DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EXPERIMENTO DE BERNOUILLI

En muchas ocasiones nos encontramos con la necesidad de saber cuántas veces ocurrirá un suceso concreto S en la realización, bajo las mismas condiciones, de n pruebas iguales. Por ej: número de seises al lanzar 20 veces un dado o bien número de varones de entre los 50 niños nacidos en un día en un hospital, etc.
Estas situaciones se caracterizan por la repetición n veces de la misma prueba, en la que son posibles sólo dos resultados incompatibles : que se verifique o no se verifique el suceso observado, siendo la probabilidad de estos dos resultados invariante a lo largo de las n pruebas; es decir, de forma que el resultado obtenido en cada una de ellas no influye en las restantes.

Llamaremos experimento de Bernouilli a todo experimento aleatorio que verifica las siguientes condiciones:

1. *En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados, el suceso A y su contrario A '. Les llamaremos respectivamente éxito y fracaso*
2. *El resultado obtenido en cada prueba es independiente del resultado obtenido en las anteriores*
3. *La probabilidad del suceso A, que denotaremos por p, es constante y por lo tanto no varía de una prueba a otra. (representaremos por q la probabilidad de A' , naturalmente q=1-p*

Los dos ejemplos mencionados anteriormente son experimentos de Bernouilli. En el primero el éxito sería A=" salir un seis" y la probailidad de A es p=1/6, el número de pruebas 20. En el segundo A=" nacer varón" y p=P(A)=1/2, el número de pruebas 50.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

En un experimento de Bernouilli podemos definir distintas variables aleatorias, que darán lugar a distintas distribuciones de probabilidad.

Si la variable que definimos es X= " número de éxitos obtenidos en las n pruebas", a dicha variable se le llama variable aleatoria binomial, y a la distribución a la que da lugar distribución binomial. Es claro que Im X= $\{0,1,2,......,n\}$

Vamos a analizar, en primer lugar, la distribución binomial mediante algunos ejemplos.

Supongamos que realizamos el experimento de lanzar 4 veces una moneda al aire y queremos estudiar la variable aleatoria X="número de caras". X es una variable aleatoria discreta, cuyos posibles resultados son: 0,1,2,3,4
P(X=0)=P(x,x,x,x)=1/2.1/2.1/2.1/2=$(1/2)^4$
P(X=1)=P(c,x,x,x)+P(x,c,x,x)+P(x,x,c,x)+P(x,x,x,c)=4.$(1/2)^4$. Podríamos haberlo pensado de otra manera: Primero elegimos el lugar donde puede estar situada la cara, tenemos$\binom{4}{1}$lugares donde poder colocarla, para cada uno de ellos la probabilidad de esa cara es de 1/2 y la de las otras tres cruces de $(1/2)^3$. Por lo tanto: P(X=1)= $\binom{4}{1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3$

Pensemos ahora la P(X=2)= $\binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2$. De igual forma haríamos P(X=3) y P(X=4)

Veamos otro ejemplo: Se lanza 7 veces un dado, se considera el suceso A=" salir un 1" y la variable X=" número de veces que ocurre el suceso A". En este caso X es una V.A. discreta, cuyos posibles resultados son: 0,1,2,3,4,5,6,7. ¿ Cuál es la probabilidad de que X=3?

P(X=3)= $\binom{7}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^4$. Dado que tenemos $\binom{7}{3}$ lugares en donde colocar los tres unos, cada uno de ellos tiene probabilidad de 1/6 y en el resto de los lugares a de aparecer cualquier número distinto de 1, es decir el suceso A' cuya probabilidad es 5/6

Vamos a generalizar lo que hemos pensado mediante estos dos ejemplos:

<u>Definición</u>

Si en un experimento de Bernouilli consideramos la variable X=" número de éxitos obtenidos en las n pruebas realizadas", a dicha variable le llamaremos variable binomial . Su función de probabilidad será la siguiente:

$$f(r)=P(X=r)=\begin{cases} \binom{n}{r}p^r q^{n-r} \text{ si } r \in \{0,1,2,3,......,n\} \\ 0 \text{ si } x \notin \{1,2,3,.........,n\} \end{cases}$$ Siendo p= P(éxito) y q=P(fracaso)

El nombre de distribución binomial viene dado de que las probabilidades son los términos del desarrollo de un binomio.

Se expresa por B(n,p) a la variable binomial.

<u>Función de distribución binomial</u>

Dado que F(x) son las probabilidades acumulativas, vendrá dada en este caso por la suma de los términos del binomio y así:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i}p^i q^{n-i} \text{ si } 0 \le x \le n \\ 1 \text{ si } x>n \end{cases}$$

Observación: [x] indica la parte entera de x. Es decir si x no es entero, su valor en la distribución se calcula sobre su parte entera. Ej: F(2'7)=F(2)

Ejemplos:

1)Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas; cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno decide contestar dicha prueba al azar. Se pide:
a) Probabilidad de acertar exactamente 4 preguntas
b) Probabilidad de no acertar ninguna
c) Probabilidad de acertar al menos ocho
d) Probabilidad de acertar al menos cuatro

e) Probabilidad de acertar más de cinco y menos de ocho.

Consideremos los sucesos A="acertar" y A ' =" no acertar" P(A)=0'25=p y P(A')=0'75=q
Sea X la variable aleatoria que representa el número de aciertos . X es B(10,0'25)

a) P(X=4)= $\binom{10}{4}(0'25)^4(0'75)^6$ =0'1460
b) P(X=0)= $\binom{10}{0}(0'75)^{10}$ =0'0563
c) P(X ≥8) = P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)= $\binom{10}{8}(0'25)^8(0'75)^2+\binom{10}{9}(0'25)^9(0'75)+$
+ $\binom{10}{10}(0'25)^{10}$ =0'005
d) P(X ≥4) ; en este caso es más cómodo hallar la probabilidad del complementario:

P(X < 4) = P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)= $\binom{10}{0}(0'75)^{10}+\binom{10}{1}(0'25)(0'75)^9+$
+ $\binom{10}{2}(0'25)^2(0'75)^8+\binom{10}{3}(0'25)^3(0'75)^7$ y la probabilidad que buscamos será igual a uno menos la obtenida de los cálculos anteriores.
e) P(5 < x < 8) = P(X=6)+P(X=7)

NOTA:
Los cálculos de estas expresiones son muy laboriosos, por ello se han confeccionado tablas para hacerlos . Veamos un ejemplo utilizando las tablas.

2)Un alumno debe realizar un examen de 8 preguntas con respuestas verdadero o falso. ¿Qué probabilidad tiene de contestar correctamente al menos la mitad de ellas si desconoce completamente la materia del examen?

Se trata de una B(8, 0'5) y nos piden P(X ≥4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=
0'2734+0'2188+0'1094+0'0312+0'0039=0'6367

MEDIDAS CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

a) E(X)=n.p siendo n=número de pruebas, p=P(éxito) ;b) Varianza de X : σ^2= n.p.q

c) Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n.p.q}$.
NOTA: No hacemos la deducción de estas fórmulas.

Ejemplo:

La probabilidad de que un artículo producido en una fábrica sea defectuoso es de 0'02. Un cargamento de 10.000 artículos se envía a unos almacenes. Hallar el valor esperado de artículos defectuosos y la desviación típica.

E(X)=n.p=(10.000).(0'02)=200 artículos defectuosos

$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{(10.000).(0'02)(0'98)} = \sqrt{196}$ =14.

EJERCICIOS (solución al final del tema)

1.- Una moneda se lanza 7 veces. Hallar la esperanza y la varianza del número de apariciones de la cruz
2.- Un dado se lanza 12 veces. Hallar la esperanza y desviación típica del número de veces que no sale un uno
3.-En una familia de 6 hijos, hallar la probabilidad de que : a) sean 3 niñas y 3 niños b) Menos niñas que niños. Suponer equiprobables los sucesos tener niño y niña.
4.-Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Se saca y se reemplaza una bola tres veces. Hallar la probabilidad de sacar: a) una bola roja, b) dos bolas rojas, c) al menos una bola roja.
5.-El 20% de los tornillos producidos en una fábrica es defectuoso. En una partida de 3600 tornillos hallar el número esperado de defectuosos y la desviación típica.
6.- Sea X una distribución binomial con E(X)=2 y σ^2 =4/3. Hallar la función de distribución de X
7.-Escribe la función de distribución B(10,0'6)
8.- Se sabe que la tercera parte de los alumnos de 14 años dan positivo en una prueba de agresividad. Escogida al azar una muestra de 10 alumnos, hallar la probabilidad de: a) encontrar dos que den positivo, b) más de tres, c)a lo sumo cinco, d) Hallar la media y desviación típica de la distribución.
9.- Se ha pasado una prueba de fluidez verbal a los niños de una comarca y se ha detectado que un 35% de ellos tienen una fluidez prácticamente nula y el resto la tiene aceptable. De una muestra aleatoria formada por 7 niños hallar: a) La media y varianza, b) la función de probabilidad, c) la función de distribución.
10.-En un estudio realizado por T.V.E. se ha podido saber que solo el 15% de los españoles es partidario de que se retransmitan los combates de boxeo. Elegida una muestra de 10 personas, hallar la probabilidad de que: a) la mitad sea favorable, b) uno solo sea favorable.
11.-En un torneo de ajedrez, los rusos Popov y Filipov disputan la final. Gana el que antes gane 5 partidas. Popov ganó la primera,si suponemos que ambos jugadores tienen la misma pericia, ¿Cuál es la probabilidad de que Popov gane el torneo ? NOTA: No se considera la posibilidad de que queden en tablas
12.-Explicar cuál es la fórmula de la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtengan x caras. Supongamos ahora que se ha realizado ese experimento. Se pide
a)¿ Cuál es la probabilidad de obtener una cara? ;b)¿Cuál es la de obtener tres caras?
c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea 1?
13.-Se lanza un dado 5 veces ¿Cuál es la probabilidad de obtener cinco números primos?