Idea intuitiva de límite funcional.-

Observa la gráfica de la siguiente función: 

Podemos ver en la gráfica que a medida que los valores de x están más próximos a cero los valores de la función se “aproximan” más a dos.

Esto lo apreciamos claramente en la siguiente tabla de valores:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **0,1** | **0,01** | **0,001** | **0,0001** | **....** | **0** | **....** | **-0,001** | **-0,01** | **-0,1** |
| **f(x)** | 1,92 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 | ……. | 2 | …… | 2,0007 | 2,007 | 2,078 |

 Observa la gráfica de esta otra función:

Se puede observar claramente que cuando los valores de x se “aproximan” a -2 los valores funcionales de  se hacen cada vez mayores.

Esto se aprecia en la siguiente tabla de valores:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **-1,9** | **-1,99** | **-1,999** | **....** | **-2** | **...** | **-2,001** | **-2,01** | **-2,1** |
| **f1(x)** | 100 | 10000 | 1000000 | …. |  | …. | 1000000 | 10000 | 100 |

Observa la gráfica de esta nueva función:



En este caso podemos ver que a medida que los valores de x se hacen mayores los valores funcionales se “aproximan” cada vez más a cero.

Observa la siguiente tabla de valores:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **10** | **100** | **1000000** | **....** |  |
| **f1(x)** | 0,8 | 0,08 | 0,000008 | …. | 0 |

Por último, observa la gráfica de esta función: 

En este caso, sobre la gráfica se observa que a medida que los valores de “l” crecen los valores de “T” crecen, también, cada vez más.

Sobre una tabla de valores podemos comprobar lo dicho anteriormente:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **l** | **10** | **100** | **1000000** | **....** |  |
| **T** | 6,32 | 20 | 2000 | …. |  |

Todos estos ejemplos nos llevan a poder dar una idea intuitiva del significado del concepto de *límite funcional*.

*Diremos que el límite de una función **es* ******(  puede ser cualquier número real o ) *cuando x se aproxima a* ****** (puede ser cualquier número real o ) *si sucede que**cuanto más se concentran los valores de x en las proximidades de , los valores**funcionales correspondientes se concentran en las proximidades de .*

*Todo esto se escribe de modo matemático así:*

|  |
| --- |
|  |

1. Límite de una función en un punto.-

 A) LÍMITES LATERALES FINITOS.

 A1) Límite por la izquierda:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su izquierda,  toma valores cada vez más próximos al número .

 A2) Límite por la derecha:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su derecha,  toma valores cada vez más próximos al número .

*Ejemplo.-*

Observa sobre el gráfico de esta función como se cumple que:





Fíjate ahora en este otro ejemplo:



La función que tiene esta gráfica cumple que:





En el primer caso los límites laterales en el valor de x =2 son distintos, mientras que en el segundo ejemplo los límites laterales en el valor de x = 1 coinciden (valen cero).

Se dice entonces que si los límites laterales toman el mismo valor, es decir,  y  existe el límite de  en , se escribe:

|  |
| --- |
|  |

Si los límites laterales toman distinto valor en  se dice que no existe el límite de  en .

B) LÍMITES LATERALES NO FINITOS.

 B1) Límite por la izquierda:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su izquierda,  toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que éste sea.

 B2) Límite por la derecha:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su derecha,  toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que éste sea.

*Ejemplo.-*

En esta gráfica de la función  vemos que se verifica:





 B3) Límite por la izquierda:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su izquierda,  toma valores cada vez “más negativos”(o sea, más pequeños).

 B4) Límite por la derecha:

 Se dice que  si cuando x toma valores próximos a , por su derecha,  toma valores cada vez “más negativos”(o sea, más pequeños).

*Ejemplo.-*

En esta gráfica de la función  vemos que se verifica:

, 

Si  y  entonces: 

Si  y  entonces 

Si los límites laterales toman distinto valor en  se dice que no existe el límite de  en .

C) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

 C1) 

 *Siempre que no aparezca la indeterminación: *

 C2) 

  *Siempre que no aparezca la indeterminación: *

 C3)  *con* 

  *Siempre que no aparezcan las indeterminaciones: *

 C4)  *con *

 *(\*La función potencia solo está definida para valores positivos de la base)*

  *Siempre que no aparezcan las indeterminaciones: *

2. Límites en el infinito.-

A) LÍMITE FINITO.

 Se dice que  si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función  se concentran en las proximidades de .

 Se dice que  si al hacer los valores de x tan negativos como queramos los valores de la función  se concentran en las proximidades de .

 Se dice que  no existe, si al aumentar (o disminuir) los valores de x cada vez más (cada vez más pequeños) los valores de  ni crecen ni decrecen ni se acercan, cada vez más, a ningún número.

*Ejemplo.-*

  

 B) LÍMITE NO FINITO.

 Se dice que  si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función  son cada vez más grandes.

 Se dice que  si al aumentar los valores de x tanto como queramos los valores de la función  son cada vez más negativos.

 Se dice que  si al hacerse más negativos los valores de x los valores de la función  se hacen cada vez más grandes.

 Se dice que  si al hacerse más negativos los valores de x los valores de la función  se hacen cada vez más negativos.

Todo lo referente a las propiedades de los límites de una función en un punto se cumple también en el caso de límites en el infinito. Es decir, todas las propiedades vistas en el apartado anterior se cumplen ahora poniendo en lugar de , 

*Ejemplo.-*

 Observa sobre la gráfica de la función que se cumple:

 



 En la gráfica de  puedes ver que se cumple:

 

Dibuja tú la gráfica de una función que modelice los límites:

  y 

*Observación.-* Al calcular este tipo de límites en el infinito puede que obtengamos una indeterminación (en apariencia), que no lo es en realidad.

**Comparación de infinitos**

Si tenemos que  y 

Se dice que  es un **infinito de orden superior** a si se verifica:

 o lo que es lo mismo: 

Es fácil comprobar las siguientes afirmaciones:

* Dadas dos potencias de “x”, la de mayor exponente es un infinito de orden superior: 
* Dadas dos funciones exponenciales **de bases mayores que 1**(el límite cuando  de estas funciones es un **infinito** pues cuando  se dice un **infinitésimo**), la de mayor base es un infinito de orden superior. 
* Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia: 
* Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1 como las potencias de “x” son infinitos de orden superior a cualquier función logarítmica: 
* Dos polinomios del mismo grado o dos potencias de la misma base son infinitos del mismo orden, es decir: 

 

**Familiarízate con estos sencillos resultados pues son muy útiles para el cálculo de límites.**

**3. Ramas infinitas. Asíntotas de una curva.-**

Al desarrollar el tema nos hemos encontrado en alguna ocasión tramos de una curva que se alejan indefinidamente, son las llamadas **Ramas infinitas.**

Cuando una Rama infinita se ciñe (se aproxima) a una recta, a esta recta se la llama **Asíntota** de la curva y a la rama correspondiente se le llama:

**Rama asintótica.**

**A) Rama infinita en x=a. Asíntota Vertical.**

Las únicas ramas infinitas que se pueden encontrar en valores concretos de la abscisa son las ramas asintóticas verticales.

Así, si una función  verifica que  decimos que  es una **Asíntota Vertical** de dicha función.

La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de los límites laterales.

*Ejemplo.-*

Las Asíntotas verticales de la función  son: 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Posición** |  |  |  |  |
|  | -0,01 | 0,01 | 1,99 | 2,01 |
|  | positiva | negativa | negativa | positiva |
| **resulta** |  |  |  |  |



 

 

*Ejemplo.-*

Observa la gráfica de la función e indica si tiene Asíntota Vertical:



En este caso la función presenta una **Asíntota vertical** 

Porque se verifica que: y 

 En consecuencia: 

**B) Ramas infinitas cuando .**

 **Asíntota Horizontal. Asíntota oblicua. Rama Parabólica.**

 Hay varios tipos de ramas infinitas cuando **:**

 **B1) Asíntota Horizontal.-** Si se verifica que  decimos entonces que la recta de ecuación  es **Asíntota Horizontal** de la función.

La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de .

*Ejemplo.-*

La función  tiene una **Asíntota Horizontal ** , se cumple que:  y , la posición de la curva respecto a la Asíntota la determina el **signo de la diferencia entre los valores:**

****

(Tiene además una Asíntota vertical en )

*Ejemplo.-*

La función cuya gráfica es la dada más abajo, tiene una **Asíntota horizontal** 



Se cumple que 

Evidentemente la gráfica muestra que la función está por encima de la Asíntota para los valores de 

*Ejemplo.-*

La función cuya gráfica es la de , tiene **Asíntota horizontal** 



Se cumple que 

Evidentemente la gráfica muestra que la función está por debajo de la Asíntota para los valores de 

**B2) Asíntota Oblicua.-** Hay funciones  que al hacer que (o que ) se aproximan mucho a una recta de ecuación

 ciñéndose a ella. Dicha recta se dice **Asíntota Oblicua**  para esa función.

Para que dicha recta sea Asíntota Oblicua de  se ha de cumplir



La posición de la curva respecto a la asíntota depende del signo de .

*Ejemplo.-*

La función  tiene una Asíntota Oblicua 





|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **50** | **100** | **1000** | **→** | **∞** |
|  | 47,98 | 97,99 | 997,999 |  |  |
|  | 48 | 98 | 998 |  |  |
| **DIFERENCIA** | 0,02 | 0,01 | 0,001 | → | 0 |

*Ejemplo.-*

La función  tiene una Asíntota oblicua.

Asíntota Oblicua: 

Haz tú los cálculos como en el ejemplo anterior:

 **B3) Ramas Parabólicas.-** Si se cumple  y la curva no tiene AsíntotaOblicua entonces la curva presenta una **Rama Parabólica**. Hay dos tipos:

1. **Tipo 1.-** La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las *funciones polinómicas y exponenciales*.
2. **Tipo 2.**- La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las ramas parabólicas de las *funciones radicales**y logarítmicas*.

*Ejemplo.-*

La función  tiene una **Rama parabólica tipo 2**



La función crece cada vez más despacio.



*Ejemplo.-*

La función  tiene una **Rama parabólica tipo 1**

****La función decrece cada vez más rápido.



*Ejemplo.-*

Dadas las funciones:  y . Determina sus ramas parabólicas.



**4. Calculo de Límites. El número e.-**

 A) INDETERMINACIÓN 

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:



Por tanto se cumple que: =

**Observa la gráfica de**: 

En otros casos, sobre todo aquellos en que aparecen radicales, basta multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

*Ejemplo.*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla multiplicamos y dividimos la expresión dada por su conjugada.

==

Evidentemente el último límite es más infinito pues crece más rápidamente el numerador que el denominador.

B) INDETERMINACIÓN 

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla efectuamos la operación indicada entre paréntesis:

 y en consecuencia:

=

 C) INDETERMINACIÓN 

 Cuando solamente aparecen funciones racionales basta con descomponer factorialmente numerador y denominador.

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla descomponemos factorialmente numerador y denominador.

 en consecuencia:

=

En aquellos casos en los que aparecen radicales, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla multiplicamos numerador y denominador por .

===

D) INDETERMINACIÓN 

 En la mayoría de los casos basta con dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x del denominador.

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla dividimos numerador y denominador por 

===

*Ejemplo.-*

Calcula el siguiente límite: indeterminación 

Para resolverla dividimos numerador y denominador por 

====

Observa la siguiente gráfica:

**Gráfica de**:







Observa que en el caso de que  el límite:  se obtendría dividiendo numerador y denominador por: 

(Dentro de una raíz cuadrada el número ha de ser positivo) y así se explica que ese límite valga -1.

E) INDETERMINACIÓNES: 

Para resolver este tipo de indeterminaciones usaremos la denominada

**Regla de L’hôpital** basada en las derivadas y que veremos más adelante.

De todas formas (si la indeterminación es ) hay una fórmula de resolución para esa indeterminación de uso muy frecuente basada en el número e. Veámosla, pero primeramente recordemos que:

La sucesión numérica definida por tiene límite finito cuyo valor es un número irracional que se representa por la letra ().

Aproximadamente este número vale:

Veamos ahora distintos límites relacionados con el número  que nos van a permitir establecer la fórmula de resolución de las indeterminaciones: 

 A) (siendo  cualquier sucesión con)

En efecto, hagamos  tenemos que y 

 Sustituyendo en A) 

B) 

Si hacemos  tendremos que: y 



C) 

Si hacemos  tendremos que: y 



D). En efecto:



E) Sean  y  dos sucesiones tales que:  y 

En este caso tendremos la indeterminación: 

Se verifica la siguiente igualdad de límites:

|  |
| --- |
|  |

Como:  y A)



*Ejemplo.-*

Calcula el límite: tenemos una indeterminación 

Aplicamos pues la fórmula dada más arriba y tenemos que:

==

Calcula tú como ejercicio el límite siguiente del mismo modo:

 **Solución**: 

**5. Función continua en un punto y en un Intervalo.-**

 La idea de función continua es, como ya sabemos, la de aquella cuya gráfica puede ser construida con un solo trazo.

 Al trabajar con la expresión analítica de la función, veremos que el concepto de límite es fundamental para el estudio de la continuidad, de tal modo que estableceremos **un criterio**, *basado en el límite*, para determinar cuando una función es o no **continua**.

*Ejemplo.-*

Observa las gráficas de distintas funciones:



Esta función tiene por expresión analítica:



*Observa su* ***trazo continuo en todo ***



Esta otra función tiene por expresión analítica:



*Observa su* ***trazo continuo en su dominio***

**

En estos dos primeros casos las funciones dadas son ambas de trazo continuo, pero hay otros casos en los que las funciones tienen una gráfica que no puede ser dibujada con un único trazo. Veamos distintos casos:



Esta función tiene por expresión analítica:



*Observa su* ***trazo no continuo en el valor de x=3***

*En los demás puntos de su dominio su trazo es continuo*

Observa las gráficas de distintas funciones que no tienen un único trazo y por tanto no son continuas:

Veamos pues ahora cual es la formalización matemática del concepto de continuidad.

Diremos que una función de expresión analítica  es **continua en un “punto” de su dominio ** si se verifican estas condiciones:



*Observación 1: la palabra existe de la condición a) quiere decir que el resultado sea un número real*

*Observación 2: la condición c) basta para definir la continuidad en un punto de la función dada pues si esta condición c) se verifica, necesariamente se han de dar a) y b).*

*Observación 3: cuando una función no es continua en un punto se dice* ***discontinua***

Diremos que una función  es **continua en un intervalo abierto**  si es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Diremos que una función  es **continua por la derecha** en un punto de su dominio  si se cumple 

Diremos que una función  es **continua por la izquierda** en un punto de su dominio  si se cumple 

Diremos que una función  es **continua en un intervalo cerrado**  si:

1.  es continua en el intervalo abierto 
2.  es continua por la derecha en 
3.  es continua por la izquierda en 

*Es conveniente señalar aquí que todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas) son todas continuas en los puntos en los que están definidas (o sea, en su dominio).*

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

Sean y  dos funciones continuas en  se tiene entonces que:

1.  es continua en 
2.  es continua en 
3.  es continua en 
4.  es continua en ( suponiendo )

**Tipos de Discontinuidad de las Funciones.-**

Ya hemos señalado anteriormente que una función es **Discontinua en un punto** cuando no cumple alguna de las tres condiciones de continuidad en ese punto.

De ahí que podamos establecer distintos tipos de Discontinuidad:

1. ***Evitable.-*** Cuando existe el  pero no coincide con el valor de ,por una de estas dos razones, son distintos los valores o no existe 

 *Ejemplo.-*



**(*En este caso el punto es:*)**

***El valor de la función en el punto es:***

***El valor del límite en ese punto es:***

***En este caso son distintos los valores.***

**(*En este caso el punto es: *)**

***El valor de la función en el punto*** ***No existe***

***El valor del límite en ese punto es*** 

***En este caso no existe*** 

1. ***De Salto.***- Cuando existe el límite por la derecha y por la izquierda (siendo ambos finitos) pero no coinciden.

 *Ejemplo.-*

****** y 

***En este caso los límites laterales no coinciden siendo ambos finitos.***

****

1. ***Asintótica.***-Alguno de los límites laterales(o ambos) no es finito.

 *Ejemplo.-*



***Para esta función los límites laterales en son ambos no finitos, de hecho:***

*** ***

1. ***Esencial.-***  Cuando no existe alguno (o ambos) de los límites laterales

  *Ejemplo.- Observa la gráfica de la siguiente función:*

  ***No hay; ***

