DISTRIBUCIONES DE PROBABILDAD

VARIABLE ALEATORIA

Cuando realizamos un experimento aleatorio es usual que no nos interese el resultado completo del mismo sino observar una característica del mismo que puede ser medible numéricamente. Así, al observar las familias de una población, puede interesarnos únicamente conocer el número de hijos varones o únicamente la edad de la esposa,etc. El concepto de variable aleatoria va a permitirnos asociar a cada suceso del experimento un número real.

Comencemos analizando algunos ejemplos:
1. Consideremos el experimento consistente en lanzar dos monedas al aire. Su espacio muestral será: E={ (x,x), (x,c), (c ,x), (c,c)} .
Supongamos ahora que solo nos interesa estudiar la variable X={número de caras obtenidas}, los resultados que se podrían dar toman los valores {0,1,2}, asociando a cada elemento del espacio muestral un número: el de caras de ese suceso.

X: E--------------------→ R
(c,c)------------------→ 2
(c,x)------------------→ 1
(x,c)------------------→ 1
(x,x)------------------→ 0

A esta aplicación le llamaremos variable aleatoria asociada al experimento.
NOTA:Es evidente que a un mismo experimento pueden asociarse distintas variables aleatorias, según lo que estemos estudiando. En el ejemplo anterior si hubiésemos estudiado el número de cruces la aplicación, es decir la variable aleatoria, variaría.

2.- Consideremos el experimento consistente en lanzar dos dados, cuyo espacio muestral viene dado por: E= {(1,1),(1,2),.............,(6,1),........,(6,6) }. La ley que asocia a cada suceso de dicho espacio la suma de los puntos obtenidos es una variable aleatoria que toma los valores:X={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.
La ley que asocia a cada suceso el mayor de los números obtenidos, es otra variable aleatoria, asociada al mismo experimento, que toma valores Y={1,2,3,4,5,6 }.
3.- Consideremos el experimento que consiste en observar si las piezas fabricadas, en una determinada fábrica, son o no defectuosas. Su espacio muestral es E={ D, $\overline{D}$ }. En este caso la observación que realizamos es cualitativa y no cuantitativa, pero aún así podemos asociar a cada uno de estos resultados un número, por ejemplo: 0 si es defectuosa y 1 si es no defectuosa, dando lugar a una variable aleatoria que toma los valores X={0,1}

X: E------------------→ R
D------------------→ 0
$\overline{D}$------------------→ 1

Vemos por lo tanto, que en todo experimento podemos asociar a cada uno de los resultados obtenidos un número real. A esta asociación o aplicación se le llama variable aleatoria.

Definición:

Dado un experimento aleatorio S cuyo espacio muestral es E, llamaremos variable aleatoria asociada a dicho experimento a toda aplicación X: E-----------→ R que asocia a cada suceso del espacio muestral un número real.

Por abuso del lenguaje es frecuente confundir la variable aleatoria como ley o función con el conjunto de valores que toma y así diremos: dada la variable X={ $x_1,x_2,.....x_n$} en lugar de decir la variable X que asocia a los sucesos {$S_1,S_2,.....S_n$} valores {$x_1,x_2,....x_n$} respectivamente

La variable se llamará discreta si sólo puede tomar unos ciertos valores que no admiten subdivisiones sucesivas. Se llamará continua si puede tomar todos los valores correspondientes a un intervalo de la recta real, o lo que es lo mismo si sus valores admiten subdivisiones sucesivas.

Ejemplos:

1.- La variable que representa el número de caras obtenidas en el lanzamiento de tres monedas al aire toma los valores {0,1,2,3}. Es discreta

2.- La variable que representa el perímetro craneal de una serie de individuos toma los valores [40,100] (medida en cm.). Es continua.

3.- La variable que asocia al lanzamiento de dos dados los números 0 si la suma obtenida es par y 1 si es impar, toma los valores {0,1}. Es discreta.

4. La variable que asocia al lanzamiento de dos dados el menor de los números obtenidos es discreta y toma los valores {1,2,3,4,5,6} Nota: observar que en los dos últimos ejemplos el experimento es el mismo pero la variable aleatoria no.

5. La variable aleatoria X={tiempo invertido por un alumno en ir a su casa desde el instituto} es continua y toma los valores [t_m , t_M] entre los valores mínimo y máximo de tdos los alumnos de dicho instituto.

NOTA: hay variables discretas que pueden tomar infinitos valores distintos pero sin subdivisiones sucesivas. Por ejemplo: lanzamos un dado y observamos el número obtenido, si es un 6 paramos el experimento, si no lo es volvemos a tirar. La variable X={número de veces que hemos lanzado el dado antes de detenernos} es discreta pero su recorrido es todos los números naturales.

VAMOS A CONTINUACIÓN A HACER EL ESTUDIO DE LAS VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Consideremos el siguiente ejemplo: lanzamos 240 veces un dado obteniendo los siguientes resultados:

CARA	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	40	39	42	38	42	39

Construyamos la distribución de frecuencias relativas, a la izquierda, y a la derecha representemos los resultados esperados, mediante el cálculo de probabilidades, si imaginamos que ralizásemos un número infinito de pruebas. La consideración de los resultados posibles y sus probabilidades da lugar a la noción de función de probabilidad.

CARA	f_r	f_r
1	40/240	0'1667
2	39/240	0'1625
3	42/240	0'1750
4	38/240	0'1583
5	42/240	0'1750
6	39/240	0'1625

Distribución de frecuencias

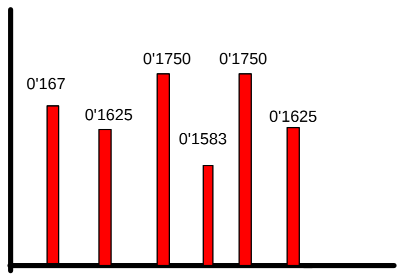
CARA	PROBABILIDAD
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Distribución de probabilidad

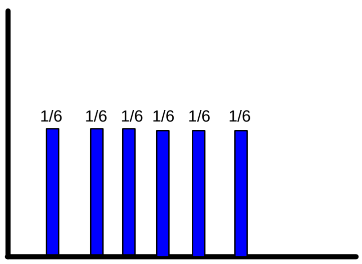
Si nos fijamos en la tabla de la derecha., observamos que a cada valor de la variable le hacemos corresponder su probabilidad. A esa aplicación se le llama función de probabilidad o función de masa de probabilidad o distribución de probabilidad. La distribución de probabilidad es el modelo matemático de la distribución de frecuencias relativas.

Tenemos así los conceptos de muestra, frecuencia relativa y distribución de frecuencias como nociones concretas; de los cuales, por un proceso de abstracción, surgen los conceptos teóricos de población, probabilidad y función de probabilidad.

Una función de probabilidad como la anterior, es susceptible de una representación, mediante un diagrama de barras análogo al que puede hacerse para una distribución de frecuencias.



Modelo experimental



Modelo teórico

Definición

Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $\{x_1,x_2,.........,x_n\}$ *. LLamamos función de probabilidad o función de masa de probabilidad asociada a X a la aplicación:*

f: R---------------------------→[0,1] *definida como :* f(x)=P(X=x)

Obsérvese que si $x \notin Im(X)$, $f(x)= P(X=x)=P(\emptyset)=0$; en caso de que $x=x_i \in Im(X)$, $f(x_i)=P(X=x_i)$ será la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales cuya imagen por X sea x_i.

Tambien es importante observar que $p(x_1)+p(x_2)+....+p(x_n)=1$ ya que es la probabilidad del suceso seguro

Ejemplo:

Consideremos el experimento consistente en lanzar dos monedas y observemos el número de caras obtenidas. E={(c,c),(c,x),(x,c),(x,x)} y la variable X=" número de caras" toma los valores {0,1,2}

la función de probabilidad vendrá dada por f(x)=0 si $x \notin \{0,1,2\}$; f(0)= P(X=0)=1/4

f(1)=P(X=1)=1/2; f(2)=P(X=2)=1/4

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta, definida sobre un espacio muestral E, llamamos función de distribución de X a una aplicación que asigna a cada número real x la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que él.

$F : R$-------------------------$\rightarrow[0,1]$
x-------------------------$\rightarrow P(X \leq x)$

Es el modelo teórico de la distribución de frecuencias relativas acumuladas.

Ejemplo:
Lanzamos un dado y observamos la variable X=" número de la cara obtenida"
la función de probabilidad viene dada por f : R---------------$\rightarrow$[0,1] tal que: $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=1/6$; $f(x)=0\ \forall x \notin \{1,2,3,4,5,6\}$

Su función de distribución será: F : R------------------$\rightarrow$[0,1] tal que:

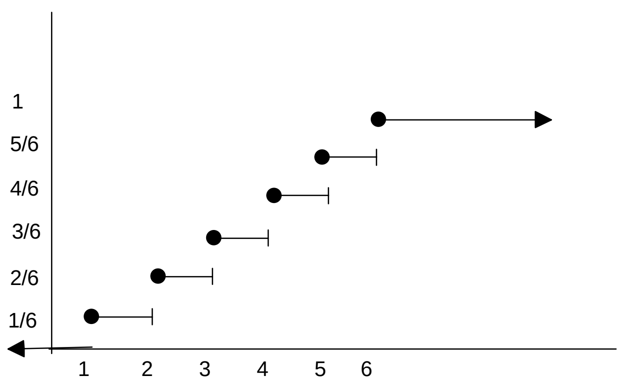
$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<1 \\ 1/6 \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 \text{ si} 3 \leq x < 4 \\ 4/6 \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 \text{ si } x \leq 5 < 6 \\ 1 \text{ si } x \geq 6 \end{cases} \qquad ; F(x)=P(X\leq x)$$

Obsérvese que si queremos hallar, por ejemplo $P(X > 2) = 1-P(X \leq 2)=1-F(2)=1-2/6=4/6$

Propiedades

1. Es una función definida positiva ($F(x) \geq 0\ \forall x \in R$)
2. Es creciente ($\forall x, y \in R\ \ x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$)
3. La gráfica de F es escalonada, toma valores constantes en los intervalos : $(-\infty,x_1)$, $[x_1,x_2),[x_2,x_3),.......[x_n,\infty)$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to \infty} F(x)=1$

Ejemplo: Gráfica de la función de distribución considerada en el ejemplo anterior



CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

El estudio individual de cada uno de los individuos de una población nos obliga a manejar un número enorme de datos, lo que resulta farragoso e inoperativo, conviene pues sintetizar este gran número de datos en unos pocos números, que proporcionen una idea lo más aproximada posible de la misma. A estos números les llamaremos **parámetros estadísticos.**
Para estudiar de forma rigurosa una distribución debemos contemplar al medio dos tipos de medidas o parámetros:

A)Parámetros de centralización: son valores que suelen situarse hacia el centro de la distribución de datos. Por ejemplo para hablar de la edad de la plantilla de trabajadores de una empresa utilizamos la media aritmética (suma de las edades de todos ellos dividida entre el número de trabajadores)

B) Parámetros de dispersión: dan una medida de la separación de los datos de toda la población con respecto a la media. Es evidente que en el ejemplo que pusimos anteriormente no nos llega con saber la edad media de la plantilla sino que necesitamos saber si la mayoría de los trabajadores están cercanos a esa edad o si, por el contrario, hay trabajadores muy jóvenes y otros mayores que se equilibran dando una media poco representativa de la plantilla.
Los principales parámetros de dispersión son la varianza y la desviación típica.

ESPERANZA MATEMÁTICA

Aunque hay otros parámetros de centralización nosotros vamos a estudiar únicamente la Esperanza matemática que es el modelo de la media aritmética cuando se infieren los resultados de una muestra a toda la población.

Se llama esperanza matemática de una variable aleatoria X que toma los valores $x_1,x_2,....,x_n$ con probabilidades respectivas $p_1,p_2,.....,p_n$ a la media ponderada de dichos valores, es decir:
$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+....+x_np_n=\Sigma x_i p_i$

$$E(X)=\Sigma x_i p_i \text{ siendo } p_i=P(x_i)$$

VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

Se define la varianza de una variable aleatoria discreta como:

$$\sigma^2=\Sigma(x_i-E(X))^2 p_i \quad \text{o bien} \quad \sigma^2=\Sigma x_i^2 p_i-(E(x))^2$$

LLamaremos desviación típica de una variable aleatoria discreta X a la raiz cuadrada positiva de su varianza $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\Sigma(x_i-E(X))^2 p_i}$

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar un dado y anotar el número de la cara que sale. Hallar su Esperanza matemática, varianza y desviación típica.

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	1/6	1/6	1	1/6
2	1/6	2/6	4	4/6
3	1/6	3/6	9	9/6
4	1/6	4/6	16	16/6
5	1/6	5/6	25	25/6
6	1/6	1	36	36/6
	$\Sigma = 1$	$\Sigma = \frac{21}{6}$		$\Sigma = \frac{91}{6}$

E(X)=$\Sigma x_i p_i = \frac{21}{6} = 3'5$; $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - (E(X))^2 = \frac{91}{6} - 3'5^2 =$ 2'916;

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2'916} =$ 1'707

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Vamos a estudiar a continuación la distribución Binomial que es uno de los ejemplos de distribución discreta más utilizada.

EXPERIMENTO DE BERNOUILLI

En muchas ocasiones nos encontramos con la necesidad de saber cuántas veces ocurrirá un suceso concreto S en la realización, bajo las mismas condiciones, de n pruebas iguales. Por ej: número de seises al lanzar 20 veces un dado o bien número de varones de entre los 50 niños nacidos en un día en un hospital, etc.

Estas situaciones se caracterizan por la repetición n veces de la misma prueba, en la que son posibles sólo dos resultados incompatibles : que se verifique o no se verifique el suceso observado, siendo la probabilidad de estos dos resultados invariante a lo largo de las n pruebas; es decir, de forma que el resultado obtenido en cada una de ellas no influye en las restantes.

Llamaremos experimento de Bernouilli a todo experimento aleatorio que verifica las siguientes condiciones:

1. *En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados, el suceso A y su contrario A '. Les llamaremos respectivamente éxito y fracaso*
2. *El resultado obtenido en cada prueba es independiente del resultado obtenido en las anteriores*
3. *La probabilidad del suceso A, que denotaremos por p, es constante y por lo tanto no varía de una prueba a otra. (representaremos por q la probabilidad de A' , naturalmente q=1-p*

Los dos ejemplos mencionados anteriormente son experimentos de Bernouilli. En el primero el éxito sería A=" salir un seis" y la probailidad de A es p=1/6, el número de pruebas 20. En el segundo A=" nacer varón" y p=P(A)=1/2, el número de pruebas 50.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

En un experimento de Bernouilli podemos definir distintas variables aleatorias, que darán lugar a distintas distribuciones de probabilidad.

Si la variable que definimos es X= " número de éxitos obtenidos en las n pruebas", a dicha variable se le llama variable aleatoria binomial, y a la distribución a la que da lugar distribución binomial. Es claro que Im X= $\{0,1,2,......,n\}$

Vamos a analizar, en primer lugar, la distribución binomial mediante algunos ejemplos.

Supongamos que realizamos el experimento de lanzar 4 veces una moneda al aire y queremos estudiar la variable aleatoria X="número de caras". X es una variable aleatoria discreta, cuyos posibles resultados son: 0,1,2,3,4
P(X=0)=P(x,x,x,x)=1/2.1/2.1/2.1/2=$(1/2)^4$
P(X=1)=P(c,x,x,x)+P(x,c,x,x)+P(x,x,c,x)+P(x,x,x,c)=4.$(1/2)^4$. Podríamos haberlo pensado de otra manera: Primero elegimos el lugar donde puede estar situada la cara, tenemos $\binom{4}{1}$ lugares donde poder colocarla, para cada uno de ellos la probabilidad de esa cara es de 1/2 y la de las otras tres cruces de $(1/2)^3$. Por lo tanto: P(X=1)= $\binom{4}{1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3$

Pensemos ahora la P(X=2)= $\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2$. De igual forma haríamos P(X=3) y P(X=4)

Veamos otro ejemplo: Se lanza 7 veces un dado, se considera el suceso A=" salir un 1" y la variable X=" número de veces que ocurre el suceso A". En este caso X es una V.A. discreta, cuyos posibles resultados son: 0,1,2,3,4,5,6,7. ¿ Cuál es la probabilidad de que X=3?

P(X=3)= $\binom{7}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^4$. Dado que tenemos $\binom{7}{3}$ lugares en donde colocar los tres unos, cada uno de ellos tiene probabilidad de 1/6 y en el resto de los lugares a de aparecer cualquier número distinto de 1, es decir el suceso A' cuya probabilidad es 5/6

Vamos a generalizar lo que hemos pensado mediante estos dos ejemplos:

Definición

Si en un experimento de Bernouilli consideramos la variable X=" número de éxitos obtenidos en las n pruebas realizadas", a dicha variable le llamaremos variable binomial . Su función de probabilidad será la siguiente:

$$f(r)=P(X=r)=\begin{cases} \binom{n}{r}p^r q^{n-r} \text{ si } r \in \{0,1,2,3,......,n\} \\ 0 \text{ si } x \notin \{0,1,2,3,.........,n\} \end{cases}$$ Siendo p= P(éxito) y q=P(fracaso)

El nombre de distribución binomial viene dado de que las probabilidades son los términos del desarrollo de un binomio.

Se expresa por B(n,p) a la variable binomial.

Función de distribución binomial

Dado que F(x) son las probabilidades acumulativas, vendrá dada en este caso por la suma de los términos del binomio y así:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \text{ si } 0 \le x \le n \\ 1 \text{ si } x>n \end{cases}$$

Observación: [x] indica la parte entera de x. Es decir si x no es entero, su valor en la distribución se calcula sobre su parte entera. Ej: F(2'7)=F(2)

Ejemplos:

1)Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas; cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno decide contestar dicha prueba al azar. Se pide:
a) Probabilidad de acertar exactamente 4 preguntas
b) Probabilidad de no acertar ninguna
c) Probabilidad de acertar al menos ocho
d) Probabilidad de acertar al menos cuatro
e) Probabilidad de acertar más de cinco y menos de ocho.
f) Sis finciones de probabilidad y de distribución

Consideremos los sucesos A="acertar" y A ' =" no acertar" P(A)=0'25=p y P(A')=0'75=q
Sea X la variable aleatoria que representa el número de aciertos . X es B(10,0'25)

a) P(X=4)= $\binom{10}{4}(0'25)^4(0'75)^6$ =0'1460
b) P(X=0)= $\binom{10}{0}(0'75)^{10}$ =0'0563
c) P(X ≥8) = P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)= $\binom{10}{8}(0'25)^8(0'75)^2+\binom{10}{9}(0'25)^9(0'75)+$
+ $\binom{10}{10}(0'25)^{10}$ =0'005
d) P(X ≥4) ; en este caso es más cómodo hallar la probabilidad del complementario:

P(X < 4) = P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)= $\binom{10}{0}(0'75)^{10}+\binom{10}{1}(0'25)(0'75)^9+$
+ $\binom{10}{2}(0'25)^2(0'75)^8+\binom{10}{3}(0'25)^3(0'75)^7$ y la probabilidad que buscamos será igual a uno menos la obtenida de los cálculos anteriores.

e) P(5 < x < 8) = P(X=6)+P(X=7)=$\binom{10}{6}(0'25)^6(0'75)^4$ +$\binom{10}{7}(0'25)^7(0'75)^3$

f) Función de probabilidad: $f(r)=P(X=r)=\begin{cases} \binom{10}{r}.0'25^r.0'75^{10-r} \text{ si } r \in \{0,1,2,3,......,10\} \\ 0 \text{ si } x \notin \{0,1,2,3,.........,10\} \end{cases}$

Función de distribución: $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} \binom{10}{i} 0'25^i.0'75^{10-i} \text{ si } 0 \le x \le 10 \\ 1 \text{ si } x>10 \end{cases}$

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

a) E(X)=n.p siendo n=número de pruebas, p=P(éxito) ;b) Varianza de X : σ^2= n.p.q

c) Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n.p.q}$.

NOTA: No hacemos la deducción de estas fórmulas.

Ejemplo:

La probabilidad de que un artículo producido en una fábrica sea defectuoso es de 0'02. Un cargamento de 10.000 artículos se envía a unos almacenes. Hallar el valor esperado de artículos defectuosos y la desviación típica.

E(X)=n.p=(10.000).(0'02)=200 artículos defectuosos

$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{(10.000).(0'02)(0'98)} = \sqrt{196}$ =14.

EJERCICIOS (Solucionados al acabar los enunciados)

1.- Una moneda se lanza 7 veces. Hallar la esperanza y la varianza del número de apariciones de la cruz

2.- Un dado se lanza 12 veces. Hallar la esperanza y desviación típica del número de veces que no sale un uno

3.-En una familia de 6 hijos, hallar la probabilidad de que : a) sean 3 niñas y 3 niños b) Menos niñas que niños. Suponer equiprobables los sucesos tener niño y niña.

4.-Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Se saca y se reemplaza una bola tres veces. Hallar la probabilidad de sacar: a) una bola roja, b) dos bolas rojas, c) al menos una bola roja.

5.-El 20% de los tornillos producidos en una fábrica es defectuoso. En una partida de 3600 tornillos hallar el número esperado de defectuosos y la desviación típica.

6.- Sea X una distribución binomial con E(X)=2 y σ^2 =4/3. a) Calcula la probabilidad de obtener más de dos éxitos; b) Probabolidad de obtener menos de 5 éxitos

7.- Se sabe que la tercera parte de los alumnos de 14 años dan positivo en una prueba de agresividad. Escogida al azar una muestra de 10 alumnos, hallar la probabilidad de: a) encontrar dos que den positivo, b) más de tres, c)a lo sumo dos, d) Hallar la media y desviación típica de la distribución.

8.- Se ha pasado una prueba de fluidez verbal a los niños de una comarca y se ha detectado que un 35% de ellos tienen una fluidez prácticamente nula y el resto la tiene aceptable. De una muestra aleatoria formada por 7 niños hallar: a) La media y varianza, b) Obtén la probabilidad de que menos de tres niños tengan fluidez prácticamente nula, c) la probabilidad de que al menos un niño tenga fluidez prácticamente nula

9.-En un estudio realizado por T.V.E. se ha podido saber que solo el 15% de los españoles es partidario de que se retransmitan los combates de boxeo. Elegida una muestra de 10 personas, hallar la probabilidad de que: a) la mitad sea favorable, b) uno solo sea favorable.

10. Se lanzan tres monedas al aire, a)¿ Cuál es la probabilidad de obtener una cara? ;b)¿Cuál es la de obtener tres caras? c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea 1

11.-Se lanza un dado 5 veces ¿Cuál es la probabilidad de obtener cinco números primos?

Soluciones ejercicios distribución binomial

1.- n=7, A="salir cruz"; P(A)=1/2=p, P(A')=1/2=q

E(X)=n.p=7.1/2=7/2; Var(X)=npq=7/4

2.- n=12, A="no salir un 1" P(A)=5/6=p, P(A')=1/6=q ; E(X)=np=12.5/6, VAR(X)=12.1/6.5/6=60/36,

$\sigma=\sqrt{\frac{60}{36}}$

3.- n=6 A="nacer niña" P(A)=1/2=p; P(A')=1/2=q

a) P(X=3)=$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$0'3125,

b)P(X>3)=P(X=4)+p(X=5)+P(X=6)=$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^6=$

=0'2344+0'0938+0'0156=0'3438

4.-n=3 A'=salir bola roja" P(A')=3/5=q; A="salir bola blanca" P(A)=2/5=p

A) P(X=1)=$\binom{3}{1}\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2=0'288$; b) P(X=2)=$\binom{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)=0'432$; c) P(X≥ 1)=1-P(X=0)=

1-$\left(\frac{2}{5}\right)^3=0'936$

5.- A="tornillo defectuoso" P(A)=20/100=0'2=p; q=0'8; n=3600

E(X)=np=3600.0'2=720; σ^2=npq=3600.0'2.0'8=576; σ=24

6.- En primer lugar debemos conocer n y p. Sabemos que E(X)=np=2, Var(X)=npq=np(1-p)=4/3

obtenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, despejando n=6, p=1/3;q=2/3

a) P(X>2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-[$\left(\frac{2}{3}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5$]=1-[0'087+0'2633]=0'6497

B) P(X<5)=1-[P(X=5)+P(X=6)]=1-[$\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6$]=1-[0'0164+0'0013]=0'9823

7.- A=" Dar positivo" P(A)= $0'\hat{3}$=p; P(A')=$0'\hat{6}$=q ; n=10

a) P(X=2)=$\binom{10}{2}0'33^2.0'66^8$=0'1764

b)P(X>3)=1-P(X≤3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=1-0'66^{10} $-\binom{10}{1}0'33.0'66^9-$

-$\binom{10}{2}0'33^2.0'66^8-\binom{10}{3}0'33^3.0'66^7=0'4942$

c)P(X≤2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0'66^{10} $+\binom{10}{1}0'33.0'66^9+\binom{10}{2}0'33^2.0'66^8$=0'2705

d)E(X)=np=10.$0'\hat{3}$=$3'\hat{3}$; $\sigma^2=npq=10.0'\hat{3}.0'\hat{6}=2'\hat{2}$; $\sigma=\sqrt{2'\hat{2}}=1'49$

8.- A="fluidez nula" P(A)=0'35=p; A'="fluidez aceptable" P(A')=0'65=q ; n=7

a)E(X)=np=7.0'35=2'45 ; σ^2=npq=7.0'35.0'65=1'5925 ; $\sigma=\sqrt{1'5925}=1'26$

b) P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0'65^7+7.0'35.0'65^6 +$\binom{7}{2}$0'35^2.0'65^5=0'5322

c) P(X≥1)=1-P(X=0)=1-0'65^7=0'9509

9.- A="partidario retrasmisiones de boxeo" P(A)=0'15=p ; q=0'85 ;n=10

a) P(X=5)=$\binom{10}{5}.0'15^5.0'85^5$=0'0085 ; b) P(X=1)=10.0'15.1'85^9= 0'3474

10.-a) P(X=1)=$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$; b)P(X=3)=(1/2)^3=1/8 c)P(1cara/impar caras)=$\frac{P(1cara \cap impar)}{P(impar)} = \frac{P(1cara)}{P(1cara \cup 3caras)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=3)} =$

$\frac{3/8}{3/8+1/8} = \frac{3}{4}$

11.- n=5 ; éxito=nº primo={1,2,3,5} p=4/6=2/3; q=1/3

P(X=5)=$\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA

Consideremos el siguiente ejemplo:
Tratamos de pesar, una tras otra, todas las naranjas puestas a la venta en un almacen, y supongamos que disponemos de una balanza con precisión de 2 en 2 Dg., esto quiere decir que las medidas que obtendremos serán del tipo;10 Dg, 12 Dg etc., medidas que no admiten subdivisiones sucesivas; sin embargo sabemos que la variable peso no es discreta sino continua y por tanto no admite únicamente como valores los números reales de los tipos propuestos.
La única razón de poder obtener sólo un número finito de valores radica en la limitación del instrumento de medida, de ahí que si en la balanza nos da un valor cualquiera por ejemplo entre 10 y 12 Dg atribuimos a dicha naranja un peso en el intervalo [10,12], no conociendo su valor exacto. (No es posible conocer el valor exacto de una variable continua, de ahí que medirla consista en clasificarla dentro de un intervalo. los modelos descriptivos de variables aleatorias continuas se basan en este principio)

Una vez pesadas todas las naranjas del almacen podemos calcular la proporción de naranjas con peso dentro de cada intervalo de longitud 2 Dg , y levantar rectángulos con base igual a dicha amplitud y con área igual a la correspondiente proporción de naranjas. Así construimos el histograma de frecuencias relativas.(figura 1)

Supongamos ahora que compramos una balanza de mayor precisión, que mida de un en un Dg, con ella aumenta la fiabilidad de las medidas que tomamos, no obstante, aunque la variable peso de forma teórica es continua, los datos que obtenemos siguen siendo los de una variable discreta. Construimos el nuevo histograma de frecuencias relativas, en el cual las bases serán la mitad de las anteriores, y la frecuencia relativa de cada intervalo se distribuirá ahora en los 2 subintervalos a los que da lugar.(figura 2)

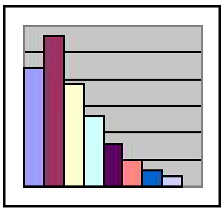
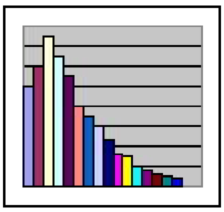
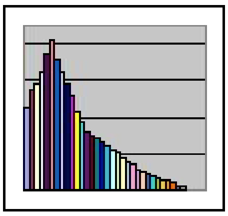





Figura 1 Figura 2 Figura3 Figura4

Podemos seguir repitiendo el experimento utilizando balanzas cada vez más precisas y seguir construyendo los histogramas correspondientes, compuestos por rectángulos cada vez más estrechos (figura 3). Sin embargo, llegará un momento en que no podremos disponer físicamente de una balanza más precisa que la última utilizada. Esto significa que la V.A. peso, aunque teóricamente continua, seguirá siendo físicamente discreta debido a los instrumentos de medida.
Podemos concebir idealmente un aumento indefinido del número de naranjas y del número de señales de la balanza, cada vez más próximas entre sí (estamos pasando de la muestra a la población, lo que nos exije un proceso de abstracción), los correspondientes histogramas se irían adelgazando más y más, puesto que la longitud de los intervalos tendería a cero, hasta que la línea quebrada escalonada se transformaría en una linea continua que describirá el comportamiento de la variable estimada aplicado a toda la población (en nuestro caso distribución del peso de las naranjas) (Figura 4)

De esta forma pasamos del histograma de frecuencias, que es la representación de una distribución de frecuencias continua (modelo experimental), a la curva de probabilidad, que será la representación de una distribución de probabilidad continua (modelo teórico). Llamaremos función de densidad a esa función límite.

Analicemos el histograma para ver las propiedades que tendrá la función de densidad:

a) La linea quebrada no tiene punto alguno debajo del eje OX, por lo tanto, en el modelo teórico, f(x) $\geq 0 \ \forall x \in R$

b) El área total bajo el histograma vale 1 (por ser un histograma de frecuencias relativas). Por tanto en el modelo teórico el área total bajo la curva tambien ha de ser 1; esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

c)Tanto en el histograma como en el caso de la curva, el eje OX representa la variable. Para el histograma, la frecuencia de que la variable tome un valor comprendido entre dos números a y b, viene representada por el área de los rectángulos entre a y b. Por lo tanto para la curva y=f(x), la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre a y b tendrá que venir tambien dada por el área encerrada por dicha función y el eje OX entre a y b ; es decir: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$. El conocimiento de la función de densidad nos permite hallar probabilidades por integración. (Ver figuras en la página anterior)

Definición

Sea X una variable aleatoria continua. Una función $f: R \longrightarrow R$ *es una función de densidad de X si y solo si:*

1) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La función de densidad permite definir la probabilidad en cada intervalo mediante el área correspondiente $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Observaciones

1.- Ya hemos dicho que la probabilidad de que un modelo de variable continua asigne a la observación un valor exacto (es decir medido con infinita precisión) es cero. Es decir, no tiene sentido hablar de la probabilidad de un valor puntual. Utilizando la función de densidad observamos que $P(X=a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$ (representaría el área de una linea). Como consecuencia de ello $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$

2.- f(x) representa la densidad de probabilidad en cada punto, no la probabilidad; de ahí que reciba el nombre de función de densidad y no de función de probabilidad como en el caso discreto. (P(X=a)=0 y sin embargo f(a) puede ser distinto de cero, luego f(x) no representa la probabilidad)

Ejemplo:

1.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 1/6\,x+k \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ 0 \text{ para todos los demás valores de x} \end{cases}$$

Se pide: a) Calcular k ; b) Hallar P(1< X < 2)

a) Si f(x) es una función de densidad ha de verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ =1. En nuestro caso

$$1= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 (1/6x+k)\, dx = 1/12x^2+kx]_0^3 = 3/4+3k=1 \text{ de donde } k=1/12$$

b) $P(1 < x < 2)= \int_1^2 (1/6x+1/12)dx=1/12x^2+1/12x]_1^2=1/2-1/6=1/3$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Del mismo modo que del histograma de frecuencias relativas se pasa a la función de densidad , pasaremos del diagrama acumulativo de frecuencias relativas a la función de distribución

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad y=f(x). Definimos su función de distribución como: $F : R \longrightarrow R$

$x \longrightarrow P(X \le x)$ *por tanto* $F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Es la generalización al caso continuo del polígono de frecuencias relativas acumuladas cuando la longitud del intervalo tiende a cero. Como en el caso discreto proporciona la probabilidad acumulada hasta un determinado valor de la variable

Al igual que en el caso discreto la función de distribución verifica las siguientes propiedades:

1. $F(x) \ge 0 \ \forall x \in R$
2. F(x) es creciente en R
3. $\lim_{x\to \infty} F(x) =1$ y $\lim_{x\to -\infty} F(x) =0$

Además si f es continua F ' (x) =f(x) (por el teorema fundamental del cálculo integral)

Ejemplos:

1.- Sea X una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad (comprueba que lo es)

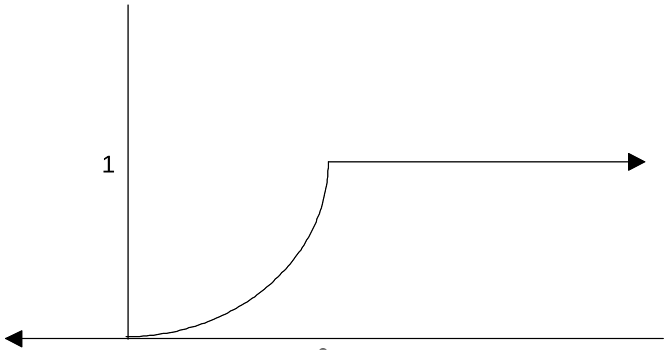
$$f(x)=\begin{cases} 1/2x \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Hallar su función de distribución y representarla gráficamente.

SOLUCIÓN

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \int_0^x 1/2\,tdt = 1/4x^2 \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 1 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

Gráfica de F(x)



2.-La función de densidad de una V. A. continua X es:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ A\operatorname{sen}x \text{ si } 0 \le x \le \pi \\ 0 \text{ si } x>\pi \end{cases}$$

a) ¿ Cuál es el valor de A ?; b) Hallar su función de distribución.

a) $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\pi} A\operatorname{sen}x dx = -A\cos x]_0^{\pi}=2A$, por lo tanto 2A=1; A=1/2

b) $$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \int_0^x \frac{1}{2}\operatorname{sen}tdt=\frac{1}{2}(1-\cos x) \text{ si } 0 \le x \le \pi \\ 1 \text{ si } x>\pi \end{cases}$$

COMPARACIÓN DEL CASO DISCRETO Y CONTINUO

Siendo f(x) la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y f(x) la función de densidad de una v.a. continua, nos encontramos con que ambas son las funciones que acumuladas, en forma de sumatorio en el caso discreto y de integral en el caso continuo, dan como resultado la función de distribución. Hay sin embargo diferencias notables entre ellas y,en consecuencia, entre el cálculo de probabilidades para las variables discretas y continuas:

1. V.A.D. f(x) representa una probabilidad, P(X=x) y por tanto $f(x) \le 1 \forall x \in R$; en el caso de la V.A.C. f(x) no representa una probabilidad y por tanto puede ser >1
2. V.A.D. $P(X=x) \ge 0 \forall x \in R$; V.A.C $P(X=x)=0 \ \forall x \in R$
3. En el caso discreto nos valemos de puntos para definir la probabilidad; P(X=x)=f(x). En el caso continuo la probabilidad hallarse en intervalos, debido a ser nula la

probabilidad en cualquier punto, y dicha probabilidad viene dada por el área limitada por la función de densidad en ese intervalo $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)\,dx$

4. En el caso discreto cualquier probabilidad es la suma de probabilidades puntuales, en el caso continuo cualquier probabilidad es una integral definida asociada a un intervalo.

CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Análogamente a como se hizo para variables estadísticas y para las aleatorias discretas, se definen para una variable aleatoria continua los siguientes parámetros:

ESPERANZA MATEMÁTICA

Recordemos que: $\bar{x} = \Sigma x_i f_{ri}$ (V. estadística) y $E(X)=\Sigma x_i p_i$ (V.A. discreta)

Si tenemos en cuenta que en el caso discreto estamos sumando un número finito de sumandos y en el continuo estamos "sumando" un número infinito de sumandos infinitesimales (la longitud de los intervalos tiende a cero), y teniendo en cuenta también la definición de integral definida, se sigue que: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ (V.A. continua)

VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

Siguiendo con el paralelismo entre V. estadísticas, V. aleatorias discretas y V. aleatorias continuas, se sigue que:

$S^2=\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_{ri}$ (V. estadísticas); $\sigma^2 = \Sigma(x_i - E(X))^2 p_i$ (V.A. discretas)

y por tanto $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))^2 f(x)dx$ (V.A: continua)

En cuanto a la desviación típica será como en todos los casos: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ejemplo:

1.- Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \text{ ó } x \ge \pi \\ 1/2\,senx \text{ si} 0<x<\pi \end{cases}$$

Hallar su esperanza, desviación típica y varianza.

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\pi} x\tfrac{1}{2}senxdx = \tfrac{1}{2}(-x\cos x + \text{senx }]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(x))^2 f(x)dx = \int_0^{\pi}(x-\tfrac{\pi}{2})^2\tfrac{1}{2}senxdx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(x^2senx - \pi xsenx + \frac{\pi^2}{4}senx)dx$$

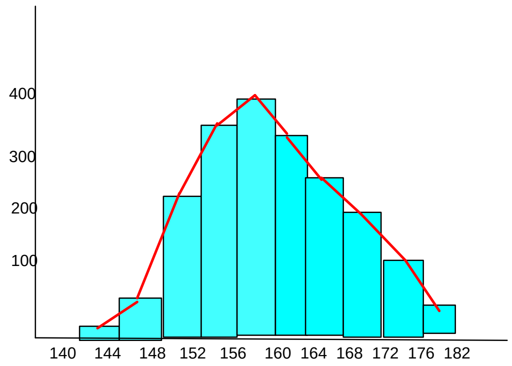
$$=1/2(2xsenx-x^2cosx+2cosx-\pi senx+\pi xcosx-\pi^2/4cosx]_0^{\pi}= (\pi^2/4) -2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$$

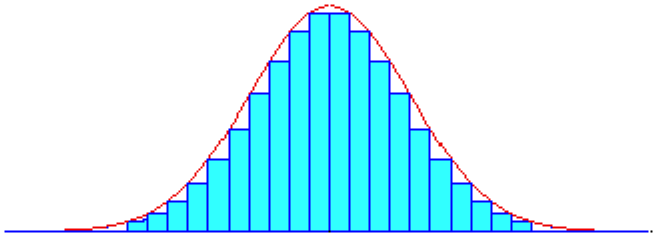
DISTRIBUCIÓN NORMAL

El modelo de distribución de probabilidad más importante, para variables continuas, es la distribución normal.pasamos a estudiar dicha distribución.

La gráfica adjunta es un histograma con la estatura de 1400 mujeres. Este histograma tiene una forma muy corriente. Con frecuencia nos encontramos con distribuciones de este tipo: pocos individuos en los extremos y aumento paulatino hasta llegar a la parte central del recorrido donde están la mayoría de ellos.



Si hacemos cada vez más pequeños los intervalos y el número de observaciones crece indefinidamente, el histograma se transformaría en una linea continua del siguiente tipo:



A esta curva se le llama Campana de Gauss o Curva Normal

La distribución normal se presenta en multitud de problemas Biológicos: tallas pesos u otras medidas de cualquier especie, Físicos: distribución de los errores cometidos en las observaciones, Sociológicos: consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano, Psicológicos:coeficiente intelectual, grado de adaptación al medio, etc. Su importancia fue tal que durante mucho tiempo se creyó que todas las distribuciones estadísticas se aproximarían a la normal si se dispusiese de un número grande de observaciones bien hechas. Hoy día es evidente la exageración de tal creencia, aunque la distribución normal sigue jugando un papel fundamental en la estadística.

VARIABLE ALEATORIA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL. FUNCIÓN DE DENSIDAD

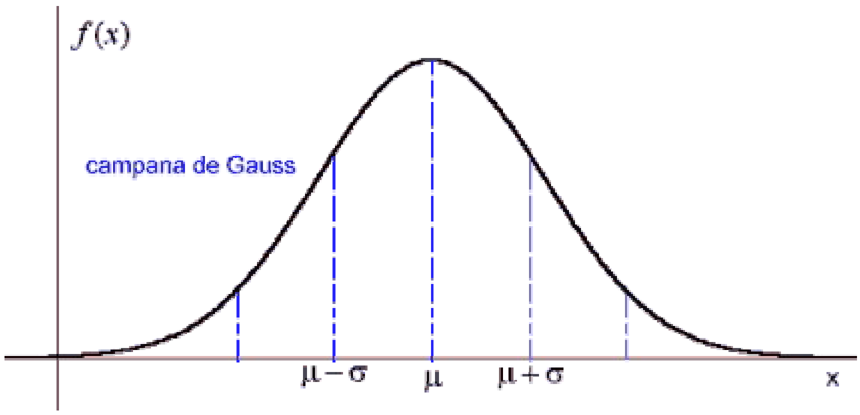
Una variable aleatoria continua X tiene una función de distribución normal si y solo si su función de densidad viene dada por $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Es evidente que f(x) > 0 $\forall x \in$R y se puede probar por integración que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ =1 y por tanto es una función de densidad

La función f depende de dos parámetros: μ que resulta ser al mismo tiempo la media moda y mediana de la distribución y σ que es su desviación típica. Diremos que la variables es N(μ,σ)

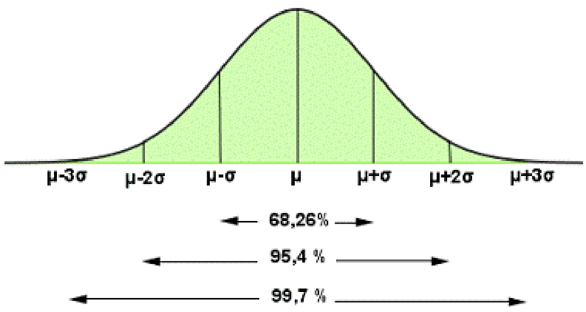
Si bien la función de densidad que acabamos de definir tiene una fórmula matemática complicada, su representación gráfica es la campana de Gauss de la que ya hemos hablado.

Conviene detallar algunas propiedades de esta función que nos facilitarán su comprensión y que son fácilmente deducibles a partir de su gráfica.



1. La curva tiene forma campaniforme y es simétrica respecto a la recta vertical x=μ (Eso demuestra de forma gráfica que x=μ es la media y la mediana)
2. Su máximo coincide precisamente con el valor de la ordenada de la media (Con lo que comprobamos que esta coincide con la moda)
3. Por ser una función de densidad, el área encerrada entre la campana, y el eje OX es igual a 1. Al ser simétrica respecto de la recta x=μ , se verifica que el área que deja dicho eje de simetría a la izd ha de ser igual al que deja a la dcha. igual a 0'5.
4. A ambos lados del valor x=μ las ordenadas decrecen, primero lentamente y despues con mayor rapidez, lo que significa un cambio de curvatura de la función. Los puntos de inflexión los alcanza a ambos lados de la media y a distancia σ de ella. Es decir sus puntos de inflexión tienen de abscisa x=μ-σ y x=μ+σ
5. La ordenada de la curva tiende a cero a medida que nos alejamos a la izd o dcha de la media, es decir tiene por asíntota horizontal y=0
6. En la práctica, no es necesario alejarse mucho de los valores centrales para que la ordenada sea casi nula; verificándose que el área se distribuye de la siguiente manera

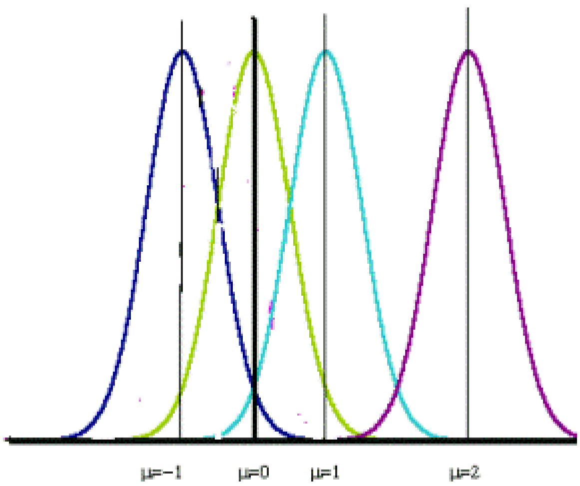
:



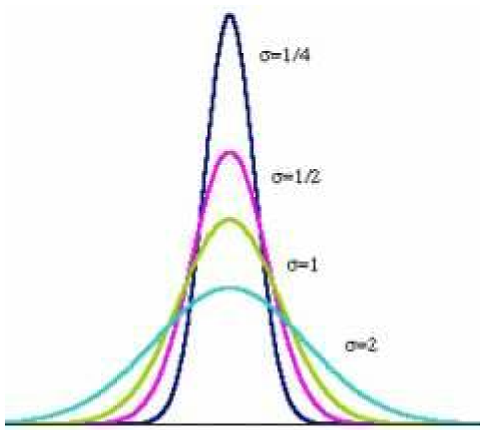
En el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$
Se encuentra el 68,26% de la población.
En $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ el 95’45%
En $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ el 99’73%
Obsérvese que la probabilidad de que un individuo esté fuera del intervalo ($\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$) es prácticamente nula, puesto que menos de un 0,3% de la población se halla en dicho intervalo

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR

A la vista de la representación gráfica de la función de densidad de una V.A. N(μ,σ), es evidente que para cada par de valores (μ,σ) obtendremos una función de densidad distinta. En los siguientes gráficos puede verse como afecta a la forma de la gráfica los distintos valores de μ y σ



Distinta media e igual desviación típica

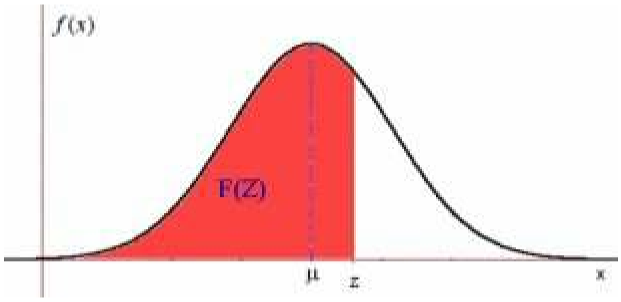


Igual media y distinta desviación típica

La variación de μ supone únicamente una traslación sobre el eje OX
Cuanto mayor es σ mayor es la dispersión y en consecuencia la gráfica es menos estilizada; por el contrario para valores pequeños de σ, la gráfica se encuentra concentrada en torno a la media. En cualquier caso el área encerrada entre la curva y el eje OX es igual a 1

De las infinitas distribuciones N (μ,σ), tiene especial interés la N(0,1), es decir aquella que tiene por media cero y por desviación típica 1.Esta distribución se llama distribución normal estandar o tipificada. En este caso la función de densidad viene dada por: f(x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

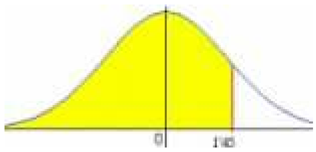
Su función de distribución será: F(z)=P(X < z)= $\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ y representa el área sombreada en la figura.



Con el fin de facilitar el cálculo y no tener que utilizar en todo momento la integración, se han elaborado tablas para esta distribución.

Ejemplos:

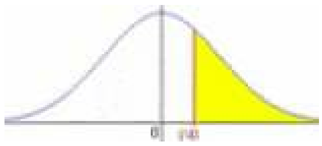
1. La probabilidad pedida se encuentra directamente en las tablas



-P(z < 1'45)=0'9265

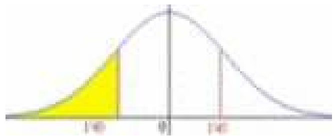
En la 1ª columna buscamos el valor de las unidades y las décimas: 1’4 En la 1ª fila el valor de las centésimas:0’05. Su intersección nos da la probabilidad.

2. Probabilidad mayor que un valor positivo



-P(z>1.45)=1-P(z<1’45)=1-0’9265=0’00735

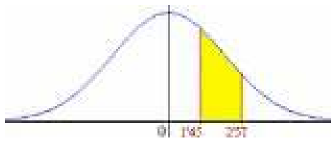
3.Probabilidad menor o mayor que un valor negativo



-P(z < -1'45)=P(z > 1'45)=1-P(z <1'45)=1-0'9265=0'0735

Si nos pidiesen P(z>-1’45)=P(z<1’45) por la simetría de la gráfica P(z>-1’45)=P(z<1’45)=0’9265

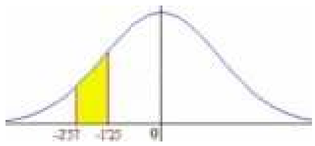
4.Probabilidad entre dos valores positivos



-P(1'25 < z <2'57)=P(z < 2'57)-P(z < 1'25)=

=0'9949-0'8944=0'1005

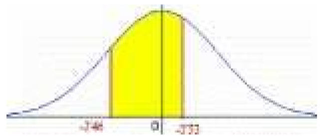
5.Probabilidad entre 2 números negativos



-P(-2'57 < z < -1'25)=P(1'25 < z < 2'57)=0'1005

Por la simetría de la gráfica

6. Probabilidad entre un valor positivo y uno negativo



-P(-2,46 < z < 0’53)= P(z < 0’53)-P(z < -2’46)=

=P(z < 0’53)-P(z >2’46)=P(z < 0’53)-(1-P(z <2’46)=

=0'7019-1+0'0031=0'695

7. Manejo de la tabla forma inversa: Nos dan una probabilidad y tenemos que averiguar el valor de la variable que acumula dicha probabilidad

- P(z<k)= 0’9265, calcula k. Buscamos en los resultados de la tabla el número 0’9265 y observamos que corresponde a p(z<1’45), por tanto k=1’45

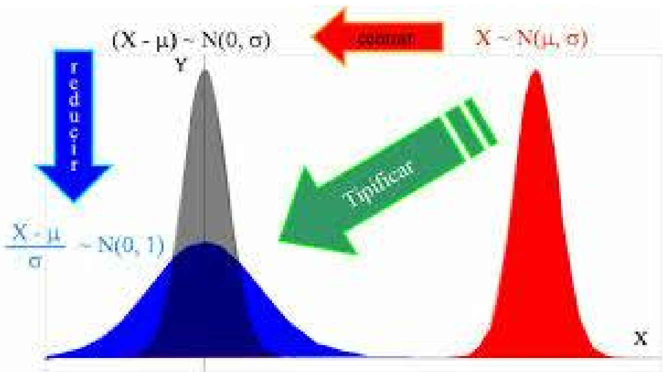
Si la probabilidad que buscamos no viene en las tablas por ejemplo P(X<k)=0’9260, buscamos los números que tienen una probabilidad más parecida, en este caso P(X<1’45)=0’9265 y P(z<1’44)=0’9251, dado que está más cercana 0’9265 decidimos que k=1’45. Si los dos valores más cercanos se hallasen a la misma distancia elogiríamos la media de los dos.

TIPIFICACIÓN DE LA VARIABLE

Hemos dicho que la distribución N(0,1) se encuentra tabulada, lo cual permite un cálculo rápido de las probabilidades asociadas a esta distribución.
Cualquier otra distribución normal N(μ,σ) puede transformarse mediante un cambio de variable en una distribución N(0,1). Esta transformación se llama tipificación de la variable.

Para llevar a cabo esta transformación, es obvio que hay que realizar dos pasos:
1.**Centrar.** Esto es trasladar la media de la distribución al origen de coordenadas, es decir hacer $\mu=0$
2.**Reducir** la desviación típica a $\sigma=1$, esto equivale a **contraer o dilatar** la gráfica de la distribución para que coincida con la estandar

Estos dos pasos se consiguen simultaneamente haciendo el siguiente cambio de variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$



Podemos observar estos dos procesos en la figura adjunta

Ejemplos:
1.- Se ha aplicado a 300 alumnos un test y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:
a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá en dicho test una puntuación entre 20 y 35
b) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 42?

Se trata de una distribución N(30,12). Para calcular las probabilidades pedidas haremos el siguiente cambio de variable $Z=\frac{X-30}{12}$

a)$P(20 < X < 35)=P(\frac{20-30}{12} < Z < \frac{35-30}{12})$=P(-0'83 < Z <0'42)=P(Z<0'42)-P(Z <-0'83)=
=P(Z < 0'42)-(1-P(Z < 0'83))=0'6628-(1-0'7967)=0'4595. Es decir, aproximadamente el 46% de los alumnos tienen una puntuación entre 20 y 35
b) P(X > 42)=1-P(X < 42)=1-P($Z < \frac{42-30}{12}$)=1-P(Z < 1)=1-0'8413=0'1587. Esto equivale a decir que aproximadamente el 16% de los alumnos tienen puntuación superior a 42 y dado que son 300 alumnos, se sigue que son 16.300/100= 48 alumnos aproximadamente.
2.- Supóngase que la temperatura T durante el mes de Junio está distribuida normalmente, con media 24º y desviación típica 6º. Hallar la probabilidad de que la temperatura esté entre 25º y 30º en un día determinado.
P(25 < T < 30)=P($\frac{25-24}{6} < Z < \frac{30-24}{6}$)=P(0'16 < Z < 1)=P(Z<1)-P(Z<0'16)=0'8413-0'5636= 0'2777.
3.- Para seleccionar a los trabajadores de una empresa aplicamos un test a 400 personas, obteniendo que las puntuaciones siguen una distribución normal de media 60 y desviación

típica 5. Si no podemos emplear más que a 122 de los presentados, ¿ cuál ha de ser la puntuación mínima de una persona para conseguir emple?

Sea a esa nota mínima , sabemos que $P(X\geq a)=0'305$, o bien $P(X < a)=0'695$. Tipificando la variable: $P(Z < \frac{a-60}{5})=0'695$. En este ejercicio tenemos que manejar las tablas al revés, dado que conocemos el valor de la probabilidad y queremos conocer el valor de la variable.Buscando en las tablas una probabilidad lo más próxima posible a 0'695, se obtiene que el valor de la variable es 0'51; por tanto $\frac{a-60}{5}=0'51$; a=60+5.0'51=62’55 puntos.

4. La altura de los alumnos de una clase se distribuye mediante una N(174, 2`3). Si escogemos al azar 10 alumnos de dicha clase ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 de ellos tengan una altura conprendida entre 172 y 176 cm?

Se trata de una distribución binomial en la que n=10, el éxito=” medir entre 172 y 176” y la probabilidad del éxito, p, tenemos que calcularla: p= P(172<X<176)=

$=P(\frac{172-174}{2'3} < Z < \frac{176-174}{2'3})=P(-0'87<Z<0'87)=P(Z<0'87)-[1-P(Z<0'87)]=$

$=0'8078-[1-0'8078]=0'6156$

Por tanto es una binomial B(10, 0’62) y queremos que haya exaxtamente 6 éxitos. Dado que p>0’5 y en consecuencia no viene en las tablas, buscamos 4 fracasos siendo q=1-0’62=0’38, obtenindo que P(Y=4)=0’2508.

5. La dimensión del díametro de las tornillos producidos por una máquina sigue una distribución normal de media 10 mm y desviación típica 0’7. Se escoge un tornillo al azar, sabiendo que mide más de 9’7 ¿Cúal es la probabilidad de que esté comprendido entre 9’9 y 10’1?

Se trata en este caso de una probabilidad condicionada. Consideremos los sucesos A=” medir más de 9’7 mm” y B=” medir entre 9’9 y 10’1” nos piden $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Dado que el suceso $A\cap B=B$ tenemos que calcular P(B), P(A) y dividir una entre la otra para hallar la condicionada que nos piden:

$P(A)= P(X>9'7)=P(Z>\frac{9'7-10}{0'7})=P(Z>-0'42)=P(Z<0'42)=0'6628$

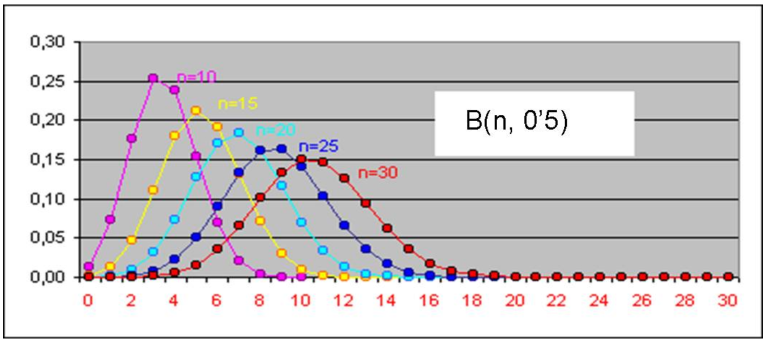
$P(B)=P(9'9<X<10'1)=P(\frac{9'9-10}{0'7} < Z < \frac{10'1-10}{0'7})=P(-0'14<Z<0'14)=$

$=P(Z<0'14)-[1-P(Z<0'14)]=0'5557-[1-0'5557]=0'1114$. Por tanto, $P(B/A)=\frac{0'1114}{0'6628}=0'168$

Ejercicios pág27: 1-9

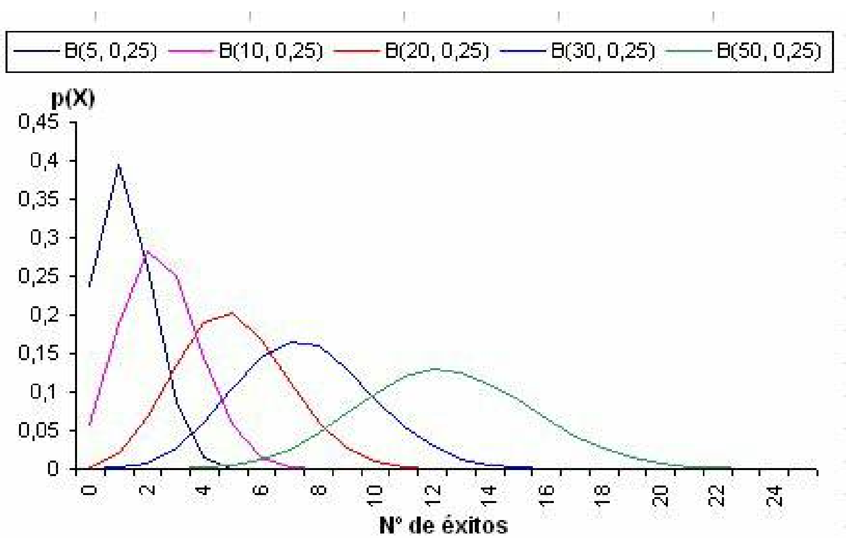
APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

Si realizamos los siguientes experimentos: 1) lanzar una moneda 10 veces, 2) lanzarla 15 veces, 3) lanzarla 20 veces, 4) lanzarla 25 veces, 5) lanzarla 30 veces ; y observamos en todos ellos la variable "número de caras obtenidas" obtendremos las distribuciones B(10,1/2), B(15,1/2), B(20,1/2), B(25,1/2) y B(30,1/2) respectivamente. Si representamos en un mismo diagrama los polígonos de frecuencias correspondientes a todas ellas obtenemos el siguiente gráfico



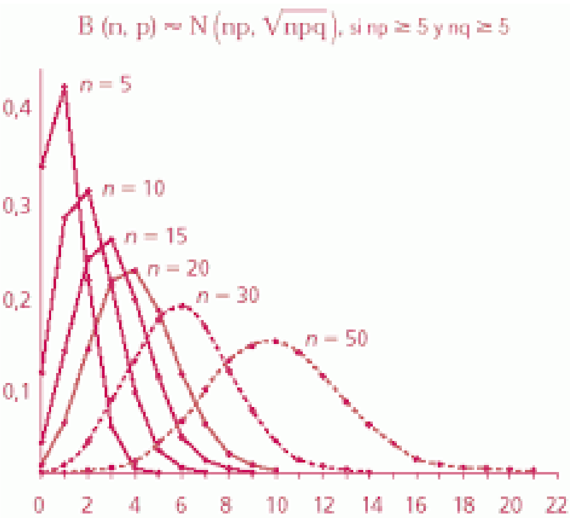
Es evidente que a medida que crece el número de pruebas el polígono tiende a la curva normal para B(n,1/2). ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier distribución binomial B(n,p) siendo p una probabilidad cualquiera?.

Observemos el diagrama 2 en el que están representadas 5 gráficas binomiales con p=0'25, la primera de ellas no se parece en nada a una normal, poco a poco se van pareciendo más y más. La última, una B(50,0'25) es casi exactamente una curva normal.



El teorema de De Moivre garantiza que si n tiende a infinito cualquier binomial se aproxima tanto como queramos a una normal.

Dado que las probabilidades binomiales para valores grandes de n son muy difíciles de calcular, y dado que el límite de estas son curvas normales, cuyas probabilidades son de cálculo fácil a través de las tablas; conviene saber en que ocasiones podemos sustituir una por la otra.Cálculos técnicos y experimentales prueban que: *Una binomial se parece tanto más a una curva normal cuanto mayor es el producto n.p (o nq si q < p). Cuando np y nq son ambos mayores de 3 la aproximación es bastante buena y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta.*



Cuando aproximemos una binomial por una normal debemos darnos cuenta de que la media es μ=np y la desviación típica es: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$; dado que son esos los valores de estos parámetros en la distribución binomial.De aquí se sigue que la tipificación de la variable vendrá dada por el cambio de variable: $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$

Corrección de Yates para la continuidad

Únicamente nos queda comentar un error muy frecuente que se suele cometer al realizar estas aproximaciones:La distribución binomial es discreta y por tanto tiene sentido calcular probabilidades puntuales como P(X=2); en cambio la normal es continua y no tiene sentido calcular esas probabilidades puntuales, pues todas ellas darían cero.

¿Cómo proceder entonces para calcular la probabilidad de una distribución binomial cuando la aproximamos mediante la normal?. El paso de la discreta a la continua nos obliga a tomar probabilidades en intervalos, para ello basta considerar los valores de la variable aleatoria discreta como centro de un intervalo de tamaño unidad, del siguiente modo:

P(X=a)=P(a-0’5<X’<a+0’5);

P(X<a)=P(X’<a-0’5) para que no contenga al punto a;

P(X≤a)=P(X’< a+0’5) para que contenga al punto a;

P(X>a)=P(X’>a+0’5) para que no contenga al punto a;

P(X≥a)=P(X’>a-0’5); para que no contenga al punto a

$P(a \leq X < b) = P(a-0'5 < X' < b-0'5)$ para que contenga al punto a y no al punto b

$P(a \leq X \leq b) = P(a-0'5 < X' < b+0'5)$ para que los contenga a los dos

Ejemplos: $P(X=2)=P(1'5 < X < 2'5)$; $P(X < 4)= P(X < 3'5)$; $P(X \leq 4)=P(X < 4'5)$

Ejemplo:

Se sabe por una estadística que el nivel de aceptación de un determinado partido es del 25% de la población. De un muestreo realizado sobre 40 personas, se desea saber cuál es la probabilidad de que 15 de ellos acepten al partido.

Es obvio que se trata de una distribución binomial: A="aceptar el partido" P(A)=p=0'25, q=0'75. La variable es X="número de personas que aceptan el partido" y será B(40,0'25)

Dado que el número de pruebas es grande trataremos de aproximar mediante una normal, si esto es posible. Veámoslo: np=40.0'25=10 >5 y nq=40.0'75=30 > 5 luego si podemos aproximar. $\mu=10$ y $\sigma = \sqrt{40.0'25.0'75}$ =2'74

$P(X=15)=P(14'5 < X' < 15'5)=P(\frac{14'5-10}{2'74} < Z < \frac{15'5-10}{2'74})=P(1'64 < Z < 2)=$

$= P(Z < 2) - P(Z < 1'64)=0'9772-0'9495=0'0277$

EJERCICIOS (solución al final de los enunciados)

1.-Supóngase que los pesos de 200 estudiantes varones se distribuyen normalmente con media 68 y desviación típica 8. Hallar el número de estudiantes con pesos a) inferiores e iguales a 50; b) entre 60 y 65; c) entre 66 y 72; d) superiores a 75

2.-Supóngase que las puntuaciones de un examen siguen una distribución normal con media 6'5 y desviación típica 1'5 . El 15% de los estudiantes han obtenido la calificación de sobresaliente y el 10% han suspendido. Hallar: a) La puntuación mínima para obtener sobresaliente; b) La puntuación mínima para aprobar; c) ¿Cuál tendría que ser la desviación típica para que aprueben el 80% de los estudiantes?

3.-Los 2000 opositores que se presentan a unas plazas de un organismo autonómico, han obtenido unas puntuaciones que se distrubuyen normalmente con media igual a 70'5 y desviación típica igual a 9. ¿Cuántas plazas se adjudicarán si el tribunal ha decidido dejar sin plaza a aquellos que obtengan una puntuación inferior a 80?

4.-Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110. b)¿Qué intervalo centrado en 100 contiene el 50% de la población?. c)En una población de 2500 individuos, ¿cuántos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

5.-Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones se distribuyen según una N(65,18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que haya en el primero un 20% de la población, un 65% en el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

6.- El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.

a) ¿Cuál es su desviación típica si se sabe que la probabilidad de que una determinada pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm. es igual a 0'0062?

b) Si se analizaron 820 piezas ¿cuántas tendrán su diámetro comprendido entre 39'7 y 43'5 mm?

7.-El peso de los adultos de una población se distribuye normalmente con media 65 Kg. y desviación típica 3 Kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justificar qué es más probable:

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63'5 y 66'5 Kg; b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 Kg y el otro un peso no perteneciente a ese intervalo

8.-La nota media de las pruebas de acceso correspondientes a los estudiantes que querían ingresar en una determinada facultad fue de 5'8 y la desviación típica 1'75. Fueron admitidos los de nota superior a 6

a)¿Cuál fue el porcentaje de admitidos si la distribución es normal?

b)¿ Cuál es la probabilidad de que de 10 estudiantes, tomados al azar, hayan sido admitidos exactamente cuatro?

9.- Un almacén de camisas ha determinado que el cuello de los varones adultos sigue una distribución N(38,1'5). Teniendo en cuenta que la producción total de camisas de la fábrica es de 10.000 ¿ Cuántas tendrá que producir entre los números 35 y 38, ambos incluidos? ¿cuántas del número 43?

10.-Se lanza una moneda al aire 100 veces. Hallar la probabilidad de a) obtener a lo sumo 40 caras; b) Obtener más de 60 caras

11.-Supongamos que la probabilidad de nacer varón en España es de 0'512. Si durante un año, en una determinada región, se han producido 2000 nacimientos ¿ Cuál es la probabilidad de que el número de varones nacidos esté entre 1000 y 1080, ambos incluidos?

12.-Supóngase que un sistema de 9 componentes independientes requiere para su funcionamiento que al menos 6 de ellos estén en buen estado. Si la probabilidad de funcionamiento de cada componente es de 0'95, calcular la fiabilidad del sistema (definida por la probabilidad de que funcione). Calcula la esperanza matemática y la desviación típica de la variable que expresa el número de componentes del sistema que funcionan en un instante determinado.

13.-Obtener la probabilidad de que en una familia de 3 hijos no todos tengan el mismo sexo (Supóngase que los distintos nacimientos son independientes y que la probabilidad de nacimiento de varón es de 0'51)

14. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide: a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72? b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su cal ificación sea, de hecho, superior a 84?

Soluciones

1.- μ= 68 ; σ=8; N(68,8)

a) P(X≤50)=P(Z≤ $\frac{50-68}{8}) = P(Z \leq -2'25) = P(Z \geq 2'25) = 1 - P(Z < 2'25) =$ 1-0'9878=0'0122 ∼1%; como son 200 estudiantes habrá aproximadamente 2 en estas condiciones

b) P(60<x<65)= P($\frac{60-68}{8} < Z < \frac{65-68}{8}$) = P(-1<Z<-0'375)=P(0'375<Z<1)=

P(Z<1)-P(Z<0'375)=0'8413-0'64615=0'1951 ∼19’51% , por tanto 19’51% de 200=39 estudiantes

c)P(66<x<72)= P($\frac{66-68}{8} < Z < \frac{72-68}{8}$) =P(-0’25<Z<0’50)= P(z<0’50)-P(Z<-0’25)=

P(z<0’50)-[1-p(Z<0’25)]=0'6915-[1-0'5987]=0'29’02 ∼29% , por tanto 29% de 200=58 estudiantes

d)P(X>75)=1-P(X<75)=1-P($Z < \frac{75-68}{8}$) =1-P(Z<0'875)=1-0'8092=0'1908 ∼19%, 38 estud.

2.- N(6'5,1'5); SB=15%; suspensos =10%

a) sea a la puntuación mínima para obtener sobresaliente P(X>a)=0'15 ⇒ $P(Z > \frac{a-6'5}{1'5}) =$

=0'15 ⇒1-P(($Z < \frac{a-6'5}{1'5}$) =1-0'15=0'85. Buscando en las tablas obtenemos que el valor de la variable al que corresponde esa probabilidad de 0'85 es 1'04; es decir P(Z<1'04)=0'85 por tanto 1'04=$\frac{a-6'5}{1'5}$ ⇒ a=1'04.1'5+6'5 =8'06

b) Sea a la puntuación mínima para aprobar P(X<a)=0'1 ⇒ $P(Z < \frac{a-6'5}{1'5}) =$ 0'1. Buscando en las tablas vemos que la primera probabilidad que aparece para z>0 es 0'5 luego $\frac{a-6'5}{1'5}$ es negativo . Entonces P(Z<$\frac{a-6'5}{1'5}) = P(Z > -\frac{a-6'5}{1'5}) = 1 - P(Z < -\frac{a-6'5}{1'5})$ ⇒

P(Z<$-\frac{a-6'5}{1'5}$)=1-0'1=0'9. Buscando en las tablas $-\frac{a-6'5}{1'5}$ =1'28 por tanto -a+6'5=1'28.1'5;

-a=1'28.1'5-6'5; a=4'58

c) Suponiendo que el aprobado está en 4'58 y que la media no varía μ=6'5 me piden calcular σ para que P(X>4'58)=0'8. Entonces: P(Z>$\frac{4'58-6'5}{\sigma}$) $= 0'8 \Rightarrow P(Z > \frac{-1'92}{\sigma}) = 0'8 \Rightarrow P(Z < \frac{1'92}{\sigma}) = 0'8$; buscando en las tablas $\frac{1'92}{\sigma} = 0'84 \Rightarrow \sigma$ =2'28

3.- N(70'5,9); P(X≤ 80) $= P(Z \le \frac{80-70'5}{9}) = P(Z \le 1'05) =$ 0'8531. Es decir el 85'31% de los opositores se han quedado sin plaza, luego se ha adjudicado plaza al 14'69% de los opositores= 294 opositores

4.- N(100,15); a) P((95 $\le X \le 110$) =$P(\frac{95-100}{15} \le Z \le \frac{110-100}{15}) = P(-0'33 \le Z \le 0'66)$ = $P(Z \le 0'66) - P(Z > 0'33) = P(Z \le 0'66) - [1 - P(Z \le 0'33)] =$ 0'7454-[1-0'6293]=0'37'47 es decir el 37'47% de la población

b)$P(100 - a \le X \le 100 + a) = 0'5 \Rightarrow P(\frac{100-a-100}{15} \le Z \le \frac{100+a-100}{15}) = 0'5 \Rightarrow P(\frac{-a}{15} \le Z \le \frac{a}{15})$ =0'5 $\Rightarrow P(Z \le \frac{a}{15}) - [1 - P(Z \le \frac{a}{15})] = 0'5 \Rightarrow 2.P(Z \le \frac{a}{15}) = 1'5 \Rightarrow P(Z \le \frac{a}{15}) = 0'75$

buscando en las tablas $\frac{a}{15}$=0'78 , por tanto a=0'67.15=10'05 . Intervalo (100-10'05,100+10'05) es decir (89'95,110'05)

c) P(X>125)=P(Z> $\frac{125-100}{15}$) $= P(Z > 1'66) = 1 - P(Z < 1'66) =$ 1-0'9515=0'0485 es decir el 4'85% de la población. Dado que son 2500 individuos son aproximadamente 121 los de coeficiente superior a 125

5.- N(65,18) sean a y b las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro; P(X<a)=20/100=0'2 $\Rightarrow P(Z < \frac{a-65}{18}) = 0'2 \Rightarrow \frac{a-6´5}{18}$es negativo puesto que0'2<0'5; en consecuencia

P($Z < \frac{a-65}{18}) = P(Z \ge -)$=1-P(z< $-\frac{a-65}{18}) = 0'2 \Rightarrow P(z < -\frac{a-65}{18}) =$ 0'8 Con lo que buscando en las tablas obtenemos que -$\frac{a-65}{18}$ =0'84 y despejando a=49'88.

Pasamos ahora a calcular b: P(X>b)=0'15⇒P(Z>$\frac{b-65}{18}$)=0'15⇒ $P(Z < \frac{b-65}{18}) = 0'85$

Buscando en las tablas, $\frac{b-65}{18}$ =1'04. Entonces b=1'04.18+65=83'72

6.-N(45,σ); a) P(X>50)=0'0062 $\Rightarrow P(Z > \frac{50-45}{\sigma}) = 0'0062 \Rightarrow 1 - P(Z < \frac{50-45}{\sigma}) = 0'0062 \Rightarrow$ $P(Z < \frac{5}{\sigma}) = 0'9938 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2'5 \Rightarrow \sigma = 2$

b)P(39'7≤ $X \le 43'5) = P(\frac{39'7-45}{2} \le Z \le \frac{43'5-45}{2}) = P(-2'65 \le Z \le -0'75) = P(0'75 < Z < 2'65)$ =P(Z<2'65)-P(Z<0'75)=0'9960-0'7734=0'2226=22'26% de la población; como se analizan 820 piezas, salen aproximadamente 183 con diámetro en ese intervalo

7.- N(65,3) Sea A="tener peso comprendido entre 63'5 y 66'5" y B=" tener peso comprendido entre 62 y 68"

P(A)=P(63'5>X>66'5)=P($\frac{63'5-65}{3} > Z < \frac{66'5-65}{3}) = P(-0'5 < Z < 0'5) = P(Z < 0'5) -$ $[1 - P(Z < 0'5)] = 2.0'6915 - 1 = 0'383$

P(B)=P(62<X<68)=P($\frac{62-65}{3} < Z < \frac{68-65}{3}) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$ 2.0'8413-1=0'6826

Se toman dos unidades al azar a) P(AA)=0'383.0'383=0'1466 ; b)P($\overline{B}$B)+P(B$\overline{B}$)=

=2.0’3174.0'6826=0'4333 luego es más probable el caso b

8.- N(5'8,1'75)

a) P(X>6)=$P(Z > \frac{6-5'8}{1'75}) = P(Z > 0'11) = 1 - P(Z < 0'11) = 1 - 0'5438 = 0'4562$ Por tanto un 45'62 % fue admitido

b) Es una binomial n=10, p=0'4562<0'5 ; P(X=4) se busca en las tablas y da 0’2384

9.- N(38,1'5)

NOTA: La variable cuello de las personas es continua, de ahí que su distribución sea normal; sin embargo el cuello de las camisas es discreta pues fabricamos camisas del 35,36,37,38,etc... Por ello tenemos que suponer que usarán camisas de un determinado número las personas que tengan un cuello 0'5 más pequeño o más grande que dicho número. Así, por ejemplo, usarán el 43 los que tengan un cuello entre 42'5 y 43'5 cm.

a) P(34'5<X<38'5)=P($\frac{34'5-38}{1'5} < Z < \frac{38'5-38}{1'5}) = P(-2'3 < Z < 0'33) = P(Z < 0'33) - P(Z < -2'3)$ =

$P(Z < 0'33) - [1 - P(Z < 2'3)] = 0'6293 - [1 - 0'9893] = 0'6186 = \frac{6186}{10000}$ como son 10000 camisas habrá que producir 6186

B)P(42'5<X<43'5) =P($\frac{42'5-38}{1'5} < Z < \frac{43'5-38}{1'5}) = P(3 < Z < 3'66) = P(Z < 3'66) - P(Z < 3)$=

$= 0'9999 - 0'9987 = 0'0012$ como son 10000 camisas habrá que producir 12

10.- B(100,1/2); n=100 ; p=1/2; Éxito="cara" como np=100.1/2=50>5 y nq=100.1/2=50>5 puede aproximarse por una normal. μ=np=50 ; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$

NOTA: hay que tomar 0'5 menos por debajo y 0'5 más por arriba al aproximar la binomial por la normal

a)P(X$\leq 40'5) = P(Z \leq \frac{40'5-50}{5}) = P(Z \leq -1'9) = 1 - P(Z < 1'9) = 1 - 0'9713 = 0'0287$

b)P(X>60'5)=$P(Z > \frac{60'5-50}{5}) = 1 - P(Z \leq 2'1) = 0'0179$

11.- P(V)=0'512 distribución binomial; n=2000, p=0'512, np=1024, nq=976 puede aproximarse por una normal.

μ=np=1024; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{499'7} = 22'3$; P(999'5<X<1080'5)=P($\frac{999'5-1024}{22'3} < Z < \frac{1080'5-1024}{22'3}$) =

=P(-1’09<Z<2’53)=P(Z<2’53)-P(Z<-1’09)=P(Z<2’53)-[1-P(Z<1’09)]=0’9943-[1-0’8621]=0’8564

12.- n=9; p=0'95 P(funcione)=P(X≥6). Como p=0'95 no viene en las tablas entonces debemos considerar el éxito al reves; éxito="no funcionar" p=0'05

P(funcione)=P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0'6302+0'2985+0'0629+0'0077=0'9993

E(X)=np=9.0'95=8'55; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9.0'95.0'05} = \sqrt{0'4275} = 0'6538$

13.- X="mujer" p=0'49 q=0'51 (no puede tomarse al revés porque no vendría en las tablas)

P(0<X<3)=P(X=1)+P(X=2)=0'3823+0'3674=0'7497

14. A) P(X>72)=P(Z>$\frac{72-78}{6}$)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0'8413; b) Nos piden una probabilidad condicionada: P(X>84/x>72). Dado que la intersección de esos sucesos es X>84 tendremos:

P(X>84/X>72)=$\frac{P(X>84)}{P(X>72)} \underset{*}{=} \frac{0'1587}{0'8413}$=0'1886

P(X>84)=P(Z>$\frac{84-78}{6}$$) = P(Z>1) = 1 - P(Z<1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$