2.- PROBABILIDAD

II.

Una razonable probabilidad es la única certeza.
(Howe).

0.-Combinatoria.

En este tema se estudian los sucesos aleatorios y la probabilidad de los mismos. Estos sucesos se rigen por el azar.

El azar está muy presente en la vida (quinielas, loteria nacional y primitiva, la once, bonoloto, bingo , etc .), pese a esto, nuestros razonamientos , en general, siguen más la vertiente determinista que la aleatoria, sin tener en cuenta que una no excluye a la otra. Tenemos un pasado en donde la vertiente aleatoria se ocultaba bajo toda clase de superticiones.

El origen de la teoría de la probabilidad se remonta al siglo XVII y hoy en dia es básica. Piense el alumno en sus aplicaciones inmediatas : estadística, física, ciencias sociales, metereología, etc. Decía Laplace " las cuestiones más importantes de la vida constituyen en su mayor parte, en realidad, solamente problemas de probabilidad ".

El alumno al terminar el tema debe ser capaz de aplicar determinados resultados a situaciones de la vida cotidiana y si profundiza un poco podrá aplicar sus conocimientos a formarse juicios fundamentados sobre temas que a priori y a simple vista, parece no tienen nada que ver con esta teoría. Sobre estos temas recomendamos, al finalizar el estudio de la probabilidad, la lectura del libro "El hombre anumérico " de John Allen Paulos.

El alumno conviene que repase la combinatoria, para ello en forma de esquema reproducidos los resultados más importantes:

Agrupaciones ************	Importa el orden ?	Se pueden repetir?	Nº de agrupaciones	
Variaciones con repetición VR	SI	SI	$VR^n_m = m^n$	
Variaciones V	SI	NO	$V^n_m=m(m-1)...(m-n+1)$	n#m
Permutaciones P	SI	NO	$P_n=V^n_n=n!=n(n-1)..3.2.1$	n=m
Combinaciones C	NO	NO	$C^n_m=({}^m{}_n)=m!/(n!(m-n)!)$	n#m

1.-Experimento aleatorio. Espacio muestral.

1.1.-Experimento aleatorio. Concepto y ejemplos.

El alumno debe distinguir entre experimentos aleatorios y deterministas. En los experimentos deterministas el resultado se conoce de antemano (lanzar una piedra al aire y observar si cae o no cae), mientras que en los experimentos aleatorios es todo lo contrario.

Damos a continuación la definición de experimento aleatorio, adaptada a los objetivos de la probabilidad.

Definición: Se dice que un experimento **es aleatorio** cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) El experimento se puede repetir indefinidamente bajo análogas condiciones, pudíendose obtener resultados distintos en cada prueba.

b) En cada prueba se obtiene un resultado que pertenece al conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

c) Antes de realizar una nueva prueba del experimento no se puede predecir el resultado que se obtendrá.

d) La frecuencia relativa de cada resultado de un experimento aleatorio tiende experimentalmente a aproximarse a un valor fijo, es decir, aparece un modelo de regularidad estadística.

Ejemplos *:*

1.- Lanzar una moneda al aire.
2.- Lanzar un dado al aire.
3.- Abrir un libro al azar y anotar la página de la izquierda.

1.2.-Espacio muestral. Suceso elemental.

Definición: Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados simples posibles de un experimento aleatorio.

El espacio muestral lo designaremos por **E**.

Cada elemento del espacio muestral E le llamaremos **punto muestral**.

Ejemplos :

1.- Lanzar una moneda al aire y anotar los resultados.
E={ cara(c), cruz (x) }
2.- Lanzar dos monedas al aire:
E={ cc, cx , xc, xx }
3.- Lanzar dos dados al aire y sumar los números que salen:
E={ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

En lo sucesivo trabajaremos con espacios muestrales finitos.

Definición: Se llama **suceso elemental** a cada uno de los resultados simples de un experimento aleatorio. En definitiva está formado por un solo punto muestral.

Ejemplos:

1.-En el caso de E={ c, x } de lanzamiento de una moneda sus sucesos elementales son : {c} , {x}

2.-En el supuesto de lanzamiento de un dado : E={1,2,3,4,5,6}.
Son sucesos elementales {1}, {2}, {3} , {4}, {5}, {6}.

1.3.-Suceso. Suceso imposible o nulo. Suceso seguro. Suceso contrario o complementario.

Definición: Se llama **suceso** a cada subconjunto del espacio muestral E.
Tambien se llama suceso aleatorio o estocástico.

Ejemplo:

1.-Al lanzar una moneda y anotar los resultados el espacio muestral es E={c,x}. Los sucesos que se presentan , según la definición anterior son los siguientes:
A={}, B={c} , C={x} , E={c,x}.

2.- Al lanzar un dado los sucesos que se presentan son todos los subconjuntos de E={1,2,3,4,5,6} entre los que se encuentran los siguientes:
*A=**N**, B={1} , C={2} , ... P={2,4,6}   I={1,3,5} , ...*

Definición : Se llama **espacio de sucesos de E** , lo designamos por S, al conjunto formado por todos los sucesos.

En símbolos S=P(E).
Si el número de elementos de E es n , compruebe el alumno que el número de elementos de S es 2^n.

Definición : Se dice que **se realiza el suceso A** de S, cuando al efectuar una prueba de un experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los elementos de A.
Tambien diremos que se presenta el suceso A o se verifica A.

Ejemplo:
Si consideramos el suceso P={2,4,6} diremos que se realiza cuando sale   un 2 o un 4 o un 6.

Definición: LLamaremos **suceso imposible o nulo** al suceso **N**. Es por lo tanto aquel que no se realiza nunca.

Definición: Llamaremos **suceso seguro** al suceso formado por todos los resultados simples posibles. En definitiva el suceso seguro es E.

Definición: Se llama **suceso elemental** aquellos formados por un solo elemento.

Definición: Se llama **suceso compuesto** aquellos formados por dos o más elementos del espacio muestral.

Ejemplo:

En el supuesto de la tirada de una moneda al aire A={3} es un suceso elemental. C={2,4} es un suceso compuesto.

Definición: Dado un suceso A se llama **suceso contrario** y se designa con A` a un suceso que se realiza cuando A no se realiza.

Ejemplo :

En el lanzamiento de un dado si A={1,3,5} el contrario de A es A`={2,4,6}.
El suceso contrario de A, se simboliza A` o bien **}** .

1.4.-Operaciones con sucesos: unión e intersección. Propiedades. Diferencia de sucesos. Sucesos incompatibles.

Definición: Dados dos sucesos A y B llamamos **suceso unión** y escribiremos AUB al suceso que se realiza cuando lo hacen A o B.

Definición: Dados dos sucesos A y B se llama **suceso intersección** de A y B , escribiremos A1B, al suceso que unicamente se realiza cuando lo hacen A y B simultaneamente.

Definición : Dados dos sucesos A y B se llama **diferencia** de A y B y escribiremos A-B al suceso que se realiza cuando lo hace A y no B.

2.-Probabilidad.

2.1.-Definición de frecuencia absoluta y relativa de un suceso. Propiedades de la frecuencia relativa.

En el tema anterior hemos hablado de la definición de frecuencia absoluta y frecuencia relativa.
Recordemos las definiciones:

Definición: Llamamos **frecuencia absoluta** de un suceso A al numero de veces que se presenta al realizar n pruebas.
Designaremos abreviadamente a la frecuencia absoluta con n'.
A es un suceso en un experimento aleatorio de espacio muestral E.

Definición: LLamaremos **frecuencia relativa** de un suceso A , y designaremos h(A) , al cociente entre el número de veces que se realiza el suceso A y el número de pruebas realizadas.

$$h(A)=\frac{n'}{n}=\frac{n^{o}\ veces\ que\ se\ realiza\ A}{n^{o}\ de\ pruebas\ realizadas}$$

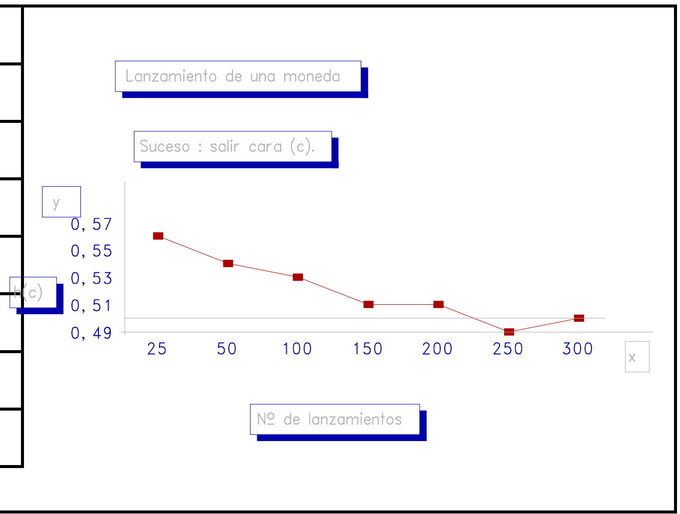
2.2.-Introducción al concepto de probabilidad como límite de frecuencias.

La frecuencia relativa nos da un cociente menor o igual que 1 , que mide las veces que se repite un suceso despues de realizar un experimento aleatorio una serie de veces.
El cociente anterior cuando el número de pruebas realizadas crece , tiende a estabilizarse entorno a una cantidad. Esta cantidad es la que definimos como probabilidad.

Supongamos que lanzamos una moneda al aire y observamos las veces que sale cara , anotando tambien el número de lanzamientos. El alumno puede realizar este experimento empíricamente o bien generando con una calculadora y la tecla RND números aleatorios y simulando el experimento.

El resultado será similar al de la tabla adjunta. Seguidamente puede representar los resultados .

NºL.	NºC.	n\`	n\`/n
25	14	14	0.56
50	27	27	0.54
100	53	53	0.53
150	77	77	0.51
200	102	102	0.51
250	123	123	0.49
300	152	152	0.50



Las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor de 0,5. La palabra estabilizarse en este caso significa que la frecuencia relativa del suceso, en el ejemplo salir cara, toma valores aproximados por exceso o por defecto en torno a 0,5, al aumentar el número de tiradas.

El hecho anterior se conoce con el nombre de **ley de los grandes números** ley que fué demostrada por Jacques Bernouilli (1654-1705).

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente.

Las consideraciones anteriores dan lugar a la siguiente definición:

Definición: Se llama **probabilidad del suceso A**, y se designa por p(A) al límite de la frecuencia relativa cuando el número de pruebas efectuadas tiende a infinito.
En términos matemáticos:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} h(A)$$

Nota : esta definición se debe a Richard von Mises (1883-1953), realmente se le pusieron muchisimas objeciones ya que mezclaba conceptos empíricos y teóricos, junto a dificultades matemáticas evidentes.

Para aplicar esta definición necesitariamos realizar un gran número de veces cada experimento y estudiar el límite de sus frecuencias relativas. Es evidente que se trata de un método empírico que resulta trabajoso, lento y por que no decirlo aproximado. Desde este punto de vista sentimos la necesidad de buscar otra definición.

Laplace (1749-1827) , enunció la primera definición del concepto de probabilidad en los siguientes términos:

Definición : La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles, es decir:

$$p(A) = \frac{número\ \ de\ \ casos\ \ favorables\ \ al\ \ suceso\ \ A}{número\ \ de\ \ casos\ \ posibles}$$

-Cuando se aplica esta definición debe tenerse en cuenta que los sucesos elementales tienen que ser igualmente probables (lo cual no deja de ser una objeción a la definición).
-Resulta evidente que buscando el rigor sea necesario explicitar otra definición que evite estos inconvenientes.
-En honor a Laplace debemos decir que la definición funciona perfectamente en la mayoria de los casos:

Ejemplos:
Consideremos el experimento de lanzar un dado. Compruebe el alumno que la probabilidad de obtener número par es 3/6.
En el mismo experimento la probabilidad de obtener múltiplo de tres sería 2/6.

2.3.-Definición axiomática de probabilidad.

Kolmogoroff (1903-1987) construye la definición axiomática de la probabilidad a partir de las propiedades, ya enunciadas de la frecuencia relativa y de la ley de los grandes números.

Definición : Se llama **probabilidad** a una aplicación p del conjunto de todos los sucesos S con las operaciones (U , 1) en el intervalo cerrado [0 , 1]:
p : S ---------> [0,1]
A //-------> p(A)
verificando los siguientes axiomas:

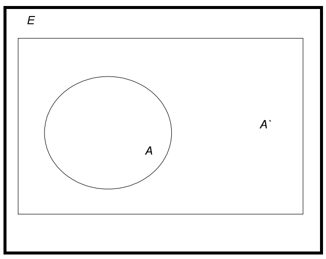
a.1 : Para todo suceso A de S se verifica **p(A) $ 0**.
a.2 : Si A y B son sucesos incompatibles se verifica: **p(AUB)=p(A)+p(B)**
a.3 : **p(E) = 1**

2.4.-Propiedades de la probabilidad.

Las siguientes propiedades de la probabilidad se deducen a partir de los axiomas enunciados en la definición anterior:

1.- La probabilidad del suceso }, contrario de A es p(}) = 1 - p(A).

En efecto resulta evidente:
AUA`= E
Como A y A`son incompatibles aplicando los a2 y a3
p(A U A`) =p(A) + p(A`) = p(E) =1
de donde sale la propiedad.



Desde un punto de vista práctico esta propiedad resulta muy importante , sobre todo para calcular la probabilidad en aquellos casos en los cuales es dificil hallar

p(A) y sin embargo asequible calcular p(A`).
Ejemplo :
¿Cuál es la probabilidad de no obtener seis puntos al lanzar un dado ?.
Sea A ={ no obtener 6 puntos } evidentemente A`={obtener 6 p.}
es p(A) = 1-p(A`)= 1 - 1/6 = 5/6.

2.- La probabilidad del suceso imposible es cero: p(N) = 0
En efecto E U **N** = E siendo E y **N** incompatibles por lo tanto por los a2 y a3 resulta p(E U **N**)= p(E) + p (**N**) = 1 de donde sale inmediato.

5.- Cualquiera que sea el suceso A se verifica que p(A) # 1.

A la siguiente propiedad , por su importancia le dedicamos una pregunta aparte.

Ejemplo 1:
En una baraja española se extrae al azar una carta, calcular la probabilidad de que a) sea un oro , b) sea un as , c) sea el as de oros.
El ejemplo resulta inmediato si tenemos en cuenta que una baraja española se compone de 40 cartas, todas ellas tienen la misma probabilidad de extraerse y se puede aplicar la regla de Laplace. Las respuestas son respectivamente : 10/40 , 4/40 y 1/40.

En el ejemplo 2 pretendemos poner de manifiesto la importancia que tiene para la aplicación de la Regla de Laplace, el hecho de que los sucesos sean equiprobables.

Ejemplo 2 :
Calcular la probabilidad de que al lanzar dos monedas se obtenga por lo menos una cara.

El ejercicio podría resolverse de la siguiente forma:
Los casos posibles que aparentemente se pueden obtener son:
a) obtener dos caras.
b) obtener una cara y una cruz.
c) obtener dos cruces.
Aplicando la regla de Laplace y teniendo en cuenta que solo a) y b) resultan favorables , obtenemos que la probabilidad pedida es 2/3.
El ejercicio está mal resuelto, dado que los tres sucesos no son equiprobables, la probabilidad del caso b) es mayor que la de a) y c) y por lo tanto no podría aplicarse la regla de Laplace de esta forma.
Compruebe el alumno que la respuesta correcta es 3/4 y explique el resultado.

Ejemplo 3 :
Los billetes de la empresa municipal de autobuses están numerados desde el 00000 al 99999. Calcular la probabilidad de que al subir al autobús nos den un billete capicúa.
Comprueba el alumno que la probabilidad pedida es 1/100.

Comentario final a la pregunta de probabilidad:

El alumno al llegar a este punto habrá sacado sus conclusiones en cuanto a lo que se entiende por probabilidad. Desde el punto de vista matemático la definición axiomática es sin lugar a dudas la mejor y más consistente.

Desde un punto de vista práctico e investigativo hay cuatro tipos de probabilidad:

a) La clásica de Laplace : que como vimos exige sucesos elementales equiprobables y que en la práctica no se ajustan a muchos procesos de la realidad. Es una opción a estimar.

b) La definición de Von Mises : que en la práctica y en la terreno de la investigación , pese a todas las deficiencias que quieran ponérsele, resulta creativa, enfocada como la pura observación , de cuantos más caso mejor , identificando al final las frecuencias relativas observadas con la probabilidad.

c) La probabilidad subjetiva : no vista como tal, pero la más usada (por desgracia). Así decimos por ejemplo "que la probabilidad de que existan extraterrestres que hayan venido a la tierra" es grande, y otros dirán que es nula (muy discutible pero más cercana a la realidad que la anterior). En este tipo de probabilidad los resultados pueden ser muy dispares y el fundamento científico brillar por su ausencia.

d) Por último la axiomática, en donde se definen espacio probabilísticos que deben cumplir los axiomas enunciados y que nos mete de lleno en la alta matemática.

3.-Probabilidad Condicionada. Sucesos Independientes.

3.1.-Definición de probabilidad condicionada. Ejemplos.

En esta pregunta pretendemos definir un nuevo concepto el de **probabilidad condicionada**, para ello partiremos de un ejemplo concreto y dado que queremos llegar a una nueva probabilidad, usaremos las frecuencias relativas para por abstracción y teniendo en cuenta la definición de Von Mises llegar a la definición.

Definición : Se llama **probabilidad condicionada del suceso B por el suceso A** al cociente:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

siempre que

$$p(A)\neq 0$$

Nota : El alumno puede leer p(B/A) como "probabilidad de B condicionada por A " o como " probabilidad de que habiendo ocurrido A, ocurra B".

Es importante considerar que la fórmula anterior tambien puede escribirse así

$$p(A\cap B)=p(B/A).p(A)$$

De forma totalmente análoga si consideramos P(A/B), es decir la probabilidad de A condicionado a la ocurrencia de B salen las fórmulas:

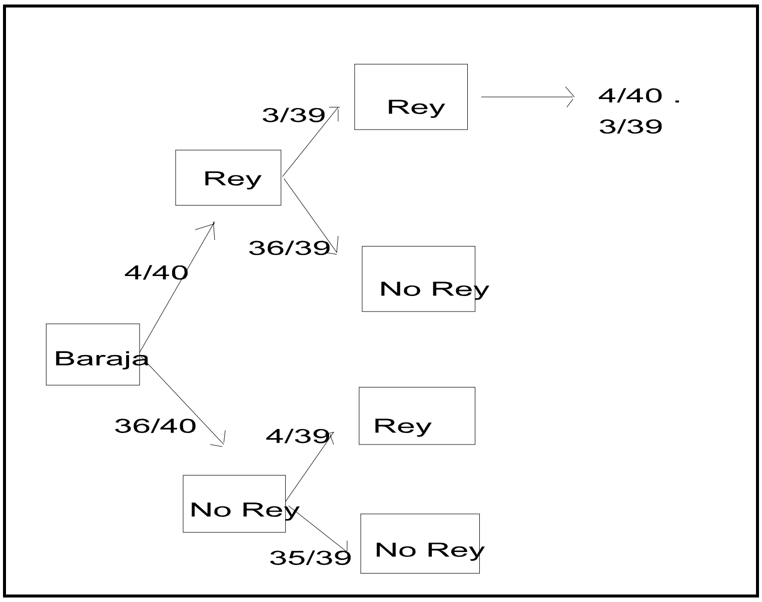
$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$$p(A\cap B)=p(A/B).p(B)$$

Ejemplo 1:
Consideremos una urna con 10 bolas, 5 de ellas blancas y 5 negras . ¿Cual es la probabilidad de obtener una bola blanca en la primera extracción y negra en la segunda, sin devolver la primera bola ?.
Sea A={ obtener bola blanca }
Sea B={ obtener bola negra }.
Nos piden p(A 1 B).
Evidentemente es p(A)=5/10=1/2
Tambien p(B/A)=5/9 ya que se supone que hemos sacado blanca en la primera extracción y evidentemente quedan 9 bolas y 5 negras.
Por lo tanto p(A 1 B) = 1/2 . 5/9 = 5/18

Ejemplo 2 :
¿ Cual es la probabilidad de obtener dos reyes ?. Se supone que se trata de una baraja española y que se extraen sucesivamente las cartas.
Compruebe el alumno que p(R1 1 R2) = 1/130

Nota importante:
El alumno , debe hacer diagramas de árbol para resolver este tipo de problemas. En el ejemplo anterior:



Trate el alumno de interpretar el diagrama y plantearse problemas que resuelvan las tres zonas en las que no figura solución en el diagrama anterior.

3.2.-Sucesos independientes: concepto y ejemplos.

Supongamos que un matrimonio tiene ya una hija. ¿ Cual es la probabilidad de que el siguiente hijo sea un niño?.
Si consideramos A={ser hijo} y sea A/B={hijo condicionado a 1ª hija}.
Evidentemente es p(A)=1/2 , p(A/B)=1/2.
En este caso diremos que los sucesos A y B son independientes. En definitiva la realización de B no influye en la realización de A.

Definición : Se dice que dos sucesos A y B **son independientes** si se verifica que **p(A)=p(A/B)**. Si por el contrario es distinto diremos que son dependientes.

Ejemplo1:
En el ejemplo de extracción de dos reyes de la baraja , devolviendo la carta. La extración del segundo rey es independiente de la primera extracción.
En efecto sea R1={extraer el 1º Rey} y R2={extraer el 2º rey}.
Resulta que $p(R1 \cap R2) = p(R1).p(R2/R1)=4/40 \,.\, 4.40 = 1/100$
Es $p(R2/R1)=4/40$ *mientras que* $p(R2)=4/40$ *por lo tanto son independientes.*
Evidentemente no ocurre lo mismo devolviendo la carta.

3.3.-Cálculo de probabilidades condicionadas y de la intersección de sucesos.

Para el cálculo de la probabilidad compuesta distinguiremos dos casos:
a) Sucesos independientes.
b) Sucesos dependientes.

En el caso a) **sucesos independientes** hemos visto que:

$$p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B).$$

Ejemplo :
Se lanza un dado dos veces consecutivas. ¿ Cual es la probabilidad de obtener un múltiplo de tres en la primera tirada y obtener un 5 en la segunda tirada?.
Evidentemente $p(F3 \cap E5) = 1/3 \,.\, 1/6 = 1/18.$

Analogamente si se trata de sucesos independientes, en el caso de tres sucesos tenemos:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)$$

Nota : si se trata de experiencias compuestas (por ejemplo lanzar un dado y lanzar una moneda) el alumno usará las mismas fórmulas.

Ejemplo:
Calcular la probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado, salga una cara al lanzar una moneda y se extraiga el as de oros de una baraja española.
$p(D3 \cap MC \cap AO) = 1/6 \;.\; 1/2 \;.\; 1/40 = 1/480$

En el **caso b) sucesos dependientes:**

Tenemos la fórmula ya vista:

$$p(A \cap B) = p(A) \,.\, p\,(B/A)$$

Analogamente se puede generalizar esta fórmula para el caso de tres sucesos:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \,.\, p(B/A) \,.\, p(C/A \cap B)$$

En efecto:

$p(A \cap B \cap C) = p[\,(A \cap B) \cap C\,]$ prop. asociativa

$= p\,(A \cap B).\, p(C/A \cap B)$ def. prob. condicionada.

$= p(A).p(B/A).p(C/A \cap B)$ c.q.d.

Ejemplo 1 :

Consideramos el experimento que consiste en extraer tres cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que sean rey, as y sota respectivamente.

Sean R_1 = { *sacar rey en la primera extracción* }.

A_2 = { *sacar as en la segunda extracción* }.

S_3 = { *sacar sota en la tercera extracción* }.

Será: $p(R_1 \cap A_2 \cap S_3) = p(R_1).\ p(A_2/R_1).\ p(S_3/A_2 \cap R_1) =$

$= 4/40\ .\ 4/39\ .\ 4/38 = 0.001$

Ejemplo 2 :

En un salón hay 3 personas. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas tengan su aniversario el mismo dia ?.

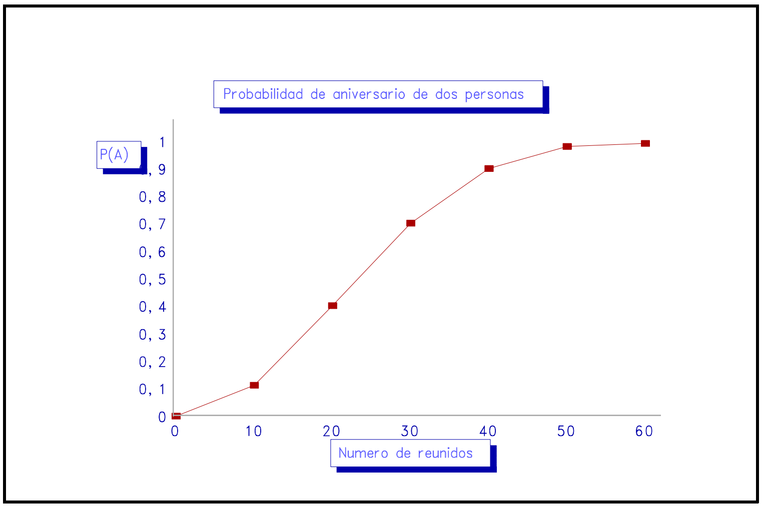
Sea A={tener el aniversario el mismo dia}.

Será A`={cada persona tiene el aniversario diferente a los demás}

Será p(A) = 1 - p(A`).

$p(A')=p(P1).p(P2/P1).p(P3/P1 \cap P2)=365/365\ .\ 364/365\ .\ 363/365$

p(A`)=0.99 de donde p(A)=0.01



Son curiosos los siguientes resultados que puede comprobar el alumno:

si al número de personas de la reunión, le llamamos n, se obtiene:

Si n=23 p(A)=0.5

Si n=50 p(A)=0.97

En definitiva en un grupo de 50 personas la posibilidad casi es el 100%.

Para el caso de n sucesos la fórmula anterior puede generalizarse formando un teorema que se conoce con el nombre de **Teorema de la probabilidad compuesta** o tambien teorema de la multiplicación para la probabilidad condicional.

Teorema de la probabilidad compuesta:

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son n sucesos dependientes de un mismo experimento aleatorio y tales que la probabilidad de la realización simultanea de los n sucesos no es nula, entonces

$\mathbf{p(A_1} \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n) = p(A_1).\ p(A_2/A_1).p(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots\ldots\ldots p(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

La demostración de este teorema se realiza por inducción, dado que para los casos n=2 y n=3 ya lo hemos visto.

Se supone por lo tanto que se verifica para n-1 y se demuestra para n basándose en la suposición anterior.

Ejemplo1:

En una sala de baile hay 3 pareja de novios. Si las parejas se forman completamente al azar, ¿ Cúal es la probabilidad de que cada novio baile con su novia?.

Sea A_1 ={ novio 1 baila con novia 1, que es la suya}
Sea A_2 ={ novio 2 baila con novia 2, que es la suya}
Sea A_3 ={ novio 3 baila con novia 3, que es la suya}

Nos piden $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ (aplicando la fórmula anterior)

$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=1/3 \ . \ 1/2 \ . \ 1 = 1/6= 1/3!$

Nota curiosa : es facilmente demostrable que si son n parejas la probabilidad es precisamente 1/n! .

Insistimos en qué en una buena parte de los ejemplos, el alumno debiera hacer un diagrama para contestar a las preguntas.

Ejemplo 2:

Juan va a una discoteca a bailar. En la discoteca hay un 60% de chicas morenas. A Juan no le gusta el olor a tabaco. En la obscuridad saca a una chica a bailar. ¿ Qué probabilidad tiene de bailar con una chica morena y para su desgracia fumadora?. Por cierto el 30% de las morenas son fumadoras.(El 20% de las no morenas fuman).

Evidentemente el ejercicio puede resolverse directamente si:

M={ser morena} , F={ser fumadora},

$p(M \cap F)=p(M).p(F/M)=60/100 \ .30/100= 18/100$

Con el diagrama quizás el alumno vea mejor el ejercicio y sin lugar a dudas podrá contestar a otras muchas preguntas:

El alumno puede calcular, además, la probabilidad de bailar con una chica morena no fumadora, así como la probabilidad de bailar con una chica no morena y no fumadora.

Ejemplo 3:

Un jugador de baloncesto que suele encestar un 70% de sus tiros libres, tiene que lanzar una personal de dos tiros libres.

Es posible que consiga 0 ó 1 ó 2 puntos.

¿ Qué es más fácil que suceda?

¿ Es más probable conseguir 0 puntos que 1 punto?.

¿ Es más probable obtener 1 punto que obtener 2 puntos ?.