SOLUCIONES EJERCICIOS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Ejercicios Página 4

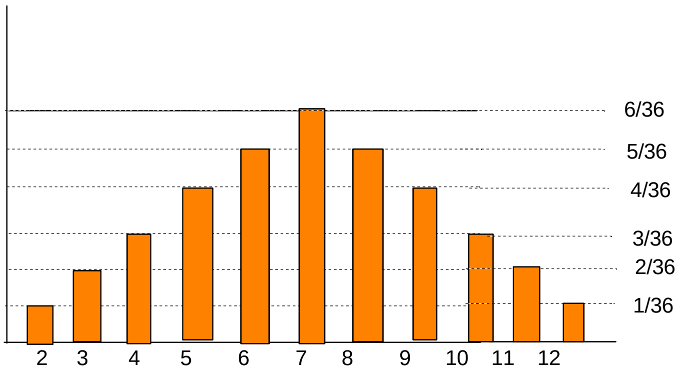
1.- La variable toma los valoresX={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

f(x)=0 $\forall x \notin$ {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}; f(2)=P({(1,1)})=1/36; f(3)=P({(1,2),(2,1)}=2/36; f(4)=P({(1,3),(2,2),(3,1)}=3/36; f(5)=P({(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)})=4/36;

f(6)=P({(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)})=5/36; f(7)=6/36;f(8)=5/36;f(9)=4/36;f(10)=3/36;

F(11)=2/36;f(12)=1/36

Representación gráfica: diagrama de barras



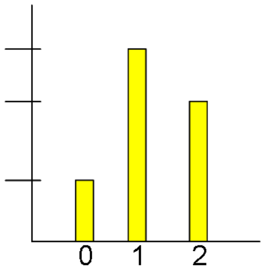
2.-A incluye los sectores 1 al 25 de entre 36 sectores iguales, luego p(A)=25/36; de igual forma p(B)=10/36 y p(C)=1/36 . Consideremos la variable aleatoria X="dinero que ganamos"; dicha variable toma los valores X={-50, 100,200} y su función de probabilidad será: f(x)=0 si x $\notin$ {-50, 100,200}; f(-50)= p(A)=25/36; f(100)=p(B)=10/36; f(200)=p(C)=1/36.

La probabilidad de ganar es 10/36+1/36=11/36 mientras que la de perder es 25/36, por tanto no nos conviene jugar

3.-X={1,2,3,4,5,6} f(x)=0 $\forall x \notin$ {1,2,3,4,5,6}; f(1)=1/36; f(2)=3/36;f(3)=5/36;f(4)=7/36; f(5)=9/36;f(6)=11/36

4.-X={1,2,3,4,5,6,7,8,9} f(x)=0$\forall x \notin$ {1,2,3,4,5,6,7,8,9}; f(1)=4/25;f(2)=5/25;f(3)=1/25; f(4)=1/25;f(5)=2/25;f(6)=3/25;f(7)=2/25;f(8)=3/25;f(9)=4/25

5. X={0,1,2} f(x)=0 $\forall x \notin$ {0,1,2}; f(0)=0'4^2=0'16; f(1)=2.0'6.0'4=0'48; f(2)=0'6^2=0'36



Ejercicios Página 7

1.-a) Para que sea función de probabilidad tiene que ocurrir: 1º p(x)≥0 $\forall$x, evidente a partir de la tabla; 2º La suma de las probabilidades ha de ser 1, p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)=2/15+ 5/15+1/15+3/15+4/15=1 3º La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles ha de ser igual a la suma de las probabilidades de dichos sucesos, evidente por como se han definido las probabilidades b)F(x)=P($X \le x$) $= \begin{cases} 0 \; si\, x < 1 \\ 2/15 \, si \, 1 \le x < 2 \\ 7/15 \, si \, 2 \le x < 3 \\ 8/15 \, si \, 3 \le x < 4 \\ 11/15 \, si \, 4 \le x < 5 \\ 1 \quad si \, x \ge 5 \end{cases}$

c) E(X)=$\Sigma\, x_i p_i =$1.2/15+2.5/15+3.1/15+4.3/15+5.4/15=47/15

$\sigma^2(X) = \Sigma\, x_i^2 p_i - (E(X))^2$ =1.2/15+4.5/15+9.1/15+16.3/15+25.4/15-(47/15)^2 =2'11

$\sigma = \sqrt{2'11}$ =1'452

d) P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=3/15+4/15=7/15

2.- a)Utilizando la función de probabilidad obtenida en el ejercicio 1 de la página 4, construimos la tabla para el cálculo de las medidas características

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
2,00	1/36	2/36	4,00	4/36
3,00	2/36	6/36	9,00	18/36
4,00	3/36	12/36	16,00	48/36
5,00	4/36	20/36	25,00	100/36
6,00	5/36	30/36	36,00	180/36
7,00	6/36	42/36	49,00	294/36
8,00	5/36	40/36	64,00	320/36
9,00	4/36	36/36	81,00	324/36
10,00	3/36	30/36	100,00	300/36
11,00	2/36	22/36	121,00	242/36
12,00	1/36	12/36	144,00	144/36

$\Sigma\, x_i p_i = \frac{252}{36} = 7 \qquad \Sigma\, x_i^2 p_i = \frac{1974}{36} = 54'83$

E(X)=$\Sigma\, x_i p_i = 7$; $\sigma^2 = \Sigma\, x_i^2 p_i - (E(X))^2$ =54'83-49=5'83; $\sigma = \sqrt{5'83}$ =2'41

b) P(X<5)=1/36+2/36+3/36=6/36; P(X $\ge$10)=3/36+2/36+1/36=6/36;

F(4)=P(X$\le$4)=6/36; F(-2)=P(X $\le$-2)=0 ; F(19)=P(X$\le$19)=1

3.-a) Función de probabilidad: X={0,1,2} ;

P(0 ases)=P(no as, no as)=36/40.35/39=1260/1560

P(1 as)=P(as, no as)+P(no as, as)=2.36/40.4/39=288/1560

P(2 ases)=P(as,as)=4/40.3/39=12/1560; por lo tanto

f(x)=0$\forall x \notin$ {0,1,2}; f(0)=1260/1560; f(1)=288/1560; f(2)=12/1560

b) Función de distribución:

F(x)=$\begin{cases} 0 \; si\, x < 0 \\ 1260/1560 \, si \, 0 \le x < 1 \\ 1548/11560 \, si \, 1 \le x < 2 \\ 1 \quad si \; x \ge 2 \end{cases}$

c)E(X)=$\Sigma\, x_i p_i =$312/1560 (0.1260/1560+1.288/1560+2.12/1560)

$\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2 = 0'1753$ $\sigma = \sqrt{0'1753} = 0'4186$ (NOTA: habría que confeccionar la tabla)

4.-Casos posibles=$VR_2^4 = 2^4 = 16$; casos favorables $\begin{cases} 0 \text{ caras} \to 1 \text{ caso} \\ 1 \text{ cara} \to C_4^1 = 4 \\ 2 \text{ caras} \to C_4^2 = \frac{4.3}{2} = 6 \\ 3 \text{ caras} \to C_4^3 = \frac{4.3.2}{3.2} = 4 \\ 4 \text{ caras} \to 1 \text{ caso} \end{cases}$ Por lo tanto

x_i	p_i	x_ip_i
0,00	1/16	0,00
1,00	4/16	4/16
2,00	6/16	12/16
3,00	4/16	12/16
4,00	1/16	4/16

E(X)=$\sum x_ip_i$ =32/16=2

5.

x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x^2{}_ip_i$
2,00	1/6	2/6	4,00	4/6
4,00	1/6	4/6	16,00	16/6
6,00	1/6	6/6	36,00	36/6
8,00	1/6	8/6	64,00	6476,00
10,00	1/6	10/6	100,00	100/6
12,00	1/6	12/6	144,00	144/6

$\sum x_ip_i = \frac{42}{6} = 7$ $\sum x_i^2 p_i = \frac{364}{6}$

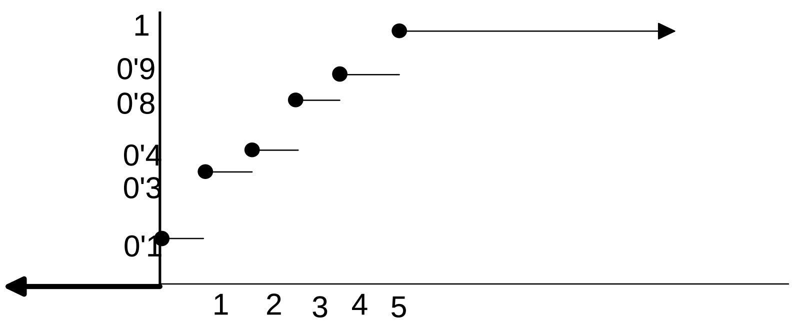
E(X)=7; σ^2=364/6–49=11'66; $\sigma = \sqrt{11'66}$ =3'41

6.-

X	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
P	0'1	0'2	0'1	0'4	0'1	0'1

a)

F(x)=$\begin{cases} 0 \, si \, x < 0 \\ 0'1 \, si \, 0 \le x < 1 \\ 0'3 \, si \, 1 \le x < 2 \\ 0'4 \, si \, 2 \le 3 \\ 0'8 \, si \, 3 \le x < 4 \\ 0'9 \, si \, 4 \le x < 5 \\ 1 \, si \, x \ge 5 \end{cases}$



b)P(X<4'5)=F(4'5)=0'9 ; P(3≤X<4'5)=P(X<4'5)-p(X<3)=0'9-0'4=0'5 c)

x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x_i^2p_i$
0,00	0'1	0,00	0,00	0,00
1,00	0'2	0'2	1,00	0'2
2,00	0'1	0'2	4,00	0'4
3,00	0'4	1'2	9,00	3'6
4,00	0'1	0'4	16,00	1'6
5,00	0'1	0'5	25,00	2'5

$\Sigma x_ip_i = 2'5$ $\Sigma x_i^2p_i = 8'3$

E(X)=2'5 ; σ^2=8'3-(2'5)^2=2'05 ; σ=1'43

Ejercicios páginas 13 y 14

1.- F(x)= $\begin{cases} 0 \; si\, x \le 0 \\ senx \; si\, 0 < x \le \pi/2 \\ 1 \, si\, x \ge \pi/2 \end{cases}$; F '(x)=f(x) $\Rightarrow$ f(x)= $\begin{cases} 0\, si\, x \le 0 \\ \cos x\, si\, 0 < x < \pi/2 \\ 0\, si\, x \ge \pi/2 \end{cases}$

2.- f(x)= $\begin{cases} 0\, si\, x \le 1 \\ \frac{1}{8}x + a\, si\, 1 < x \le 5 \\ 0\, si\, x > 5 \end{cases}$;a)1= $\int_{-\infty}^{\infty}$ f(x)dx$\int_1^5 (\frac{1}{8}x + a)dx = \frac{1}{16}x^2 + ax_1^5 = \frac{25}{16} + 5a - (\frac{1}{16} + a)$ =

$\frac{24}{16} + 4a \Rightarrow \frac{24}{16} + 4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

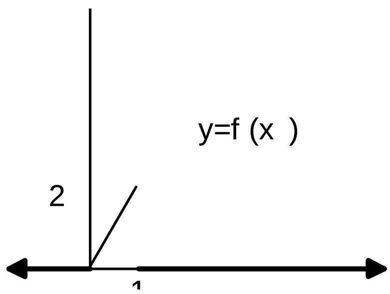
b) F(x)= $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\, si\, x \le 1 \\ \int_1^x (\frac{1}{8}t - \frac{1}{8})dt = \left.\frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t\right]_1^x = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\; si\, 1 < x \le 5 \\ 1\, si\, x > 5 \end{cases}$

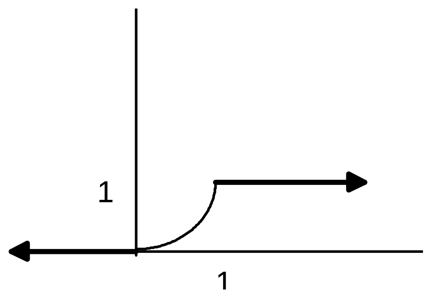
c)E(X)= $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^5 x(\frac{1}{8}x - \frac{1}{8})dx = \int_1^5 (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x)dx = \left.\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{16}x^2\right]_1^5 = \frac{176}{48}$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_1^5 (x - \frac{176}{48})^2(\frac{1}{8}x - \frac{1}{8})dx \quad ; \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

3.- F(x)= $\begin{cases} 0\, si\, x \le 0 \\ x^2\, si\, 0 < x \le 1 \\ 1\, si\, x > 1 \end{cases}$; a) f(x)=F '(x)= $\begin{cases} 0\, si\, x \le 0 \\ 2x\, si\, 0 < x \le 1 \\ 0\, si\, x > 1 \end{cases}$

b)





c) E(X)=$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$;$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2 2xdx =$

$=\int_0^1 (2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x)dx = \frac{1}{18}$

d) P(1/4<x<1/2)=$\int_{1/4}^{1/2} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 2xdx = \left. x^2\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

4.-f(x)=$\begin{cases} \frac{C}{1+x^2} \; si\, 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ Para cualquier otro valor de x} \end{cases}$; a) 1=$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{C}{1+x^2}dx = \left. C\text{arctg x}\right]_0^1 = C\text{arctg 1-}$

Carctg 0=$C\frac{\pi}{4} - 0 \Rightarrow C\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow C = \frac{4}{\pi}$

E(X)=$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{\pi}x}{1+x^2}dx = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \left.\frac{2}{\pi}L(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}L2$

5.

x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x_i^2p_i$
1,00	11/36	11/36	1,00	11/36
2,00	9/36	18/36	4,00	36/36
3,00	7/36	21/36	9,00	63/36
4,00	5/36	20/36	16,00	80/36
5,00	3/36	15/36	25,00	75/36
6,00	1/36	6/36	36,00	36/36
		$\Sigma x_ip_i = \frac{91}{36}$		$\Sigma x_i^2p_i = \frac{301}{36}$

E(X)=91/36; $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - E(X)^2 = \frac{301}{36} - \frac{8281}{36^2} = 1'97$; $\sigma = \sqrt{1'97} = 1'40$

F(x)=$\begin{cases} 0 \; si\, x < 1 \\ 11/36 \; si\, 1 \le x < 2 \\ 20/36 \; si\, 2 \le x < 3 \\ 27/36 \; si\, 3 \le x < 4 \\ 32/36 \; si\, 4 \le x < 5 \\ 35/36 \; si\, 5 \le x < 6 \\ 1 \; si\, x \ge 6 \end{cases}$

6.-a) Representación: diagrama de barras ; b) F(x)=$\begin{cases} 0 \; six < 2 \\ 1/8 \; si\, 2 \le x < 3 \\ 2/8 \; si\, 3 \le x < 4 \\ 3/8 \; si\, 4 \le x < 5 \\ 4/8 \; si\, 5 \le x < 6 \\ 5/8 \; si\, 6 \le x < 7 \\ 6/8 \; si\, 7 \le x < 8 \\ 7/8 \; si\, 8 \le x < 9 \\ 1 \; si\, x \ge 9 \end{cases}$ representación: función escalonada

c)

x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x_i^2p_i$
2,00	1/8	2/8	4,00	4/8
3,00	1/8	3/8	9,00	9/8

4,00	1/8	4/8	16,00	16/8
5,00	1/8	5/8	25,00	25/8
6,00	1/8	6/8	36,00	36/8
7,00	1/8	7/8	49,00	49/8
8,00	1/8	8/8	64,00	64/8
9,00	1/8	9/8	81,00	81/8

$\Sigma x_i p_i = \frac{44}{8}$ $\Sigma x_i^2 p_i = \frac{284}{8}$ E(X)=44/8;

$\sigma^2=\frac{284}{8}-\left(\frac{44}{8}\right)^2= 5'25;\ \sigma = \sqrt{5'25} = 2'29$

d)P(X≥6)=1-P(X<6)=1-F(5)=1-4/8=4/8; P(4<X<7)=P(X<7)-P(X≤4)=F(6)-F(4)=5/8-3/8= 2/8 ; P(X<-3)=0

7.-a) $f(x)=\begin{cases} 0\ si\ x \le -1 \\ c((1-x^2)^{1/2}\ si\ -1<x<1 \\ 0\ si\ x\ge 1\end{cases}$; $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} c\sqrt{1-x^2}\,dx = c\frac{\pi}{2} \Rightarrow c=\frac{2}{\pi}$ (*)

(*) utilizando el cambio x=sent , dx =cost dt ; y teniendo en cuenta que al ser t=arcsenx se verifica que:cuando x=-1 t=arcsen-1=-π/2 y cuando x=1 t=arcsen1= π/2, la integral queda

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-sen^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt = 1/2(t+\frac{sen2t}{t})\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1/2(\frac{\pi}{2}+\frac{sen\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}) -$$

$$-1/2(-\frac{\pi}{2}+\frac{sen-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}) = 1/2(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}) = \frac{\pi}{2}$$

b) $E(X)=\int_{-1}^{1} x\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\,\Big]_{-1}^{1} = 0$ (*)

(*) la integral se puede hacer inmediata o por cambio de variable $t=1-x^2$

c) $P(0<x<\pi/4)=\int_{0}^{\pi/4} f(x)dx$

8.- $f(x)=\begin{cases} 0\ si\ x\le 0 \\ ae^{-ax}\ si\ x>0\end{cases}$ siendo a>0

a) 1º) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} ae^{-ax}dx = -e^{-ax}\Big]_0^{-\infty} = \lim_{x\to\infty}(-e^{-ax}) - (-e^{0}) = 0+1=1$;2º) $ae^{-ax} > 0\ \forall a>0$

por lo tanto cumple las propiedades y es una función de densidad; b) si pues ya hemos demostrado que las propiedades las cumple para cualquier a mayor que cero

c) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\ si\ x\le 0 \\ \int_0^x ae^{-ax}dx = -e^{-ax}+1\ si\ x>0\end{cases}$; F'(x)=f(x)

d) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} xae^{-ax}dx =$ (partes x=u, $ae^{-ax}dx=dv$)= $-xe^{-ax} - \frac{e^{-ax}}{a}\Big]_0^{\infty} =$

$= \lim_{x\to\infty}(-xe^{-ax} - \frac{e^{-ax}}{a}) - (0-\frac{e^0}{a}) = (*) = 1/a$

(*) $\lim_{x\to\infty} -xe^{-ax} = -\infty.0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} -xe^{-ax} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{ae^{ax}} = \frac{-1}{\infty} = 0$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx = \int_0^{\infty}(x-1/a)^2 ae^{-ax}dx =$ (haciendo la integral por partes dos veces y

tomando$(x-1/a)^2$=u; ae^{-ax}dx=dv)= $\left. -(x-1/a)^2 e^{-ax} - \frac{2}{a}(x-1/a)e^{-ax} - \frac{2}{a^2}e^{-ax} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a^2}$ (*)

(*)$\lim_{x\to\infty} -(x-1/a)^2 e^{-ax} = -\infty.0 = 0$ despues de hacer L'Hopital dos veces;

$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{a}(x-1/a)e^{-ax} = -\infty.0 = 0$ aplicando L'Hopital una vez

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$

9.-F(x)=$\begin{cases} 0 \; si \; x \le 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} \; si \; x > 0 \end{cases}$; f(x)=F'(x)= $\begin{cases} 0 \; si \; x \le 0 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} \; si \; x > 0 \end{cases}$

Soluciones ejercicios página 18

1.- n=7, A="salir cruz"; P(A)=1/2=p, P(A')=1/2=q

E(X)=n.p=7.1/2=7/2; Var(X)=npq=7/4

2.- n=12, A="no salir un 1" P(A)=5/6=p, P(A')=1/6=q ; E(X)=np=12.5/6, VAR(X)=12.1/6.5/6=60/36,

σ=$\sqrt{\frac{60}{36}}$

3.- n=6 A="nacer niña" P(A)=1/2=p; P(A')=1/2=q

a) P(X=3)=0'3125, b)P(X>3)=P(X=4)+p(X=5)+P(X=6)=0'2344+0'0938+0'0156=0'3438

4.-n=3 A'=salir bola roja" P(A')=3/5=q; A="salir bola blanca" P(A)=2/5=p

NOTA: dado que p(bola roja)=3/5=0'6>0'5 no puede considerarse dicho suceso como éxito pues entonces p=0'6 y no viene en las tablas, así pues hay que considerar A="bola blanca"

a) P(X=2)=0'2880 , b) P(X=1)=0'4320 ; c)

P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0'2160+0'4320+0'2880=0'936

5.- A="tornillo defectuoso" P(A)=20/100=0'2=p; q=0'8; n=3600

E(X)=np=3600.0'2=720; σ^2=npq=3600.0'2.0'8=576; σ=24

6.- E(X)=np=2, Var(X)=npq=np(1-p)=4/3 sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, despejando

n=6, p=1/3;q=2/3 F(x)=$\begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \sum_{i=0}^{x} \binom{6}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{6-i} \; si \; 0 \le x < 6 \\ 1 \; si \; x \ge 6 \end{cases}$

7.- B(10,0'6) n=10 p=0'6 q=0'4 F(x)= $\begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \sum_{i=0}^{x} \binom{10}{i} 0'6^i 0'4^{10-i} \; si \; 0 \le x < 10 \\ 1 \; si \; x \ge 10 \end{cases}$

8.- A=" Dar positivo" P(A)= $0'\hat{3}$=p; P(A')=$0'\hat{6}$=q ; n=10

En las tablas no viene p=$0'\hat{3}$ por lo que hay que aproximar p=0'30 o bien p=0'35

a) P(X>3)=1-P(X≤3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=1-0'0135-0'0725-0'1757-0'2522

c)P(X≤5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0'0135+0'0725+0'1757+ 0'2522+0'2371+0'1536

d)E(X)=np=$10.0'\hat{3}$=$3'\hat{3}$; $\sigma^2 = npq = 10.0'\hat{3}.0'\hat{6} = 2'\hat{2}$; $\sigma = \sqrt{2'\hat{2}} = 1'49$

9.- A="fluidez nula" P(A)=0'35=p; A'="fluidez aceptable" P(A')=0'65=q ; n=7

a)E(X)=np=7.0'35=2'45 ; σ^2=npq=7.0'35.0'65=1'5925 ; $\sigma = \sqrt{1'5925} = 1'26$

b)P(X=r)=$\binom{7}{r}0'35^r 0'65^{7-r}$

c)F(x)=$\begin{cases} 0\, si\, x<0 \\ \sum_{i=0}^{x}\binom{7}{i}0'35^i 0'65^{7-i}\, si\, 0 \le x < 7 \\ 1\, si\, x \ge 7 \end{cases}$

10.- A="partidario retrasmisiones de boxeo" P(A)=0'15=p ; q=0'85 ;n=10

a) P(X=5)=0'0085 ; b) P(X=1)=0'3474

11.- No es de probabilida binomial. Se resuelve mediante un diagrama de árbol

12,- P(X=x)= $\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$

a) P(X=1)=$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$; b)P(X=3)=$(1/2)^3$=1/8

c)P(1cara/impar caras)=$\frac{\text{P(1cara} \cap \text{impar)}}{\text{P(impar)}} = \frac{\text{P(1cara)}}{\text{P(1cara} \cup \text{3caras)}} = \frac{\text{P(X=1)}}{\text{P(X=1)+P(X=3)}} =$

$\frac{3/8}{3/8+1/8} = \frac{3}{4}$

13.- n=5 ; éxito=nº primo={1,2,3,5} p=4/6=2/3; q=1/3

P(X=5)=$\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

<u>Soluciones ejercicios pág 29</u>

1.- μ= 68 ; σ=8; N(68,8)

a) P(X≤50)=P(Z≤ $\frac{50-68}{8}) = P(Z \le -2'25) = P(Z \ge 2'25) = 1 - P(Z < 2'25) =$ 1-0'9878=0'0122 ∼1%; como son 200 estudiantes habrá aproximadamente 2 en estas condiciones

b) P(60<x<65)= P($\frac{60-68}{8} < Z < \frac{65-68}{8}$) = P(-1<Z<-0'375)=P(0'375<Z<1)=

P(Z<1)-P(Z<0'375)=0'8413-0'64615=0'1951 ∼19’51% , por tanto 19’51% de 200=39 estudiantes

c)P(66<x<72)= P($\frac{66-68}{8} < Z < \frac{72-68}{8}$) =P(-0’25<Z<0’50)= P(z<0’50)-P(Z<-0’25)=

P(z<0’50)-[1-p(Z<0’25)]=0'6915-[1-0'5987]=0'29’02 ∼29% , por tanto 29% de 200=58 estudiantes

d)P(X>75)=1-P(X<75)=1-P($Z < \frac{75-68}{8}$) =1-P(Z<0'875)=1-0'8092=0'1908 ∼19%, 38 estud.

2.- N(6'5,1'5); SB=15%; suspensos =10%

a) sea a la puntuación mínima para obtener sobresaliente P(X>a)=0'15 ⇒ $P(Z > \frac{a-6'5}{1'5})$=

=0'15 $\Rightarrow$1-P(($Z<\frac{a-6'5}{1'5}$)=1-0'15=0'85. Buscando en las tablas obtenemos que el valor de la variable al que corresponde esa probabilidad de 0'85 es 1'04; es decir P(Z<1'04)=0'85 por tanto 1'04=$\frac{a-6'5}{1'5}$ $\Rightarrow$ a=1'04.1'5+6'5 =8'06

b) Sea a la puntuación mínima para aprobar P(X<a)=0'1 $\Rightarrow P(Z<\frac{a-6'5}{1'5})=0'1$. Buscando en las tablas vemos que la primera probabilidad que aparece para z>0 es 0'5 luego $\frac{a-6'5}{1'5}$ es negativo . Entonces P(Z<$\frac{a-6'5}{1'5}$) $=P(Z>-\frac{a-6'5}{1'5})=1-P(Z<-\frac{a-6'5}{1'5})$ $\Rightarrow$

P(Z<$-\frac{a-6'5}{1'5}$)=1-0'1=0'9. Buscando en las tablas $-\frac{a-6'5}{1'5}$=1'28 por tanto -a+6'5=1'28.1'5;

-a=1'28.1'5-6'5; a=4'58

c) Suponiendo que el aprobado está en 4'58 y que la media no varía μ=6'5 me piden calcular σ para que P(X>4'58)=0'8. Entonces: P(Z>$\frac{4'58-6'5}{\sigma}$) $=0'8\Rightarrow P(Z>\frac{-1'92}{\sigma})=0'8\Rightarrow\ P(Z<\frac{1'92}{\sigma})=0'8$; buscando en las tablas $\frac{1'92}{\sigma}=0'84\Rightarrow\sigma$=2'28

3.- N(70'5,9); P(X$\leq$ 80) $=P(Z\leq\frac{80-70'5}{9})=P(Z\leq 1'05)=$ 0'8531. Es decir el 85’31% de los opositores se han quedado sin plaza, luego se ha adjudicado plaza al 14’69% de los opositores= 294 opositores

4.- N(100,15); a) P($(95\leq X\leq 110)$ =$P(\frac{95-100}{15}\leq Z\leq\frac{110-100}{15})=P(-0'33\leq Z\leq 0'66)$ =

$P(Z\leq 0'66)-P(Z>0'33)=P(Z\leq 0'66)-[1-P(Z\leq 0'33)]=$ 0'7454-[1-0'6293]=0'37’47 es decir el 37’47% de la población

b)$P(100-a\leq X\leq 100+a)=0'5\Rightarrow P(\frac{100-a-100}{15}\leq Z\leq\frac{100+a-100}{15})=0'5\Rightarrow\ P(\frac{-a}{15}\leq Z\leq\frac{a}{15})$=0'5

$\Rightarrow P(Z\leq\frac{a}{15})-[1-P(Z\leq\frac{a}{15})]=0'5\Rightarrow 2.P(Z\leq\frac{a}{15})=1'5\Rightarrow P(Z\leq\frac{a}{15})=0'75$

buscando en las tablas $\frac{a}{15}$=0'78 , por tanto a=0'67.15=10'05 . Intervalo (100-10'05,100+10'05) es decir (89'95,110'05)

c) P(X>125)=P(Z> $\frac{125-100}{15}$) $=P(Z>1'66)=1-P(Z<1'66)=$ 1-0'9515=0'0485 es decir el 4'85% de la población. Dado que son 2500 individuos son aproximadamente 121 los de coeficiente superior a 125

5.- N(65,18) sean a y b las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro; P(X<a)=20/100=0'2

$\Rightarrow P(Z<\frac{a-65}{18})=0'2\Rightarrow\frac{a-6'5}{18}$es negativo puesto que 0'2<0'5; en consecuencia

P$(Z<\frac{a-65}{18})=P(Z\geq -)$=1-P(z<$-\frac{a-65}{18})=0'2\Rightarrow P(z<-\frac{a-65}{18})=$ 0'8 Con lo que buscando en las tablas obtenemos que -$\frac{a-65}{18}$=0'85 y despejando a=49'7.

Hallamos ahora b;P(a<X<b)= P($\frac{49'7-65}{18}<Z<\frac{b-65}{18})=0'65\Rightarrow P(-0'85<Z<\frac{b-65}{18})=0'65\Rightarrow$

$\Rightarrow P(Z<\frac{b-65}{18})-P(z<-0'85)=0'65\Rightarrow$

$P(Z<\frac{b-65}{18})=0'65+P(Z<-0'85)=0'65+[1-P(Z<0'85]=0'65+[1-0'8023]$=0’8477

Buscando en las tablas, $\frac{b-65}{18}$=1’03. Entonces b=1’03.18+65=83’54

6.-N(45,σ); a) P(X>50)=0'0062 $\Rightarrow P(Z>\frac{50-45}{\sigma})=0'0062\Rightarrow 1-P(Z<\frac{50-45}{\sigma})=0'0062\Rightarrow$

$P(Z<\frac{5}{\sigma})=0'9938\Rightarrow\frac{5}{\sigma}=2'5\Rightarrow\sigma=2$

b)P(39'7$\leq X \leq 43'5) = P(\frac{39'7-45}{2} \leq Z \leq \frac{43'5-45}{2}) = P(-2'65 \leq Z \leq -0'75) = P(0'75 < Z < 2'65)$ =P(Z<2'65)-P(Z<0'75)=0'9960-0'7734=0'2226=22'26% de la población; como se analizan 120 piezas, salen aproximadamente 27 con diámetro en ese intervalo

7.- N(65,3) Sea A="tener peso comprendido entre 63'5 y 66'5" y B=" tener peso comprendido entre 62 y 68"

P(A)=P(63'5>X>66'5)=P($\frac{63'5-65}{3} > Z < \frac{66'5-65}{3}) = P(-0'5 < Z < 0'5) = P(Z < 0'5) - [1 - P(Z < 0'5)] = 2.0'6915 - 1 = 0'383$

P(B)=P(62<X<68)=P($\frac{62-65}{3} < Z < \frac{68-65}{3}) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$ 2.0'8413-1=0'6826

Se toman dos unidades al azar a) P(AA)=0'383.0'383=0'1466 ; b)P($\overline{B}$B)+P(B$\overline{B}$)= =2.0'3174.0'6826=0'4333 luego es más probable el caso b

8.- N(5'8,1'75)

a) P(X>6)=$P(Z > \frac{6-5'8}{1'75}) = P(Z > 0'11) = 1 - P(Z < 0'11) = 1 - 0'5438 = 0'4562$ Por tanto un 45'62 % fue admitido

b) Es una binomial n=10, p=0'4562<0'5 ; P(X=4) se busca en las tablas y da 0'2384

9.- N(38,1'5)

NOTA: La variable cuello de las personas es continua, de ahí que su distribución sea normal; sin embargo el cuello de las camisas es discreta pues fabricamos camisas del 35,36,37,38,etc... Por ello tenemos que suponer que usarán camisas de un determinado número las personas que tengan un cuello 0'5 más pequeño o más grande que dicho número. Así, por ejemplo, usarán el 43 los que tengan un cuello entre 42'5 y 43'5 cm.

a) P(34'5<X<38'5)=P($\frac{34'5-38}{1'5} < Z < \frac{38'5-38}{1'5}) = P(-2'3 < Z < 0'33) = P(Z < 0'33) - P(Z < -2'3)$ = $P(Z < 0'33) - [1 - P(Z < 2'3)] = 0'6293 - [1 - 0'9893] = 0'6186 = \frac{6186}{10000}$ como son 10000 camisas habrá que producir 6186

B)P(42'5<X<43'5) =P($\frac{42'5-38}{1'5} < Z < \frac{43'5-38}{1'5}) = P(3 < Z < 3'66) = P(Z < 3'66) - P(Z < 3)$= $= 0'9999 - 0'9987 = 0'0012$ como son 10000 camisas habrá que producir 12

10.- B(100,1/2); n=100 ; p=1/2; Éxito="cara" como np=100.1/2=50>5 y nq=100.1/2=50>5 puede aproximarse por una normal. μ=np=50 ; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$

NOTA: hay que tomar 0'5 menos por debajo y 0'5 más por arriba al aproximar la binomial por la normal

a)P(X$\leq 40'5) = P(Z \leq \frac{40'5-50}{5}) = P(Z \leq -1'9) = 1 - P(Z < 1'9) = 1 - 0'9713 = 0'0287$

b)P(X>60'5)=$P(Z > \frac{60'5-50}{5}) = 1 - P(Z \leq 2'1) = 0'0179$

11.- P(V)=0'512 distribución binomial; n=2000, p=0'512, np=1024, nq=976 puede aproximarse por una normal.

μ=np=1024; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{499'7} = 22'3$; P(999'5<X<1080'5)=P($\frac{999'5-1024}{22'3} < Z < \frac{1080'5-1024}{22'3}$) =

=P(-1'09<Z<2'53)=P(Z<2'53)-P(Z<-1'09)=P(Z<2'53)-[1-P(Z<1'09)]=0'9943-[1-0'8621]=0'8564

12.- t∈ $[0,1] \longrightarrow f(t) = \frac{e^t}{c}$ $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0 \\ \frac{e^x}{c} & si\, 0 \le x \le 1 \\ 0 & si\, x > 1 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{e^x}{c}dx = \left. \frac{e^x}{c} \right]_0^1 = \frac{e}{c} - \frac{1}{c} = \frac{e-1}{c} = 1 \Rightarrow e - 1 = c$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad si\, x < 0 \\ \int_0^x \frac{e^t}{e-1}dt = \left. \frac{e^t}{e-1} \right]_0^1 = \frac{e^x}{e-1} - \frac{e^0}{e-1} = \frac{e^x - 1}{e-1} \quad si \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 \quad si \quad x > 1 \end{cases}$$

P(X>1/2)=1.P(X<1/2)=1-F(1/2)=1-$\frac{e^{1/2}-1}{e-1}$

E(X)=$\int_0^1 \frac{e^t}{e-1}.t.dt = \left. \frac{e^t(t-1)}{e-1} \right]_0^1 = \frac{1}{e-1}$ La integral se hace por partes

13.- n=9; p=0'95 P(funcione)=P(X≥6). Como p=0'95 no viene en las tablas entonces debemos considerar el éxito al reves; éxito="no funcionar" p=0'05

P(funcione)=P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0'6302+0'2985+0'0629+0'0077=0'9993

E(X)=np=9.0'95=8'55; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9.0'95.0'05} = \sqrt{0'4275} = 0'6538$

14.- X="mujer" p=0'49 q=0'51 (no puede tomarse al revés porque no vendría en las tablas)

P(0<X<3)=P(X=1)+P(X=2)=0'3823+0'3674=0'7497

15. A) P(X>72)=P(Z>$\frac{72-78}{6}$)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0'8413; b) Nos piden una probabilidad condicionada: P(X>84/x>72). Dado que la intersección de esos sucesos es X>84 tendremos:

P(X>84/X>72)=$\frac{P(X>84)}{P(X>72)} \underset{*}{=} \frac{0'1587}{0'8413}$=0'1886

P(X>84)=P(Z>$\frac{84-78}{6}$) $= P(Z>1) = 1 - P(Z<1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$