

Explorando funciones con Geogebra

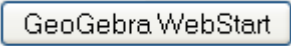
GeoGebra es un software de matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo.

Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori se pueden modificar dinámicamente.

Cómo introducir funciones en Geogebra y desplazarte por ellas para explorar sus propiedades.

Para **instalar** el programa en el ordenador de casa:

0. Instala Geogebra en tu ordenador. Entra en la dirección www.geogebra.org, selecciona la opción **WebStart-Teleinicio** (es el tercer enlace del marco de la izquierda) y pulsa sobre el

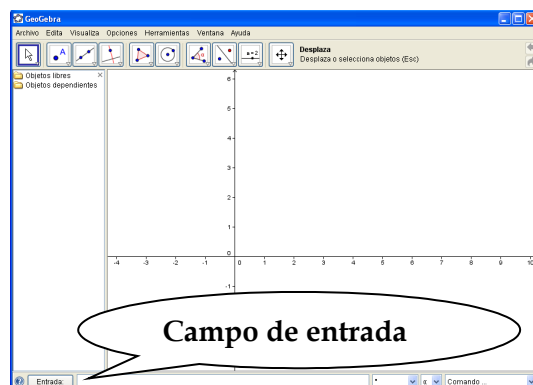
botón 

1. Abre Geogebra. Haz doble clic sobre el icono del programa y se abrirá la aplicación.

2. Introducir y representar una función. Escribe

su ecuación en el *Campo de Entrada*. Las funciones pueden escribirse de distintas maneras.

- **Modo 1 de escribir la función.** Escribe la función $y = 2x + 3$ y pulsa la tecla **Enter**. Observa cómo se representa gráficamente la función y

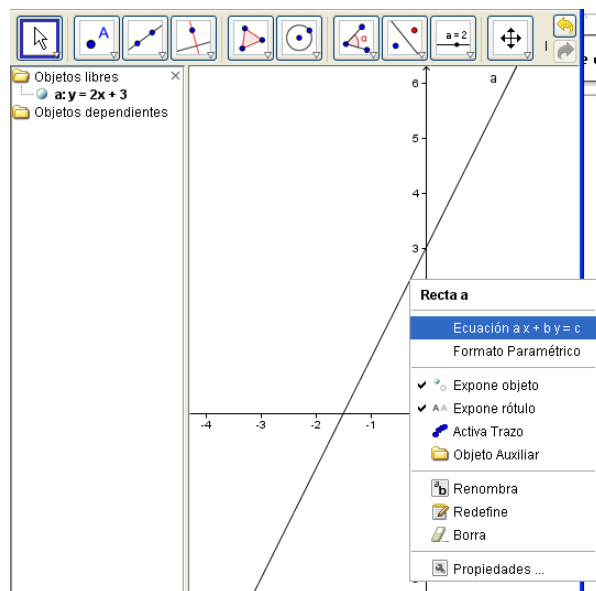


queda seleccionada la opción **Desplaza**



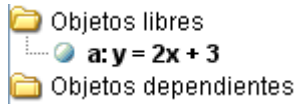
que se usa para la selección de los objetos creados.

- Señala con el ratón la recta trazada, observa cómo queda resaltada en negrita y pulsa el botón **derecho** del ratón para que aparezca el **menú contextual** que nos permite modificar las propiedades del objeto.



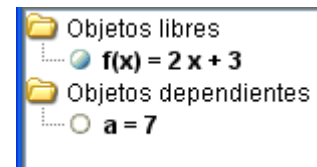
Selecciona **Propiedades** y con las fichas **Color** y **Estilo** le cambias el color y la anchura del trazo de la recta.

- **Borra la función.** Selecciona la ecuación de la función en la ventana de la izquierda



y pulsa la tecla Suprimir. También puedes usar la opción **Borra** del menú contextual.

- **Modo 2 de escribir la función.** Vamos a escribir la misma función pero usando la expresión $2x-y=-3$. Tecléala y observa cómo también se representa. Bórrala.
- **Modo 3 de escribir la función.** Una tercera forma de introducir esta función es escribirla como $f(x)=2x+3$. Escríbela y observa cómo también se representa. Escribe en la barra de entrada $f(2)$ y pulsa **Enter**, observa cómo se calcula su valor en la ventana de la izquierda, que en adelante llamaremos Ventana Algebraica ($a=7$).



Ejercicios.

1. Calcula de $f(x)$ para $x=-3, -2/4, \sqrt{2}$ (escribe: sqrt(2)).

2. Representa gráficamente las funciones siguientes (bórralas antes de representar la siguiente):

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{-3}{4}$$

$$y = -3$$

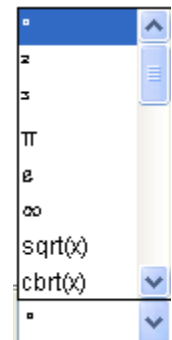
$$x = 4$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = -x^2 + 2x - 3$$

$$h(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$$

3. Representa las funciones: $y = e^x$ $y = \ln(x)$ $y = |x|$



Puedes usar los objetos predefinidos de la ventana de la derecha de la barra de entrada que se muestra en la figura.


3. Desplázate por la gráfica

Ahora vamos a diseñar un punto que podemos desplazar sobre la gráfica de la función y nos muestra sus coordenadas.

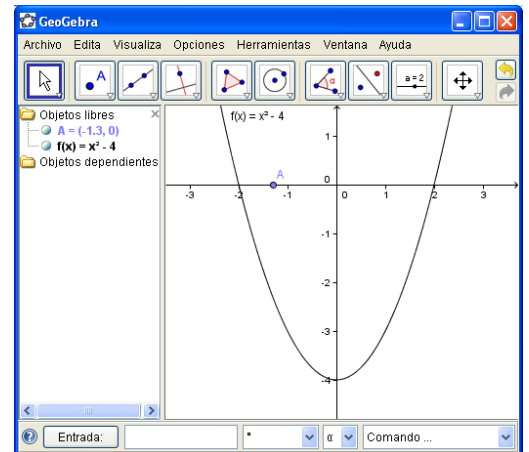
Para hacerlo debemos diseñar previamente otros objetos como se indica a continuación:

Paso 1: Representamos gráficamente la función que queremos estudiar. En este caso vamos a representar la función $y = x^2 - 4$. Representáala.

Paso 2: Construimos un punto que se desplace solo por el eje de abscisas (eje de las x).

- Selecciona la opción **Nuevo Punto**  y marca un punto cualquiera del eje de abscisas. Verás como se ha creado un **punto A** y en la Ventana Algebraica se muestran sus coordenadas. Selecciona la


- herramienta de **Desplaza**  y mueve el punto creado. ¿Se puede mover libremente o está limitado su desplazamiento?

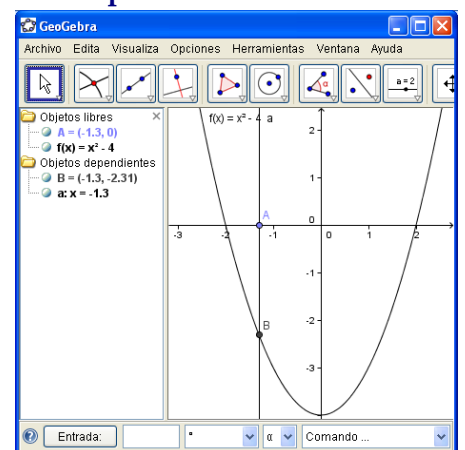


Si este punto lo hubiésemos creado sobre la gráfica de la función, se movería sobre ella. Este es el punto que queremos crear, pero vamos a hacer que se mueva cuando desplazemos el punto creado sobre el eje OX.

Paso 3: Crear el punto B de la gráfica cuya abscisa coincide con la del punto A.

Basta con trazar por el punto A una recta perpendicular al eje OX, el punto de intersección de esta recta y la gráfica de la función es el punto B buscado. Mira la imagen de la derecha.

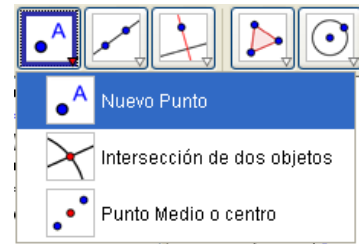
- Selecciona la opción **Recta Perpendicular**  (es el cuarto icono comenzando por la izquierda) y marca con el ratón el punto A y el eje OX, se creará como objeto dependiente la recta de ecuación $x = \langle \text{valor de la abscisa del punto A} \rangle$ (en la figura $x = -1.3$).



Ahora tenemos que crear el punto B, intersección de la recta perpendicular creada y la gráfica de la función $f(x)$.

(Los botones de geogebra son botones que se despliegan y muestran nuevas opciones al pulsar sobre la flechita que hay en su vértice inferior derecho).

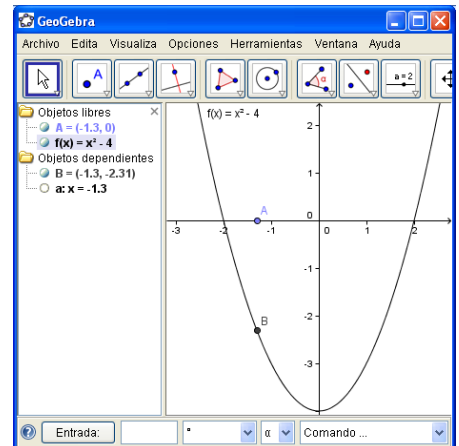
- Despliega las opciones del botón Nuevo Punto pulsando sobre su vértice inferior derecho y **selecciona la opción Intersección de dos objetos**.



Si cuando tienes esta opción seleccionada, pulsas sobre la gráfica y la recta, se **crea el punto B**, intersección de ambas.

- **Ocultamos la recta perpendicular.**

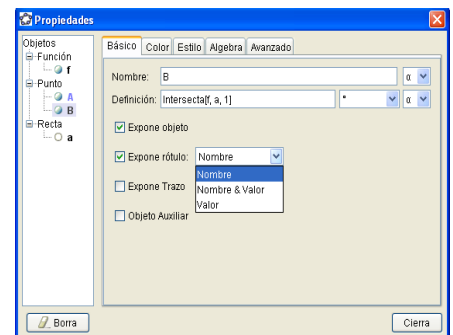
Selecciona la recta perpendicular, pulsa el botón derecho del ratón para que aparezca el menú contextual, verás que está marcada la opción **Expone Objeto**, pulsa sobre ella para desmarcarla.



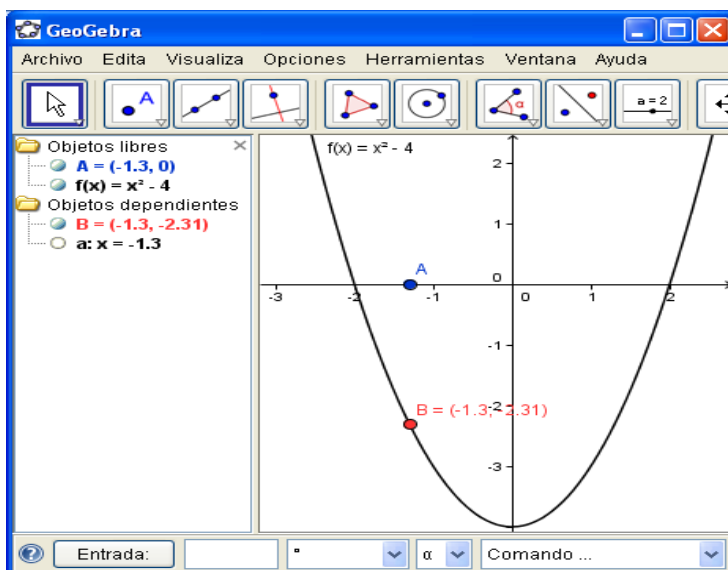
- **Mostramos las coordenadas del punto B**

Selecciona el punto B, accede a su menú contextual, selecciona **Propiedades**, selecciona la ficha Básico y en **Expone rótulo**, selecciona **Nombre & Valor**.

Usa las opciones de las fichas Color y Estilo para modificar el color y el tamaño del punto.



La aplicación ha debido quedar así:



Prueba la aplicación

Selecciona el punto A y desplázalo sobre el eje de abscisas, el punto B debe desplazarse sobre la gráfica y mostrar sus coordenadas. Observa que las coordenadas del punto B son los valores de x del punto A y los de $x^2 - 4$.

Ejercicios de aplicación

Usa la aplicación diseñada para determinar las raíces de un polinomio

1. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 4$

Representa la función $f(x) = x^2 - 4$, desplaza el punto A y determina los puntos B de coordenadas $(x, 0)$. Observa que coinciden con los puntos en los que la gráfica corta al eje de abscisas.

Usa la aplicación diseñada para resolver ecuaciones e inecuaciones

1. Resuelve la ecuación $x^2 - 4 = 0$.

Desplaza el punto A sobre el eje de abscisas, observa las coordenadas del punto B y determina los valores de x para los que la ordenada de B vale 0. Observa que coinciden con los puntos en los que la gráfica corta al eje de abscisas.

2. Resuelve la inecuación $x^2 - 4 < 0$

Desplaza el punto A y determina los valores de $-x$ para los que la función $f(x) = x^2 - 4$ es negativa. Observa que corresponden con los puntos de la gráfica que se encuentran por debajo del eje de abscisas.

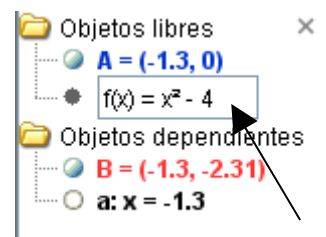
3. Resuelve la inecuación $x^2 - 4 > 0$.

Desplaza el punto A y determina los valores de $-x$ para los que la función $f(x) = x^2 - 4$ es positiva. Observa que corresponden con los puntos de la gráfica que se encuentran por encima del eje de abscisas.

4. Resuelve la inecuación $x^2 > 4$

Usa la aplicación diseñada para representar funciones distintas a $f(x) = x^2 - 4$

Para modificar la definición de la función basta con escribirla de nuevo en la barra de entrada o bien con que hagas doble clic sobre su expresión en la ventana algebraica y escribir la nueva definición.



También puedes usar la aplicación diseñada para resolver todo tipo de ecuaciones e inecuaciones con una incógnita

1. Resuelve la inecuación $x^2 - 3x + 7 \leq 0$.

2. Resuelve la inecuación $x^2 - 3x + 7 > 0$

3. Estudia el signo de la función $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$.

4. Resuelve la ecuación $\frac{2 - 3x}{4} + \frac{x - 1}{2} \leq \frac{5x - 1}{6}$. Esta inecuación es equivalente a

$\frac{2 - 3x}{4} + \frac{x - 1}{2} - \frac{5x - 1}{6} \leq 0$. Representa la función $f(x) = \frac{2 - 3x}{4} + \frac{x - 1}{2} - \frac{5x - 1}{6}$ y determina los puntos en los que vale 0 o es negativa.

5. Resuelve la inecuación $\frac{x^2 - x}{x + 3} \geq 0$. Usa el zoom para tener una visión más precisa de la

gráfica de la función. ¿Para qué valores de $-x$ cambia de signo la función? ¿Qué valor toma la función en los puntos en los que se produce el cambio de signo?