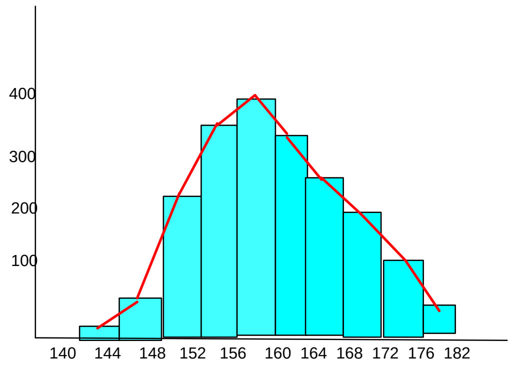
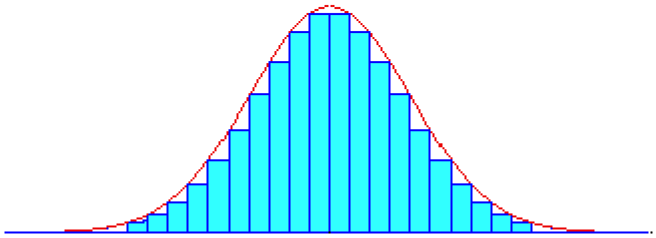
DISTRIBUCIÓN NORMAL

El modelo de distribución de probabilidad más importante, para variables continuas, es la distribución normal.pasamos a estudiar dicha distribución.

La gráfica adjunta es un histograma con la estatura de 1400 mujeres. Este histograma tiene una forma muy corriente. Con frecuencia nos encontramos con distribuciones de este tipo: pocos individuos en los extremos y aumento paulatino hasta llegar a la parte central del recorrido donde están la mayoría de ellos.



Si hacemos cada vez más pequeños los intervalos y el número de observaciones crece indefinidamente, el histograma se transformaría en una linea continua del siguiente tipo:



A esta curva se le llama <u>Campana de Gauss o Curva Normal</u>

La distribución normal se presenta en multitud de problemas Biológicos: tallas pesos u otras medidas de cualquier especie, Físicos: distribución de los errores cometidos en las observaciones, Sociológicos: consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano, Psicológicos:coeficiente intelectual, grado de adaptación al medio, etc. Su importancia fue tal que durante mucho tiempo se creyó que todas las distribuciones estadísticas se aproximarían a la normal si se dispusiese de un número grande de observaciones bien hechas. Hoy día es evidente la exageración de tal creencia, aunque la distribución normal sigue jugando un papel fundamental en la estadística.

VARIABLE ALEATORIA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL. FUNCIÓN DE DENSIDAD

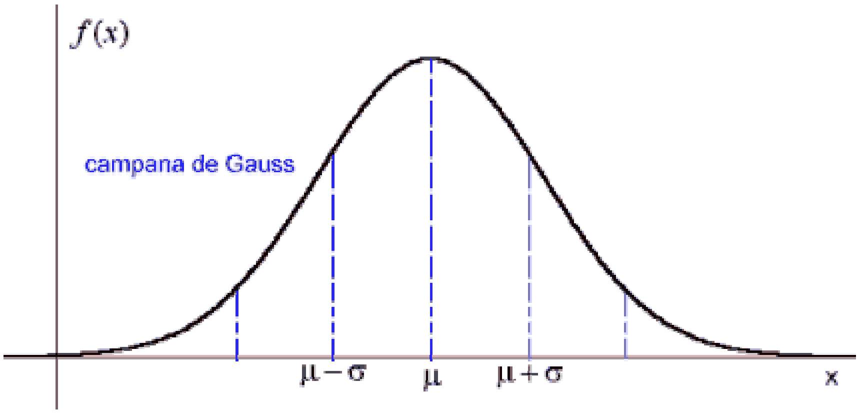
Una variable aleatoria continua X tiene una función de distribución normal si y solo si su función de densidad viene dada por $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Es evidente que f(x) > 0 $\forall x \in R$ y se puede probar por integración que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ y por tanto es una función de densidad

La función f depende de dos parámetros: μ que resulta ser al mismo tiempo la media moda y mediana de la distribución y σ que es su desviación típica. Diremos que la variables es N(μ,σ)

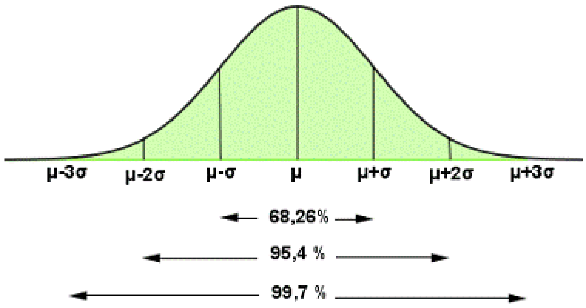
Si bien la función de densidad que acabamos de definir tiene una fórmula matemática complicada, su representación gráfica es la campana de Gauss de la que ya hemos hablado.

Conviene detallar algunas propiedades de esta función que nos facilitarán su comprensión y que son fácilmente deducibles a partir de su gráfica.



1. La curva tiene forma campaniforme y es simétrica respecto a la recta vertical x=μ (Eso demuestra de forma gráfica que x=μ es la media y la mediana)
2. Su máximo coincide precisamente con el valor de la ordenada de la media (Con lo que comprobamos que esta coincide con la moda)
3. Por ser una función de densidad, el área encerrada entre la campana, y el eje OX es igual a 1. Al ser simétrica respecto de la recta x=μ , se verifica que el área que deja dicho eje de simetría a la izd ha de ser igual al que deja a la dcha. igual a 0'5.
4. A ambos lados del valor x=μ las ordenadas decrecen, primero lentamente y despues con mayor rapidez, lo que significa un cambio de curvatura de la función. Los puntos de inflexión los alcanza a ambos lados de la media y a distancia σ de ella. Es decir sus puntos de inflexión tienen de abscisa x=μ-σ y x=μ+σ
5. La ordenada de la curva tiende a cero a medida que nos alejamos a la izd o dcha de la media, es decir tiene por asíntota horizontal y=0
6. En la práctica, no es necesario alejarse mucho de los valores centrales para que la ordenada sea casi nula; verificándose que el área se distribuye de la siguiente manera

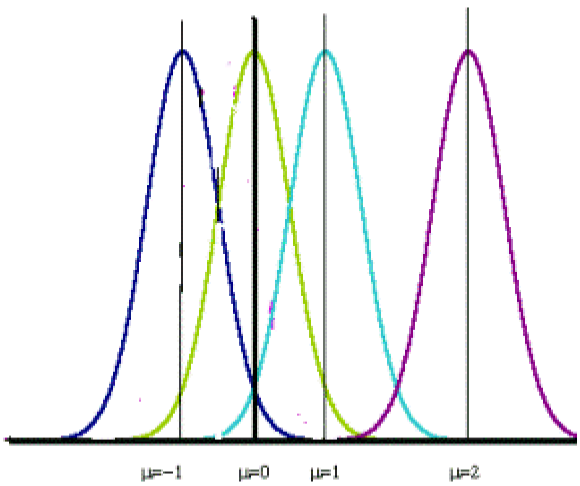
:



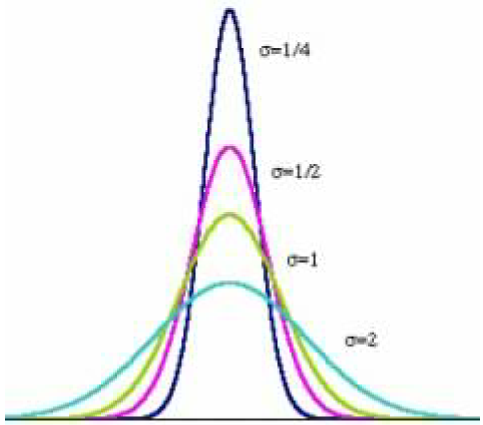
En el intervalo $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ Se encuentra el 68,26% de la población.
En $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ el 95'45%
En $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ el 99'73%
Obsérvese que la probabilidad de que un individuo esté fuera del intervalo ($\mu-3\sigma,\mu+3\sigma$) es prácticamente nula, puesto que menos de un 0,3% de la población se halla en dicho intervalo

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR

A la vista de la representación gráfica de la función de densidad de una V.A. N(μ,σ), es evidente que para cada par de valores (μ,σ) obtendremos una función de densidad distinta. En los siguientes gráficos puede verse como afecta a la forma de la gráfica los distintos valores de μ y σ



Distinta media e igual desviación típica

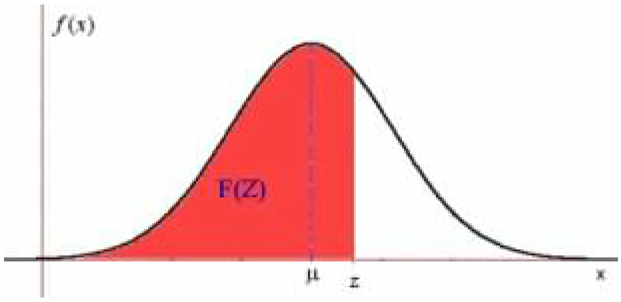


Igual media y distinta desviación típica

La variación de μ supone únicamente una traslación sobre el eje OX
Cuanto mayor es σ mayor es la dispersión y en consecuencia la gráfica es menos estilizada; por el contrario para valores pequeños de σ, la gráfica se encuentra concentrada en torno a la media. En cualquier caso el área encerrada entre la curva y el eje OX es igual a 1

De las infinitas distribuciones N (μ,σ), tiene especial interés la N(0,1), es decir aquella que tiene por media cero y por desviación típica 1.Esta distribución se llama distribución normal estandar o tipificada. En este caso la función de densidad viene dada por: f(x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

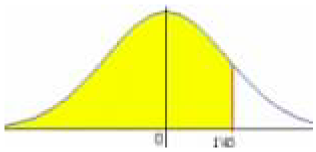
Su función de distribución será: F(z)=P(X < z)= $\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ y representa el área sombreada en la figura.



Con el fin de facilitar el cálculo y no tener que utilizar en todo momento la integración, se han elaborado tablas para esta distribución.

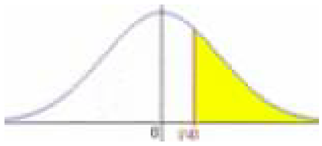
Ejemplos:

1. La probabilidad pedida se encuentra directamente en las tablas
-P(z < 1'45)=0'9265

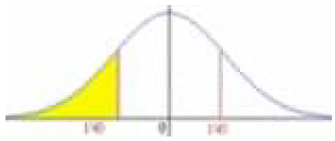


En la 1ª columna buscamos el valor de las unidades y las décimas: 1’4 En la 1ª fila el valor de las centésimas:0’05. Su intersección nos da la probabilidad.

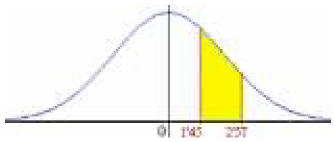
2. Probabilidad mayor que un valor positivo
-P(z>1.45)=1-P(z<1’45)=1-0’9265=0’00735



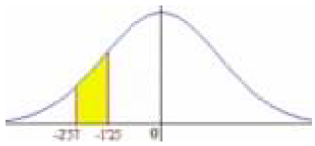
3.Probabilidad menor o mayor que un valor negativo
-P(z < -1'45)=P(z > 1'45)=1-P(z <1'45)=1-0'9265=0'0735
Si nos pidiesen P(z>-1’45)=P(z<1’45) por la simetría de la gráfica
P(z>-1’45)=P(z<1’45)=0’9265



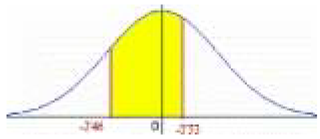
4.Probabilidad entre dos valores positivos
-P(1'25 < z <2'57)=P(z < 2'57)-P(z < 1'25)=
=0'9949-0'8944=0'1005



5.Probabilidad entre 2 números negativos
-P(-2'57 < z < -1'25)=P(1'25 < z < 2'57)=0'1005
Por la simetría de la gráfica



6. Probabilidad entre un valor positivo y uno negativo
-P(-2,46 < z < 0’53)= P(z < 0’53)-P(z < -2’46)=
=P(z < 0’53)-P(z >2’46)=P(z < 0’53)-(1-P(z <2’46)=
=0'7019-1+0'0031=0'695



7. Manejo de la tabla forma inversa: Nos dan una probabilidad y tenemos que averiguar el valor de la variable que acumula dicha probabilidad
- P(z<k)= 0’9245, calcula k. Buscamos en los resultados de la tabla el número 0’9245 y observamos que corresponde a p(z<1’45), por tanto k=1’45
Si la probabilidad que buscamos no viene en las tablas por ejemplo P(X<k)=0’9260, buscamos los números que tienen una probabilidad más parecida, en este caso P(X<1’45)=0’9245 y P(z<1’46)=0’9279, si estuviese mucho más cerca de uno que del otro elegiriamos ese como k si, como ocurre en este caso, están más o menos igual de separados de la probabilidad buscada, elegimos como k su semisuma k= 1’455

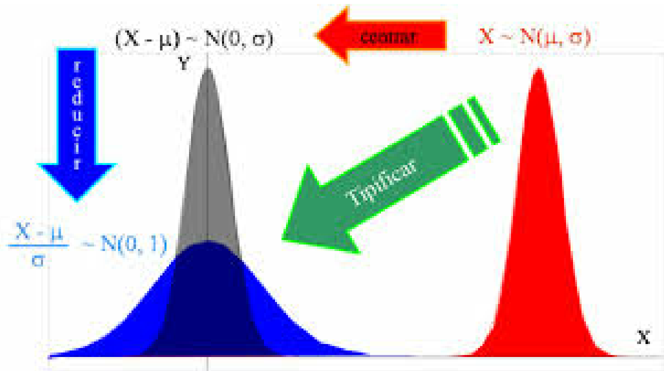
TIPIFICACIÓN DE LA VARIABLE

Hemos dicho que la distribución N(0,1) se encuentra tabulada, lo cual permite un cálculo rápido de las probabilidades asociadas a esta distribución.
Cualquier otra distribución normal N(μ,σ) puede transformarse mediante un cambio de variable en una distribución N(0,1). Esta transformación se llama tipificación de la variable.

Para llevar a cabo esta transformación, es obvio que hay que realizar dos pasos:

1. **Centrar.** Esto es trasladar la media de la distribución al origen de coordenadas, es decir hacer $\mu=0$
2. **Reducir** la desviación típica a σ=1, esto equivale a **contraer o dilatar** la gráfica de la distribución para que coincida con la estandar

Estos dos pasos se consiguen simultaneamente haciendo el siguiente cambio de variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$



Podemos observar estos dos procesos en la figura adjunta

Ejemplos:

1.- Se ha aplicado a 300 alumnos un test y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:
a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá en dicho test una puntuación entre 20 y 35
b) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 42?

Se trata de una distribución N(30,12). Para calcular las probabilidades pedidas haremos el siguiente cambio de variable $Z=\frac{X-30}{12}$

a)$P(20 < X < 35)=P(\frac{20-30}{12} < Z < \frac{35-30}{12})=P(-0'83 < Z < 0'42)=P(Z<0'42)-P(Z<-0'83)=$
$=P(Z < 0'42)-(1-P(Z < 0'83))=0'6628-(1-0'7967)=0'4595$. Es decir, aproximadamente el 46% de los alumnos tienen una puntuación entre 20 y 35

b) $P(X > 42)=1-P(X < 42)=1-P(Z < \frac{42-30}{12})=1-P(Z < 1)=1-0'8413=0'1587$. Esto equivale a decir que aproximadamente el 16% de los alumnos tienen puntuación superior a 42 y dado que son 300 alumnos, se sigue que son 16.300/100= 48 alumnos aproximadamente.

2.- Supóngase que la temperatura T durante el mes de Junio está distribuida normalmente, con media 24º y desviación típica 6º. Hallar la probabilidad de que la temperatura esté entre 25º y 30º en un día determinado.
$P(25 < T < 30)=P(\frac{25-24}{6} < Z < \frac{30-24}{6})=P(0'16 < Z < 1)=P(Z<1)-P(Z<0'16)=0'8413-0'5636=0'2777$.

3.- Para seleccionar a los trabajadores de una empresa aplicamos un test a 400 personas, obteniendo que las puntuaciones siguen una distribución normal de media 60 y desviación típica 5. Si no podemos emplear más que a 122 de los presentados, ¿ cuál ha de ser la puntuación mínima de una persona para conseguir emple?

Sea a esa nota mínima , sabemos que $P(X \geq a)=0'305$, o bien $P(X < a)=0'695$. Tipificando la variable: $P(Z < \frac{a-60}{5})=0'695$. En este ejercicio tenemos que manejar las tablas al revés, dado que conocemos el valor de la probabilidad y queremos conocer el valor de la variable.Buscando en las tablas una probabilidad lo más próxima posible a 0'695, se obtiene que el valor de la variable es 0'51; por tanto $\frac{a-60}{5}=0'51$; a=60+5.0'51=62’55 puntos.

4. La altura de los alumnos de una clase se distribuye mediante una N(174, 2`3). Si escogemos al azar 10 alumnos de dicha clase ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 de ellos tengan una altura conprendida entre 172 y 176 cm?

Se trata de una distribución binomial en la que n=10, el éxito=” medir entre 172 y 176” y la probabilidad del éxito, p, tenemos que calcularla: p= P(172<X<176)=

$=P(\frac{172-174}{2'3} < Z < \frac{176-174}{2'3})=P(-0'87<Z<0'87)=P(Z<0'87)-[1-P(Z<0'87)]=$

$=0'8078-[1-0'8078]=0'6156$

Por tanto es una binomial B(10, 0’62) y queremos que haya exaxtamente 6 éxitos. Dado que p>0’5 y en consecuencia no viene en las tablas, buscamos 4 fracasos siendo q=1-0’62=0’38, obtenindo que P(Y=4)=0’2508.

5. La dimensión del díametro de las tornillos producidos por una máquina sigue una distribución normal de media 10 mm y desviación típica 0’7. Se escoge un tornillo al azar, sabiendo que mide más de 9’7 ¿Cúal es la probabilidad de que esté comprendido entre 9’9 y 10’1?

Se trata en este caso de una probabilidad condicionada. Consideremos los sucesos A=” medir más de 9’7 mm” y B=” medir entre 9’9 y 10’1” nos piden $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Dado que el suceso $A \cap B=B$ tenemos que calcular P(B), P(A) y dividir una entre la otra para hallar la condicionada que nos piden:

$P(A)= P(X>9'7)=P(Z>\frac{9'7-10}{0'7})=P(Z>-0'42)=P(Z<0'42)=0'6628$

$P(B)=P(9'9<X<10'1)=P(\frac{9'9-10}{0'7} < Z < \frac{10'1-10}{0'7})=P(-0'14<Z<0'14)=$

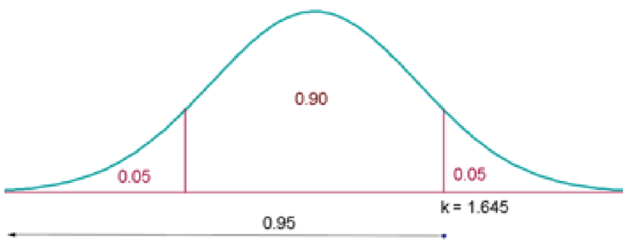
$=P(Z<0'14)-[1-P(Z<0'14)]=0'5557-[1-0'5557]=0'1114$. Por tanto, $P(B/A)=\frac{0'1114}{0'6628}=0'168$

Ejercicios pág29: 1-9

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Supongamos que en una distribución N(μ,σ) queremos saber cuales son los valores de la variable que, equidistando de la media, contienen a un porcentaje determinado de la población. Por ejemplo: ¿entre que valores equidistantes de la media se encuentra el 90% de la población?. El problema podríamos plantearlo, en términos matemáticos, de la siguiente forma: P($\mu - k < Z < \mu + k$) =0'9 .

Comencemos analizando la situación si nuestra distribució fuese N(0,1), dado que en nuestra distribución μ=0 tendríamos que hallar k para que se cumpliese P(-k<Z<k)=0'9



Dado que fuera del intervalo que buscamos se encontraría el 10% de la población y que la gráfica es simétrica, tendríamos que P(Z>k)=0'05 (la mitad del 10%=0'1). Esto es lo mismo que decir que P(Z<k)=0'95; buscando en las tablas encontramos que los dos valores más cercanos a 0'95 son : 0'9495 y 0'9505, (P(Z<1'64)=0'9495 y P(Z<1'65)=0'9505, en consecuencia tomaremos k=1'645 y el intervalo buscado será (-1'645,1'645).

*En los intervalos característicos llamamos **nivel de confianza** a la probabilidad que queremos ver reflejada en nuestra población*, en este caso 90%=0'9 *y se representa por 1-α; llamamos **nivel de significación** a la probabilidad de la población que se encuentra fuera del intervalo buscado*, en nuestro caso 10%=0'1 *y lo representamos por α.*

En el caso de la distribución normal estandar, N(0,1), llamamos ***valor crítico*** al valor de k buscado, en nuestro caso 1'645 y se representa por $z_{\alpha/2}$ siendo α el nivel de significación.

Veamos ahora como podríamos calcular el intervalo característico para el mismo nivel de confianza del 90% si la distribución fuese N(7,0'25).

El problema en términos matemáticos sería buscar un valor de k tal que P($\mu - k < X < \mu + k$) =0'9 ; en nuestro caso P($7 - k < X < 7 + k$) =0'9 . Al igual que en el ejemplo anterior, fuera del intervalo que buscamos se encontraría el 10% de la población y dado que la gráfica es simétrica, tendríamos que P(X>7+k)=0'05 (la mitad del 10%=0'1). Esto es lo mismo que decir que P(X<7+k)=0'95. El problema es que nuestra distribución no está tabulada, al no ser una normal estandar. En consecuencia, antes de poder utilizar las tablas tenemos que tipificar la variable:

P(X<7+k)=0'95⇒P(Z<$\frac{7+k-7}{0'25}) = 0'95 \Rightarrow P(Z < \frac{k}{0'25}) = 0'95$, buscando en las tablas, como lo hicimos antes, encontramos k/0'25=1'645 , por tanto k=1'645.0'25=0'411. Por tanto, el intervalo característico será (7-0'411, 7+0'411)=(6'589, 7'411)

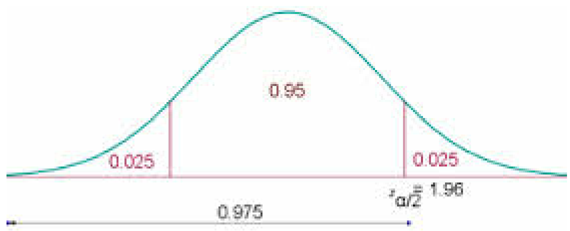
Observemos que k=$z_{\alpha/2}.\sigma$, siendo $z_{\alpha/2}$ el valor crítico de la N(0,1) para ese nivel de confianza.

De forma genérica, si analizamos el mismo problema para una distribución cualquiera N(μ,σ) encontraríamos que el valor de k sería: k=$z_{\alpha/2}.\sigma$ y el intervalo de confianza ($\mu-z_{\alpha/2}.\sigma$, $\mu+z_{\alpha/2}.\sigma$)

Ejercicios resueltos:

1. Calcula, de forma razonada, los valores críticos para un nivel de confianza del a)95%, b)99%

Solución: a) Para una probabilidad del 95% quedaría fuera del intervalo característico el 0'05 por ciento de la población que se distribuirá: 0'05/2=0'025% a la izquierda y 0'025 a la derecha.



En consecuencia P(Z<$z_{\alpha/2}$)=0'95+0'025=0'975

Buscando ese valor en las tablas encontramos que $z_{\alpha/2}$=1'96

B) (1-α)%=99%⇒α=0'01⇒α/2=0'005; P(Z<$z_{\alpha/2}$)=0'99+0'005=0'995; buscando en las tablas $Z_{\alpha/2}$=2'575

2.En una distribución N(173,6), halla los intervalos característicos para el 90%, 95% y 99%

Solución: Hemos explicado antes como calcular los valores de $Z_{\alpha/2}$ para esos niveles de confianza obteniendo: para el 90% $Z_{\alpha/2}$=1'645; para el 95% $Z_{\alpha/2}$=1'96 y para el 99% $Z_{\alpha/2}$=2'575. Por otra parte, sabemos que en una distribución N(μ,σ) el intervalo de confianza viene dado por ($\mu-z_{\alpha/2}.\sigma$, $\mu+z_{\alpha/2}.\sigma$), por tanto los intervalos característicos para nuestra distribución serán:

Para el 90% (173-1'645.6, 173+1'645.6)=(163'13,182'87)

Para el 95% (173-1'96.6, 173+1'96.6)=(161'24,184'76)

Para el 98% (173-2'575.6, 173+2'575.6)=(157'55, 188'45)

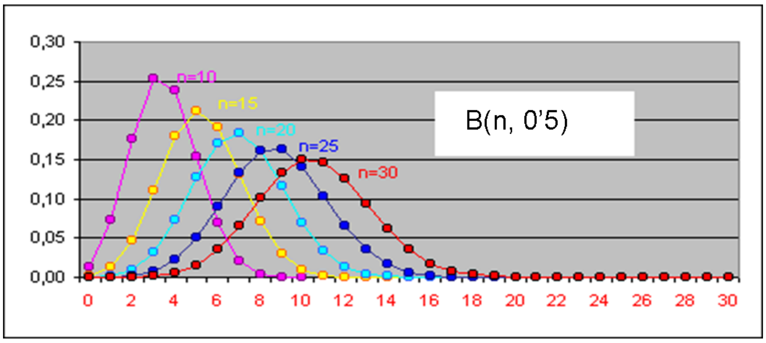
Ejercicios propuestos:

1. En una distribución Normal con media μ=25 y desviación típica σ=5'3, obtén un intervalo centrado en la media que contenga al 95% de los individuos.

2. En una distribución normal de media μ=9’5 y varianza σ^2=1’44, halla el intervalo característico para el 99%

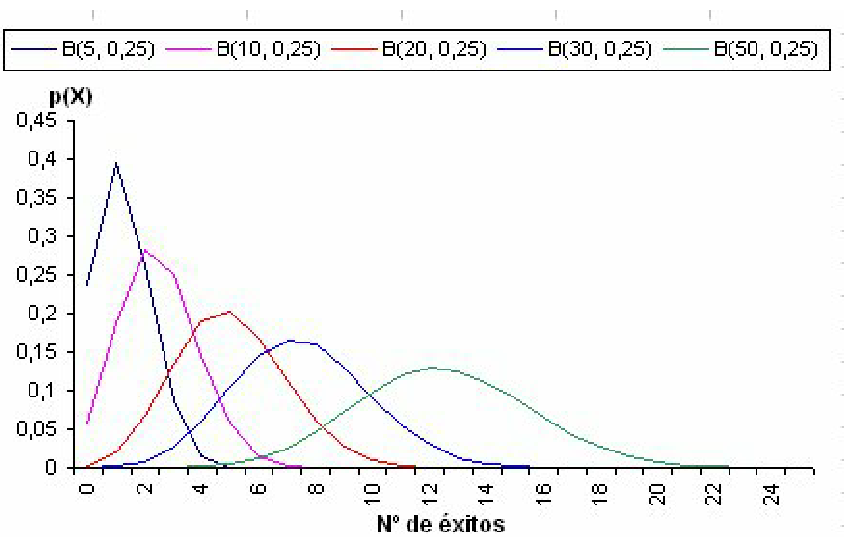
APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA NORMAL

Si realizamos los siguientes experimentos: 1) lanzar una moneda 10 veces, 2) lanzarla 15 veces, 3) lanzarla 20 veces, 4) lanzarla 25 veces, 5) lanzarla 30 veces ; y observamos en todos ellos la variable "número de caras obtenidas" obtendremos las distribuciones B(10,1/2), B(15,1/2), B(20,1/2), B(25,1/2) y B(30,1/2) respectivamente. Si representamos en un mismo diagrama los polígonos de frecuencias correspondientes a todas ellas obtenemos el siguiente gráfico



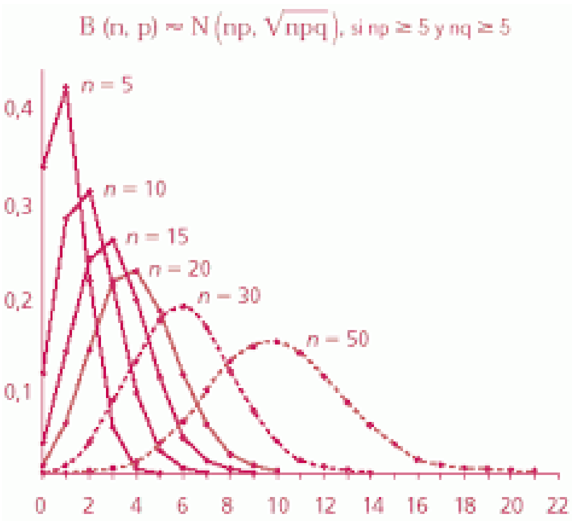
Es evidente que a medida que crece el número de pruebas el polígono tiende a la curva normal para B(n,1/2). ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier distribución binomial B(n,p) siendo p una probabilidad cualquiera?.

Observemos el diagrama 2 en el que están representadas 5 gráficas binomiales con p=0'25, la primera de ellas no se parece en nada a una normal, poco a poco se van pareciendo más y más. La última, una B(50,0'25) es casi exactamente una curva normal.



El teorema de De Moivre garantiza que si n tiende a infinito cualquier binomial se aproxima tanto como queramos a una normal.

Dado que las probabilidades binomiales para valores grandes de n son muy difíciles de calcular, y dado que el límite de estas son curvas normales, cuyas probabilidades son de cálculo fácil a través de las tablas; conviene saber en que ocasiones podemos sustituir una por la otra.Cálculos técnicos y experimentales prueban que: *Una binomial se parece tanto más a una curva normal cuanto mayor es el producto n.p (o nq si q < p). Cuando np y nq son ambos mayores de 3 la aproximación es bastante buena y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta.*



Cuando aproximemos una binomial por una normal debemos darnos cuenta de que la media es μ=np y la desviación típica es:

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$; dado que son esos los valores de estos parámetros en la distribución binomial.De aquí se sigue que la tipificación de la variable vendrá dada por el cambio de variable: $Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$

Corrección de Yates para la continuidad

Únicamente nos queda comentar un error muy frecuente que se suele cometer al realizar estas aproximaciones:La distribución binomial es discreta y por tanto tiene sentido calcular probabilidades puntuales como P(X=2); en cambio la normal es continua y no tiene sentido calcular esas probabilidades puntuales, pues todas ellas darían cero.

¿Cómo proceder entonces para calcular la probabilidad de una distribución binomial cuando la aproximamos mediante la normal?. El paso de la discreta a la continua nos obliga a tomar probabilidades en intervalos, para ello basta considerar los valores de la variable aleatoria discreta como centro de un intervalo de tamaño unidad, del siguiente modo:

P(X=a)=P(a-0’5<X’<a+0’5);

P(X<a)=P(X’<a-0’5) para que no contenga al punto a;

P(X≤a)=P(X’< a+0’5) para que contenga al punto a;

$P(X>a)=P(X'>a+0'5)$ para que no contenga al punto a;

$P(X\geq a)=P(X'>a-0'5)$; para que no contenga al punto a

$P(a\leq X<b)=P(a-0'5<X'< b-0'5)$ para que contenga al punto a y no al punto b

$P(a\leq X\leq b)=P(a-0'5<X'<b+0'5)$ para que los contenga a los dos

Ejemplos: $P(X=2)=P(1'5 < X < 2'5)$; $P(X < 4)= P(X < 3'5)$; $P(X \leq 4)=P(X < 4'5)$

Ejemplo:

Se sabe por una estadística que el nivel de aceptación de un determinado partido es del 25% de la población. De un muestreo realizado sobre 40 personas, se desea saber cuál es la probabilidad de que 15 de ellos acepten al partido.

Es obvio que se trata de una distribución binomial: A="aceptar el partido" $P(A)=p=0'25$, $q=0'75$. La variable es X="número de personas que aceptan el partido" y será $B(40,0'25)$

Dado que el número de pruebas es grande trataremos de aproximar mediante una normal, si esto es posible. Veámoslo: $np=40.0'25=10 >5$ y $nq=40.0'75=30 > 5$ luego si podemos aproximar. $\mu=10$ y $\sigma = \sqrt{40.0'25.0'75} =2'74$

$P(X=15)=P(14'5 < X' < 15'5)=P(\frac{14'5-10}{2'74} < Z < \frac{15'5-10}{2'74})=P(1'64 < Z < 2)=$

$= P(Z < 2) -P(Z < 1'64)=0'9772-0'9495=0'0277$

EJERCICIOS (solución al final del tema)

1.-Supóngase que los pesos de 200 estudiantes varones se distribuyen normalmente con media 68 y desviación típica 8. Hallar el número de estudiantes con pesos a) inferiores e iguales a 50; b) entre 60 y 65; c) entre 66 y 72; d) superiores a 75

2.-Supóngase que las puntuaciones de un examen siguen una distribución normal con media 6'5 y desviación típica 1'5 . El 15% de los estudiantes han obtenido la calificación de sobresaliente y el 10% han suspendido. Hallar: a) La puntuación mínima para obtener sobresaliente; b) La puntuación mínima para aprobar; c) ¿Cuál tendría que ser la desviación típica para que aprueben el 80% de los estudiantes?

3.-Los 2000 opositores que se presentan a unas plazas de un organismo autonómico, han obtenido unas puntuaciones que se distrubuyen normalmente con media igual a 70'5 y desviación típica igual a 9. ¿Cuántas plazas se adjudicarán si el tribunal ha decidido dejar sin plaza a aquellos que obtengan una puntuación inferior a 80?

4.-Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110. b)¿Qué intervalo centrado en 100 contiene el 50% de la población?. c)En una población de 2500 individuos, ¿cuántos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

5.-Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones se distribuyen según una N(65,18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que haya en el primero un 20% de la población, un 65% en el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

6.- El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.

a) ¿Cuál es su desviación típica si se sabe que la probabilidad de que una determinada pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm. es igual a 0'0062?

b) Si se analizaron 820 piezas ¿cuántas tendrán su diámetro comprendido entre 39'7 y 43'5 mm?

7.-El peso de los adultos de una población se distribuye normalmente con media 65 Kg. y desviación típica 3 Kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justificar qué es más probable:

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63'5 y 66'5 Kg; b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 Kg y el otro un peso no perteneciente a ese intervalo

8.-La nota media de las pruebas de acceso correspondientes a los estudiantes que querían ingresar en una determinada facultad fue de 5'8 y la desviación típica 1'75. Fueron admitidos los de nota superior a 6

a)¿Cuál fue el porcentaje de admitidos si la distribución es normal?

b)¿ Cuál es la probabilidad de que de 10 estudiantes, tomados al azar, hayan sido admitidos exactamente cuatro?

9.- Un almacén de camisas ha determinado que el cuello de los varones adultos sigue una distribución N(38,1'5). Teniendo en cuenta que la producción total de camisas de la fábrica es de 10.000 ¿ Cuántas tendrá que producir entre los números 35 y 38, ambos incluidos? ¿cuántas del número 43?

10.-Se lanza una moneda al aire 100 veces. Hallar la probabilidad de a) obtener a lo sumo 40 caras; b) Obtener más de 60 caras

11.-Supongamos que la probabilidad de nacer varón en España es de 0'512. Si durante un año, en una determinada región, se han producido 2000 nacimientos ¿ Cuál es la probabilidad de que el número de varones nacidos esté entre 1000 y 1080?

12.-Obtener el valor de C para que : $t \in [0,1] ----------\to f(t) = \frac{e^t}{C}$
pueda ser una función de densidad de una variable aleatoria continua con valores en [0,1].
Una vez obtenido el valor de C, calcular la función de distribución de X, la probabilidad de que X > 1/2 y la esperanza matemática.

13.-Supóngase que un sistema de 9 componentes independientes requiere para su funcionamiento que al menos 6 de ellos estén en buen estado. Si la probabilidad de funcionamiento de cada componente es de 0'95, calcular la fiabilidad del sistema (definida por la probabilidad de que funcione). Calcula la esperanza matemática y la desviación típica de la variable que expresa el número de componentes del sistema que funcionan en un instante determinado.

14.-Obtener la probabilidad de que en una familia de 3 hijos no todos tengan el mismo sexo (Supóngase que los distintos nacimientos son independientes y que la probabilidad de nacimiento de varón es de 0'51)

15. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide: a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72? b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su cal ificación sea, de hecho, superior a 84?

Ejercicios propuestos distribución binomial PAAU

1.- El 5% de los petardos producidos en una fábrica son defectuosos
Hallar la probabilidad de que en una caja de 8 petardos
a) Todos sean buenos (sol: 0’6634); b) Haya un defectuoso (Sol:0’2793)
c) Dos o más sean defectuosos (Sol0’0573)

2.- En un área geográfica determinada, el 60% de los votos han sido para el partido A. Si se consideran 5 votantes de dicha área, se pide: a) Probabilidad de que hayan votado 3 exactamente a dicho partido (Sol:0’3456)
b) Probabilidad de que ninguno lo haya votado (Sol:0’0102)

3.- A un congreso científico asisten 130 hombres y 70 mujeres. Al final tiene lugar una cena en la que los congresistas se distribuyen al azar en mesas de 8
a) ¿ Cuál es la probabilidad de que se sienten en una mesa 4 hombres y 4 mujeres?(0’1875)
b) ¿Cuál la de que se sienten en una mesa 5 hombres como mínimo?(0’7065)

4.-Se sabe que la probabilidad de que un ordenador de la Facultad de Informática tenga virus es 0'15 a) Si en un aula hay 10 ordenadores ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de un ordenador con virus? (Sol: 0’4557) b) ¿ Cuál ha de ser el número máximo de ordenadores instalados en un aula si se desea que la probabilidad de que haya menos de dos con virus sea superior a 0'65? (sol: n=8)

c) Si en toda la Facultad hay 100 ordenadores ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos el 10% de ellos tengan virus? (sol: 0’9382)

5. La probabilidad de que se entregue un cheque sin fondos en una entidad bancaria es 0’14 Si en dicha entidad se reciben 900 cheques calcular:A) El número esperado de cheques sin fondo (sol:126); B)La probabilidad de que se entreguen más de 110 cheques sin fondo (S:0’9306)

6. Un examen tipo text consta de 300 preguntas, cada una de ellas con 4 respuestas posibles de la que solo una es correcta. Un alumno que no preparó el axamen lo contesta al azar

A) Calcula el número esperado de respuestas correctas (Sol:75)

B)¿Cuál e s la probabilidad de que responda correctamente 100 o más preguntas?(0’0005)

7. Se trata contra una enfermedad al 40% de los árboles de una parcela. Se sabe que enferman el 5% de los árboles tratados y el 30% de los no tratados contra la enfermedad.

A) Calcular la probabilidad de que un árbol cualquiera de la parcela no enferme. (sol:0’8)

B) Supongamos que un 80% de los árboles no están enfermos y que en la parcela hay 625 árboles ¿Cuál es la probabilidad de que más de 475 árboles no estén enfermos? (Sol:0’9929)

8. Se sabe que en cierta población el 60% de los mayores de 18 años están en contra de la eutanasia A) Se analiza una muestra de 150 personas de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad estén en contra de la eutanasia? (sol:0’9920); B) Si en esa población el 68% son mayores de 65 años y el 75% de ellos están en contra de la eutanasia ¿qué porcentaje de los que tienen entre 18 y 65 años están contra la eutanasia? (0’51)

9. Un control de calidad es superado por 4 de cada 5 artículos de pesca, se someten a dicho control un total de 225 artículos A) ¿Cuántos se espera que superen el control de calidad? (sol:180) B) ¿Cuál es la probabilidad de que superen el control entre 170 y 187 incluídos? (sol 0’8543)

10. Se está planificando llevar a cabo una encuesta con pequeñas empresas de una población. Se escogerá una muestra aleatoria simple de empresas a partir del listado telefónico. Por experiencia se sabe que solo la mitad de las empresas contactadas responden. Si se contacta con 150 empresas a) ¿Cuál es el número esperado de empresas que no responden? (sol: 75)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo respondan 70 empresas? (sol:0’1867)