8

    B) Nos piden ahora P(A/M) y P(B/M), Dado que ya conocemos la P(M) hallada en el apartado anterior P(A/M)=$\frac{P(A,M)}{P(M)}=\frac{3/5.78/100}{0,8}=0,585$; P(B/M)=$\frac{P(B,M)}{P(M)}=\frac{2/5.83/100}{0,8}=0,415$

18. M=”aprobar matemáticas”, F=”aprobar filosofía”, conocemos P(F)=40/100, P(A)=50/100. P(F/M)=0,6

    a) P(M,F)=P(M).P(F/M)=50/100.0,6=30/100

A partir de ahí construimos la tabla considerando que son 100 alumnos

	F	F'	Total
M	30	20	50
M'	10	40	50
Total	40	60	100

B) P(M/F)=30/40

19. Sea J =" acertar Juan", P="acertar Pedro"; P(J)=1/3, P(P)=1/4

A) La primera vez que se da en el blanco es la 2ª de Juan, entoces nos piden

P(J',P',J)=2/3.3/4.2/3=1/6

B) Nos piden que el primero que acierte sea Juan, nos sirven por lo tanto que Juan acierte a la 1ª, 2ª, 3º, 4ª, etc siempre que no lo haga antes pedro es decir serían infinitos sucesos del tipo:(J), (J',P',J), (J',P'J'P'J), (J'P'J'P'J'P'J), etc y nuestra probabilidad será la suma de las probabilidades de esos infinitos sucesos. Observemos la pobabilidad de algunos de ellos

P(J)=1/3

P(J'P'J)=2/3.3/4.1/3

P(J'P'J'P'J)=2/3.3/4.2/3.3/4.1/3

P(J'P'J'P'J'P'J)=2/3.3/4.2/3.3/4.2/3.3/4.1/3

....

Si observamos esos números vemos que cada uno de ellos se puede obtener del antrior multiplicándolo por 2/3.3/4=6/12=1/2. Se trata de una progresión geométrica de razón ½

Los infinitos términos de una progresión geométrica se pueden sumar siempre que su razón sea menor qe la unidad, que es nuestro caso, la fómula que permite sumar esos infinitos términos es la siguiente: S=$\frac{a_1}{1-r}$ siendo a_1 el primer término de la progresión y r la razón de la misma. Por lo tanto la probabilidad que buscamos sera S=$\frac{1/3}{1-1/2}=\frac{2}{3}$

20. Consideremos los sucesos I="ser ingeniero", E="Ser economista", N="no ser ingeniero ni economista", D="ser directivo" D'="no ser directivo".

Conocemos P(I)=20/100, P(E)=20/100, P(N)=60/100; P(D/I)=75%; P(D/E)=50/100, P(D/N)=20/100. Podemos por lo tanto calcular las intersecciones

P(I,D)=P(I).P(D/I)=20/100.75/100=15/100; P(E.D)=P(E).P(D/E)=20/100.50/100=10/100

P(N,D)=P(N).P(D/N)=60/100.20/100=12/100

Construimos ahora la tabla de contingencia suponiendo que son 100 trabajadores

	I	E	N	Total
D	15	10	12	37
D'	5	10	48	63
Total	20	20	60	100

P(I/D)=15/37

21. Sea M=”Ser mujer”, F=”gustarle el futbol” Sabemos que son 400 alumnos y que el 60% son mujeres, es decir hay 400.60/100=240 mujeres. Con este dato y los que nos da el problema construimos la tabla de contingencia

	M	M’	Total
F	100	80	180
F’	140	80	220
Total	240	160	400

A)P(M,F)=100/400=1/4; b)P(M/F)=100/180=5/9.

Los sucesos no son incompatibles porque su intersección no es vacía. Tampoco son independientes ya que P(M)=240/400=3/5 y P(M/F)=5/9. P(M) $\neq$ P(M/F) son dependientes

PROBLEMAS PAAU(2010-2014)

1. Un estudo sociológico afirma que 3 de cada 10 personas de una determinada población son obesas, de las cuales el 60% sigue una dieta. Por otra parte, el 63% de la población no es obesa y no sigue una dieta.

(a) ¿Qué porcentaje de la población sigue una dieta? (sol 25%)

(b) Si una persona elejida al azar sigue una dieta, ¿cuál es la probabilidad de que sea obesa? (sol:0’72)

2. Sean *A* y *B* sucesos tales que *P(A*$\cap$B)=0’1; *P(A’’*$\cap$ B’)=0’6; P(A/B)=0’5, donde *A’* y *B’* denotan los sucesos contrarios de A y B respectivamente.

(a) Calcula las probabilidades siguientes: *P(B) y P(A* $\cup$B) .(sol: P(B)=0’2, *P(A* $\cup$B)=0’4)

(b) ¿Son los sucesos *A* y *B* independentes? Justifica la respuesta. (son dependientes)

3. Se realiza un estudio para ver si los habitantes de una pequeña ciudad se suscribirían a un servicio de televisor por cable. Los hogares se clasifican de acuerdo a su nivel de renta: alta, media o baja. La siguiente tabla nos muestra las probabilidades de las distintas intersecciones:

	Renta baja	Renta media	Renta alta
Se suscribirían	0’05	0’15	0’10
No se suscribirían	0’15	0’47	0’08

A) Si el hogar suscribe el servicio ¿cuál es la probabilidad de que sea de renta alta? (sol:1/3)

B)¿Son los suscesos renta alta y suscripción a televisión por cable independientes?. Justifica la respuesta (sol: son dependientes)

C) Calcula la probabilidad de que un hogar seleccionado al azar pertenezca por lo menos a una de estas categorías: “renta media” o “desean suscribirse” (sol:0’77)

4. Un estudio estima que, en general, la probabilidad de que una empresa tecnológica no obtenga los beneficios anuales esperados es 0,5; la probabilidad de que una entidad bancaria no alcance al final del año los beneficios esperados es 0,2 y la probabilidad de que amba empresas no obtengan los beneficios anuales esperados es 0,1.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las dos no obtenga los beneficios anuales esperados? (sol:0’66)

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente una de las dos non obtenga los beneficios anuales esperados? (sol: 0’5)

5. Se quiere hacer un estudio sobre la situación laboral de los trabajadores en tres sectores de la economía que denotaremos por *B1*, *B2* y *B3*. La mitad de los trabajadores pertenecen al primer sector *B1,* e el resto se reparten en partes iguales entre los otros dos sectores *B2* y *B3*. El 8% de los del sector *B1*, el 4% de los del sector *B2* y el 6% de los del sector *B3* están en el paro.

(a) Calcula el porcentaje de paro entre los trabajadores de dicho estudio. (sol 65%)

(b) ¿Qué porcentaje de los que tienen trabajo pertenecen al sector tercero *B3*? (sol 25%)

6. Una empresa somete a un control de calidad a 7 de cada 10 artículos fabricados. De los que son sometidos al control resultan defectuosos un 2% e de los que non se someten al control de calidad resultan defectuosos un 12%.

(a) ¿Cúal es la probabilidad de que un artículo elegido al azar resulte defectuoso?(Sol 0’05)

(b) Si un artículo elegido al azar resulta defectuoso, ¿cúal es la probabilidad de que no fuese sometido al control de calidade? (sol 0’72)

7. El 40% de los aspirantes a un puesto de trabajo supero una determinada prueba de selección. Terminan siendo contratados el 80% de los aspirantes que superan esa prueba y el 5% de los que no la superan.

(a) Calcula el porcentaje de aspirantes que terminan siendo contratados. (sol: 35%)

(b) Si un aspirante no es contratado, ¿cúal es la probabilidad de que superase la prueba?(Sol: 0’12)

8. La probabilidad de obtener rentabilidad positiva en el plazo de un año con un fondo de iinversión es 0´4. Si en el primer año se obtuvo rendimiento positivo, la probabilidade de obtenerlo en el segundo año es 0´6. La probabilidad de non obtener rendimiento positivo ni el primer ni el segundo año es 0´48.

(a) ¿Qué probabilidad hay de obtener rendimiento positivo en el segundo año? (Sol:0’36)

(b) Calcula la probabilidad de obter rendimiento positivo dos años (sol:0’24)

9. Una fábrica produce CDs en dos turnos. El primer turno produce 2000 discos diarios y el segundo turno produce 3000. Por la experiencia pasada, se sabe que en el primer turno y en el segundo se producen un 1% y 2% de discos defectuosos, respectivamente. Al final del día se selecciona al azar un disco de la produción total.

(a) Determina la probabilidad de que el CD sea defectuoso. (sol: 0’016)

(b) Si el CD no es defectuoso, calcula la probabilidad de que provenga del primer turno. (Sol: 0’402)

10. Se estima que un tercio de las empresas en un sector de la economía, tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales. Declara un dividendo un 60% de las empresas que tienen aumento y un 10% de las que no lo tienen.

   (a) ¿Qué porcentaje de las empresas que declaren un dividendo tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales? (sol: 75%)

   (b) ¿Qué porcentaje de empresas ni tienen aumento en sus ganancias ni declaran un dividendo? (sol: 60%)

11. Un estudio realizado por una entidad bancaria informa que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y el 40% de los que tienen un préstamo personal también tienen un préstamo hipotecario.

   (a) Calcula el porcentaje de clientes que tienen ambos tipos de préstamos.(Sol 20%)

   (b) Calcula el porcentaje de clientes que no tienen ningún tipo de préstamos (Sol:10%)

12. Sean A y B dos sucesos tales que la probabilidad de que ambos sucedan simultáneamente es de 1/10 y la de que no sucedan ninguno de los dos es 1/5. Además se sabe que P(A/B)=1/4

   (a) Calcula la probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos. (sol 0'8)

   (b) Calcula la probabilidad de que se verifique el suceso A. (Sol:0'5)

13. Cierta población de personas mayores de 70 anos está formada por un 40% de hombres y un 60% de mujeres. El porcentaje de personas dependientes en esa población es del 10% entre los hombres y del 20% entre las mujeres.

   (a) Calcula el porcentaje de personas dependientes en esa población de mayores de 70 anos. (sol: 16%)

   (b) Elegida una persona al azar de la citada población, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer o no sea dependiente? (sol:0'96)

14. Se sabe que P(B/ A) = 0,7, P(A/ B) = 0,4 e P(A) = 0,2 .

   (a) Calcula $P(A\cap B)$ y P(B) . Justifica si son independientes o non los sucesos A y B. (Sol: $P(A\cap B)$=0'14 y P(B)=0'35)

   (b) Calcula $P(A\cap\overline{B})$, donde $\overline{B}$ representa el suceso complementario o contrario de B. (Sol: $P(A\cap\overline{B})$=0'06)

EJERCICIOS PROPUESTOS AMPLIACIÓN

1. Se tienen 2 dados A y B. El A tiene 2 caras rojas y 4 verdes, el B 4 caras rojas y 2 verdes. Se lanza al aire una moneda; si sale cara se arroja el dado A y si sale cruz el dado B
   a) Hallar la probabilidad de obtener una cara de color rojo. (sol:1/2)
   b) Si sabemos que ha salido una cara de color verde ¿ cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido una cara? (Sol:2/3)
2. En una población el porcentaje de personas que ven un determinado programa es del 40%. Se sabe que el 60% de los que lo ven tienen estudios superiores y que el 30% de los que no lo ven no tienen estudios superiores. a) Calcular la probabilidad de que una persona vea el programa y tenga estudios superiores. B) Calcular la probabilidad de que una persona con estudios superiores vea el programa. (Sol: a)0'24; b)$0'\widehat{36}$)
3. En un espacio muestral se consideran 2 sucesos A y B tales que $P(A\cup B)=1; P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ P(A/B)=1/3. Calcular la probabilidad de los sucesos A y B (Sol: P(A)=2/3; P(B)=1/2)
4. El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes hacen una compra

y solicitan colaboración de un dependiente. a)Calcular la probabilidad de que un cliente ni compre ni solicite colaboración. b)¿Cuál es la probabilidad de que haya hecho una compra un cliente que ha pedido colaboración de un dependiente? (sol:a) 0'65; b)0'5)

5.De un estudio sobre accidentes de trafico se deduce que en el 65% de los accidentes no se respetó el límite de velocidad permitido, en el 23% no se llevaba puesto el cinturón de seguridad y, en el 30% de los casos se cumplían ambas normas. a) Calcula la probabilidad de que en un accidente no se haya cumplido alguna de las dos normas. b) Razonar si son o no independientes los sucesos "llevar puesto el cinturón" y "respetar los límites de velocidad" (Sol: a)0'7; b) dependientes)

6.Sean los sucesos A y B independientes. La P(B)=0'6 y P(A/B)=0'3
a) Calcular la probabilidad de que suceda al menos uno de los sucesos (Sol:0'72)
b) Calcular la probabilidad de que suceda el suceso A pero no El B (Sol:0'12)

7. Una urna A tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Otra urna B tiene 8 bolas numeradas del 1 al 8. Se escoge una urna al azar y se extrae una bola. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?. b) Si el número de la bola extraída es impar ¿Qué probabilidad hay de que proceda de la una B? (sol: a)$P(2)=P(A\cap 2)+P(B\cap 2)=0'1125$; b) 0'5)

8. En dos institutos estudian ingles el 60% y el 55% de los alumnos respectivamente. Se sortea un viaje a Londres en cada uno de los institutos, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos a) Los dos alumnos agraciados no estudian inglés b)Solo estudia inglés el del primer instituto c)Al menos uno de los dos estudia inglés. Sol: a)0'18; b)0'27; c)0'82)

9. Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la probabilidad de que A sea defectuoso es de 0'001 y la de que B no lo sea es de 0'997. Se elije al azar un elemento, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: a)Solo uno de los componentes es defectuoso b) Alguno de los componentes es defectuoso c)Ambos son defectuosos. Sol:(a)0'003994; b)0'003997 c)0'000003)

10. En un Instituto de Idiomas se expiden dos certificados, el A (de nivel básico) y el B (nivel superior), para obtenerlos es preciso superar un examen, pudiendo una persona presentarse al de nivel superior sin haberse examinado previamente del nivel A. El examen de nivel B lo pasa el 80% de las personas que poseen el de nivel A y solo el 40% de los que no lo tienen.
Dos amigos se presenta al examen del nivel B, el primero tiene certificado A y el 2º no. Calcular la probabilidad de que a)Apruebe solo el examen el que tiene el de nivel básico b) ambos obtengan el certificado c) sabiendo que uno solo ha aprobado el examen ¿cuál es la probabilidad de que sea el que tiene el de nivel básico
(sol: a)0'48; b)0'32 c)0'857)

11. Sabemos que P(A)=2/5, P(B)=1/3 y $P(A'\cap B') = 1/3$. Calcula $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$, ¿Son A y B sucesos dependientes o independientes? (sol: $P(A\cap B)=1/15$; $P(A\cup B))2/3$. Dependientes)

12.En un grupo de personas el 75% están pagando una hipoteca. El 10% de los que paga una hipoteca está pagando además un préstamo y el 60% de los que pagan un préstamo pagan además una hipoteca. A) ¿ qué porcentaje de personas paga a la vez un préstamo y una hipoteca? B)¿Que probabilidad hay de que una persona esté pagando un préstamo? C)Entre las personas que no pagan una hipoteca ¿qué porcentaje está pagando un préstamo? Sol: a)75%; b)0'125; c)20%)

13.Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A,B y C. La cadena A fabrica el 50% de la producción de la fábrica, la cadena B el 30% y la C el resto. La probabilidad de que un coche producido en A resulte defectuoso es de ½, en la B de ¼ y en la C de 1/6
A) Calcular la probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido producido en la cadena A; b) Calcular la probabilidad de que un coche sea defectuoso. C)¿Cuál es la probabilidad de que un coche no defectuoso haya sido fabricado en la cadena C?
Sol(a)0'25; b)43/120; c)20/77)

14. En una determinada granja de patos en la que solo hay dos tipos, unos con pico rojo y otros con pico amarillo, se observa que el 40% son machos y con pico amarillo, el 20% de los patos tienen el pico rojo, el 35% de los patos que tienen el pico rojo son machos, mientras que solo el 15% de los machos tienen el pico rojo. a)Elegido un pato al azar calcular la probabilidad de que sea macho; b) Si el pato ha sido hembra ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo? Sol: a) 0'47; b)13/53)
15. Los viajantes de una empresa alquilan coches a tres agencias de alquiler: el 60% a la agencia A el 30% a la B y el resto a la C. Si necesitan una revisión el 9% de los coches de la agencia A, el 20% de la B y el 6% de la C a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche alquilado por esa empresa necesite una revisión? B)Si un coche alquilado ha necesitado una revisión ¿Cuál es la probabilidad de que lo hayan alquilado a la agencia B? Sol: (a)0'12; b)0'5)

16 Sean A y B dos sucesos tales que p(A)=0'4, P(B)=0'3 y $P(A\cap B)$=0'2 ¿Calcula $P(A/\overline{B})$ Sol. (20/7)

17. El congreso de Diputados de cierto país está por tres grupos parlamentarios A,B y C con 140, 150 y 60 Diputados respectivamente. Una propuesta sometida a votación es rechazada por un 25% del grupo A, un 42% del B y un 5% del C. Finalizada la votación un medio de información entrevista a un Diputado elegido al azar a) ¿Qué probabilidad hay de que haya rechazado la propuesta y sea del grupo C; b) Probabilidad de que el diputado entrevistado haya rechazado la respuesta; c) Si el diputado resulta ser grupo B ¿Cuál es la probabilidad de que haya rechazado la propuesta? Sol: a)3/350; b)101/350; c)101/150
18. En una ciudad el 55% de la población en edad laboral son hombres; de ellos un 12% está en paro. Entre las mujeres el porcentaje de paro es del 23%. Se elige una persona de dicha población a)¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y no esté en paro? b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro? c)¿ Cuál es el porcentaje de parados en esa población? Sol: a)0'484; b)0'1035; c)16'95%
19. Según un estudio el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33% la televisión por cable y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona al azar un hogar europeo a) Cuál es la probabilidad de que solo tenga contratada la televisión por cable? B)¿Cuál de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios? Sol: a)0'13; b)0'47
20. Se dispone de la siguiente información relativa a dos sucesos: P(A)=0'6, P(B)=0'2 y $P(A\cap B)$=0'12 a) calcular la probabilidad de los sucesos: $(A\cup B)$ y $(A/(A\cup B))$; b) ¿Son los sucesos A y B incompatibles?; ¿Son independientes? Sol:($P(A\cup B)$=0'68; $P(A/A\cup B)$=3/34; AyB no son incompatibles y si son independientes)
21. Un ordenador personal tiene cargados dos programas de antivirus que actúan independientemente uno del otro. El 1º detecta la presencia de virus con una probabilidad de 0'9 y el 2º lo hace con probabilidad 0'8. Si el ordenador es contaminado por un virus a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea detectado al menos por uno de los programas? b)¿Cuál de que sea detectado solo por uno? Sol: a)0'98; b)0'26
22. Sea A y B dos sucesos tales que P(A)=0,4, P(B)=0,3 y $P(A\cap B)$=0,1. Calcula razonadamente: a) $P(A'\cap B')$, b) $P(A\cup B)$, c) $P(A'\cup B')$ d) P(A/B). ¿Son los sucesos A y B dependientes o independientes? Sol: $P(A'\cap B')$=0'4, b) $P(A\cup B)$=0'6, c) $P(A'\cup B')$=0'9 d) P(A/B)=1/3 Dep).
23. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A\cup B)$=3/4, P(B')=2/3, $P(A\cap B)$=1/4. Halla P(B), P(A) y $P(A'\cap B')$. ¿Son A y B dependientes o independientes? (P(A)=1/3; P(B)=2/3; $P(A'\cap B')$=3/4: dependientes)
24. Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos al mismo tiempo es p ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? (Sol: 1-p)

25. Dados dos sucesos independientes A y B, la probabilidad de que ocurran los dos a la vez es de 1/6 y la de que no ocuurra ninguno de los dos de 1/3. Calcula las probabilidades de A y B
Sol: (P(A)=1/2 y P(B)=1/3 o P(A)=1/3 y P(B)=1/2)
26. Sean A y B dos sucesos con P(A)=1/2 y P(B)=3/5. Prueba que si $P(A\cup B)=4/5$ entonces A y B son independientes (Sol: a partir de la $P(A\cup B)$ se calcula la $P(A\cap B)=3/10$, por lo que $P(A\cap B)=P(a).P(B)$ y, en consecuencia, son independientes)
27. Un aparato electrónico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los dos componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A (Sol: $P(A\cap B)=0'58$ y $P(A\cap B')=0'32 \Rightarrow P(A)=0'58+0'32=0'9$)
28. Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna B tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas ¿Cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A? (Sol: $91/121\simeq 0'75$)
29. Se dipone de tres urnas: la A contiene 2 bolas blancas y 4 rojas, la B 3 blancas y 3 rojas y la C 1 blanca y 5 rojas. Se elige una urna al azar y se extre una bola de ella. A) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?, b) Si la bola extraida es blanca ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B? Soluc: (a) 1/3; b)1/2)
30. En cierto pais un 12% de las personas padecen una enfermedad endémica. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable ya que da positiva en el 90% de los casos de personas enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva? (Sol:0'289)
31. En tres máquinas A,B y C se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas defectuosas en cada máquina resulta ser del 1%, 2% y 3% respectivamente. Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar. Si resulta ser defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?(sol: 1/6)
32. Para 3 tiradores A, B y C la probabilidad de dar en el blanco es de 1/6, 1/4 y 1/3 respectivamente. Si cada uno de ellos dispara una vez, halla:) la probabilidad de que solo uno acierte, b) la probabilidad de que al menos uno acierte. Sol: (a) 31/72; b) 21/36)
33. El 2% de los individuos de una población son diabéticos. Entre los diabéticos solo la mitad sabe que lo es. Si se selecciona un individuo al azar ¿ cuál es la probabilidad de que sea diabético y no lo sepa? Sol (1º se calcula $P(\text{diabético}\cap\text{saberlo})=0'01$; $P(D)=P(D\cap S)+P(D\cap S')$. De ahí despejamos y se obtiene $P(D\cap S')=0'01$)
34. Se estima que el 30% de los habitantes de una población son obesos y que un 3% son diabéticos. Si el 2% son obesos y tiene diabetis a)¿Cuál es la probabilidad de que una persona

elegida al azar sea obesa o tenga diabetis? b)¿Qué porcentaje de diabéticos hay entre los obesos? Soluc: a) 0’31; b) 6’66%

35. En Santiago de Compostela el porcentaje de coches que necesitan un cambio de aceite es del 25% y el porcentaje de los que necesitan cambiar el filtro es de un 40%. El 14% de los coches necesitan cambiar ambas cosas. a) Si sabemos que un coche va a cambiar el aceite ¿cuál es la probabilidad de que tenga que cambiar el filtro?, b) Calcula el porcentaje de coches que necesitan cambiar el aceite y no necesitan cambiar el filtro. Sol:(a)0’56; b)11%)
36. En una empresa en la que el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres se constata que el 25% de los hombres y el 60% de las mujeres usan teléfono móvil. a)Encuentra la probabilidad de que una persona elegida al azar use teléfono móvil. b) ¿cuál es la probabilidad de ser mujer y no tener móvil? Sol: (a)0’53, b)0’32)