Soluciones examen 11 noviembre 2014

1.a) Teorema del valor medio del cálculo diferencial: Enunciado e interpretación geométrica

Ver teoría

b)Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{bx}+2 \text{ si } x<0 \\ a+L(x+1) \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$, calcula los valores de a y b para que verifique las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-1,1]

La función $y=e^{bx}+2$ es continua y derivable en R, por ser una función elemental, por tanto será continua en [-1,0) y derivable en (-1,0). La función y=a+L(x+1) es continua y derivable en su dominio: $(-1,\infty)$, por serlo la función logarítmica, por tanto será continua en (0,1] y derivable en (0,1). Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio solo faltará comprobar que la función de partida es continua y derivable en x=0.

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{bx}+2 = e^0+2=3$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a+L(x+1)=a$; f(0)=a

Por tanto para que la función sea continua en x=0 es preciso que a=3.

Derivabilidad en x=0: $f'(x)=\begin{cases} b.e^{bx} \text{ si } x<0 \\ \frac{1}{x+1} \text{ si } x>0 \end{cases}$

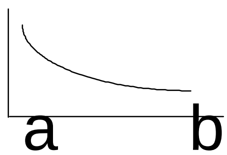
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} b.e^{bx} = be^0 = b$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$. Por tanto para que sea derivable es preciso que a=3 y b=1

2. Enunciado del teorema de Weiersstrass.(ver teoría)

Si una función f(x) es continua en [a,b] y es estrictamente decreciente en ese intervalo, ¿donde alcanzará los puntos a los que se refiere el teorema?

De la definición de función estrictamente decreciente en [a,b] se sigue que cualquier punto x perteneciente al intervalo (a,b) verificará que f(a)>f(x)>f(b) por lo que el máximo absoluto del intervalo lo alcanza en x=a y el mínimo en x=b,

como puede verse en el siguiente gráfico:



3. Determinar los puntos de la curva $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-7x+1$ en los que la recta tangente a la curva forme un ángulo de 135º con la parte positiva del eje de abscisas. Halla la recta tangente en uno de dichos puntos

Dado que la pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con la parte positiva del eje OX, el enunciado me está diciendo que la pendiente de la recta tangente es igual a tg135=-1. Y como sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, necesitamos buscar un punto de la curva cuya derivada valga -1.

Procedemos a derivar la función e igualar a -1 para calcular los puntos que nos piden:

Y'= $3x^2/3+2x/2-7=x^2+x-7=-1\Rightarrow x^2+x-6=0$ y, resolviendo la ecuación obtenemos x=2 y x=-3 que serán los puntos buscados.

Nos dicen ahora que calculemos la recta tangente en uno de dichos puntos. Escogemos por ejemplo x=2 y hallamos su recta tangente: $x_0=2$; $y_0=f(2)=-25/3$; m=f ' (2)=-1. Por tanto la recta tangente en x=2 es -1(x-2)=y+25/3

4.a) Demuestra que la ecuación senx+2x+1=0 tiene una única solución real.

Consideremos la función y=senx+2x+1, que es continua y derivable en todo R por ser suma de funciones elementales. Vamos a demostrar en primer lugar que tiene alguna raíz real, para lo que utilizaremos el teorema de Bolzano. Necesitamos encontrar un intervalo en cuyos extremos las imágenes tengan distinto signo. Tomemos, por ejemplo el intervalo $[-\pi/2, 0]$ $f(-\pi/2)=sen(-\pi/2)+2.(-\pi/2)+1=-1-\pi+1=-\pi<0$; f(0)=1>0. Como en el intervalo $[-\pi/2, 0]$ la función es continua cumple el teorema de Bolzano, es decir posee una raíz en $(-\pi/2, 0)$. Hemos demostrado por lo tanto que la ecuación de partida al menos posee una solución real.

Para demostrar la unicidad utilizaremos el corolario del teorema de Rolle que afirma que entre dos raíces cualesquiera de una función continua y derivable se encuentra una raíz de su función derivada. Hallamos entonces la derivada de f y comprobams cuántas raíces tiene:

f ' (x)=cosx+2=0⇒cosx=-2, lo que no ocurre para ningún valor de x al variar la función coseno entre -1 y 1. Por tanto la función derivada no posee ninguna raíz real y por ello, aplicando el corolario del teorema de Rolle, la función de partida no puede tener 2 raíces reales.

b) Enuncia los teoremas en los que te basas para resolver el apartado anterior y explica su interpretación geométrica (ver teoría)

5.a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}$ Es una indetermintición del tipo 1^∞

Sea A=$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{tgx}\Rightarrow$ LA=$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx.L(1-\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L(1-\cos x)}{ctgx}\underset{*}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{senx}{1-\cos x}}{-\cos ec^2x}=\frac{1}{-1}=$

=-1$\Rightarrow A=e^{-1}$ (*= aplicando la regla de L'Hôpital)

b) Estudiar la continuidad en R de la función f(x)= $\begin{cases}\frac{senx}{x} si\ x>0\\ x+1 \text{ si } x\le 0\end{cases}$ La función y=senx/x es continua en R-{0} por ser un cociente de funciones elementales y, por tanto, es continua en $(-\infty,0)$; La función y=x+1 es continua en R por ser polinómica y, por tanto, lo es en $(0,\infty)$. Nos falta entonces estudiar la continuidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{senx}{x} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$; f(0)=1. Por tanto la función es continua en x=0 y, en consecuencia, en todo R

(* es un límite del tipo 0/0 y aplicamos la regla de L'Hôpital)

c) $\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x$. Dado que el límite de y=e^x es diferente cuando x→ ∞ y cuando x→ –∞ hemos de hacer ambos límites por separado.

$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x = \infty.\infty = \infty.$

$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} \underset{*}{=}. \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$

(* es un límite del tipo ∞/∞ y aplicamos la regla de L'Hôpital)

PUNTUACIONES:

Ejercicio 1: apartado a) 1; apartado b)1

Ejercicio 2: 1'25 puntos

Ejercicio 3: 1´5 puntos

Ejercicio 4: apartado a) 1´5 puntos; apartado b)1'5 puntos

Ejercicio 5 0'75 cada uno=2'25