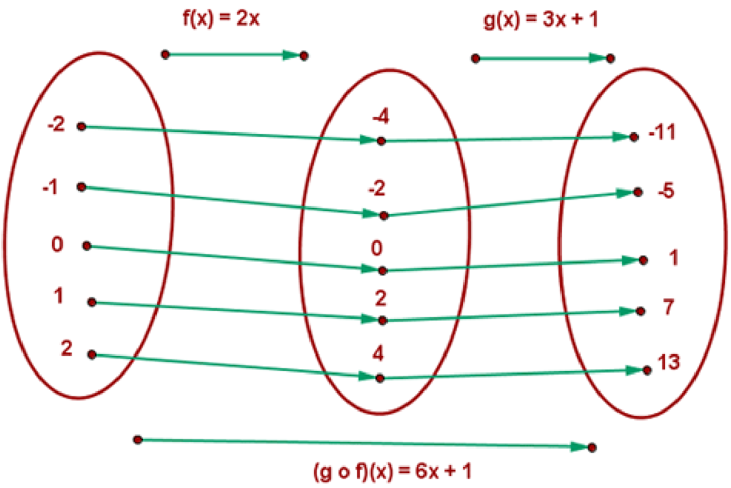
Composición de funciones

Si tenemos dos funciones: f(x) y g(x), de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de f(x) el valor de **g[f(x)]**. Veamos un ejemplo con las funciones f(x) = 2x y g(x) = 3x + 1.



(g o f) (x) = g [f(x)] = g (2x) = 3 (2x) +1 = 6x + 1

(g o f) (1) = 6 · 1 + 1 = 7

Ejemplos

Sean las funciones: $f(x)=3x+2$ $\quad g(x)=\dfrac{x+3}{2x+1}$

1 Calcular (f o g) (x)

$$g\circ f=g[f(x)]=g(3x+2)= \;=\frac{3x+2+3}{2(3x+2)+1}=\frac{3x+5}{6x+5}$$

2 Calcular (g o f) (x)

$$f\circ g=f[g(x)]=f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)=3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)+2=\frac{7x+11}{2x+1}$$

2

$f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$ $\quad g(x)=\sqrt{x}$

1 $$f\circ g=f[g(x)]=f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$$

2 $$g\circ f=g[f(x)]=g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)=\sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$$

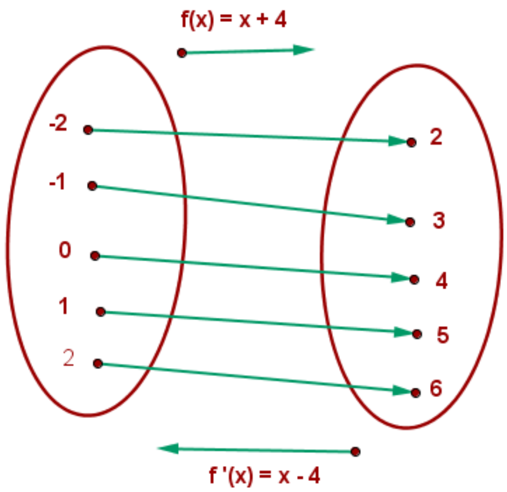
$\boxed{3}$ $$f(x)=\frac{1}{2x-1} \qquad g(x)=\frac{2x-1}{2x+1} \qquad h(x)=\frac{1}{x}$$

$$g\circ f=g\left[f(x)\right]=g\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1}=\frac{-2x+3}{2x+1}$$

$\boxed{1}$
$\boxed{2}$ $$h\circ g\circ f=h\left[g\circ f(x)\right]=h\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right)=\frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}}=\frac{2x+1}{-2x+3}$$

FUNCION INVERSA

Se llama **función inversa o reciproca de *f* a otra función f^{-1}** que cumple que: **Si f(a) = b, entonces f^{-1}(b) = a.**



Veamos un ejemplo a partir de la función f(x) = x + 4

Podemos observar que:

El dominio de f^{-1} es el recorrido de *f*.

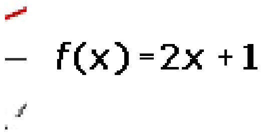
El recorrido de f^{-1} es el dominio de *f*.

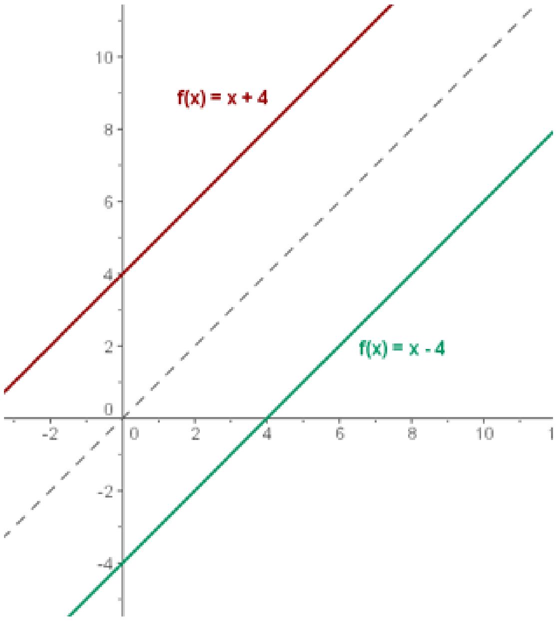
Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.

Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**.

(f o f^{-1}) (x) = (f^{-1} o f) (x) = x

Las gráficas de *f* y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.





Ejemplo 1 Ejemplo 2

Cálculo de la función inversa

1.Se escribe la ecuación de la función con x e y.

2.Se despeja la variable x en función de la variable y.

3.Se intercambian las variables.

Ejemplos Calcular la función inversa de:

1.

$$y = 2x + 1 \qquad x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

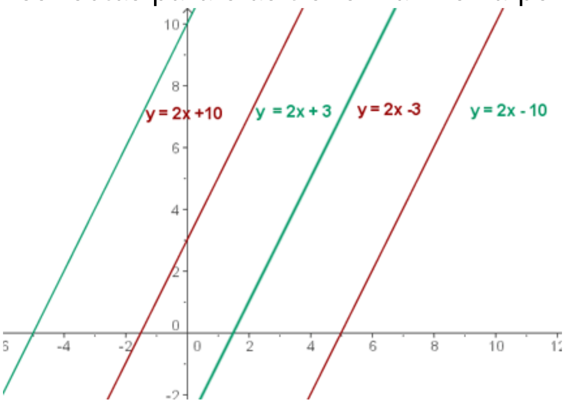
2. $$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \qquad y = \frac{2x+3}{x-1} \qquad y(x-1) = 2x+3$$

$$xy - y = 2x + 3 \qquad xy - 2x = y + 3$$

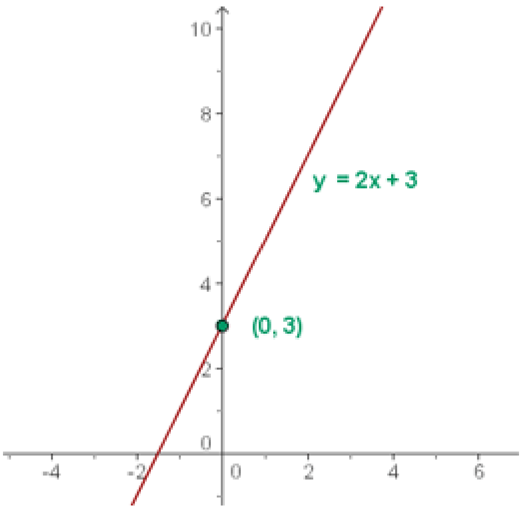
$$x(y-2) = y + 3 \qquad x = \frac{y+3}{y-2} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Función polínomica de primer grado: $f(x) = mx + n$
Su gráfica es una recta inclinada, que queda definida por dos puntos de la función.
m es la **pendiente** de la recta. La pendiente es la tangente del ángulo que la recta forma con la parte positiva del eje de abscisas. Mide la inclinación de la recta
Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

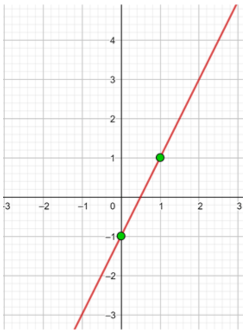


n es la **ordenada en el origen** y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.



Para representar la función le damos al menos dos valores, aunque es conveniente que uno de ellos sea su raíz o corte con el eje OX

Ejemplo: $y = 2x - 1$; $2x-1=0$, $x=1/2$



x	y = 2x-1
0	-1
1	1

Función cuadrática

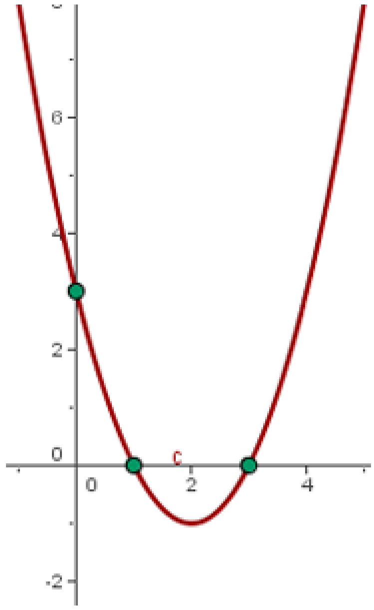
Son funciones polinómicas de segundo grado. Su gráfica es una parábola.
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Representación función polinómica segundo grado
1. Vértice : Por el vértice pasa el eje de simetría de la parábola. Sus coordenadas vienen dadas por la siguiente fórmula: $x_v = \frac{-b}{2a}$ $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Ejemplo: $y=x^2-2x+1$ $x_0=2/2=1$; $y_0=f(1)=1-2+1=0$; vértice(1,0)

Para dibujarla primero hallamos el vértice y después damos dos valores uno a la izquierda y otro a la derecha del vértice. Dichos valores deberían ser las raíces en caso de que tenga dos. Esto no siempre es posible ya que la ecuación de 2º grado puede tener 2 soluciones, una solución o ninguna solución. Si no tiene 2 raíces damos dos valores cualesquiera uno a la derecha y otro a la izquierda del vértice y dibujamos la parábola,.

Ejemplo



Representar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Vértice

$x_v = -(-4)/2 = 2$ $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ **V(2, −1)**

2. Puntos de corte con el eje OX

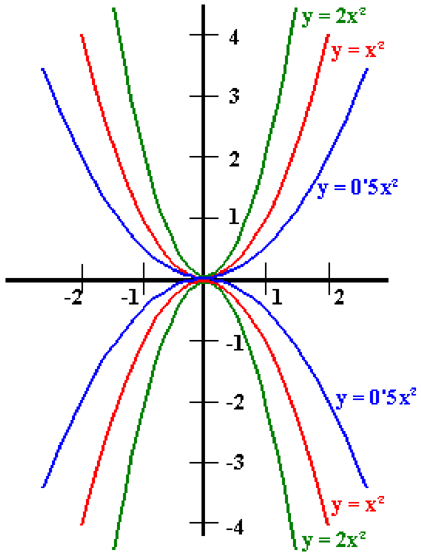
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$ **(3, 0)** **(1, 0)**

3. Significado de los coeficientes de la función de 2º grado

El término independiente de la parábola coincide con el

punto de corte con el eje OY. En este Ejemplo f(0)=3 coincide con el término independiente.
El valor de a nos dará la orientación de las ramas y la anchura de la parábola:
Si a>o la parábola va hacia arriba, Si a<0 la parábola va hacia abajo
A medida que el valor absoluto de a aumenta, la parábola es mas estrecha (crece y decrece más rápido) y a medida que disminuye es más ancha (crece y decrece más lento)

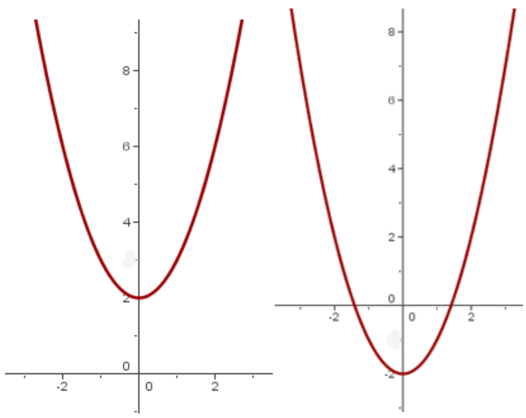


TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Caso 1: Traslación vertical

Dada la función y=f(x) si le sumamos un número k obtenemos la función g(x)=f(x)+K cuya gráfica será la misma que la de f(x) pero trasladada verticalmente k unidades hacia arriba si k>0 y hacia abajo si k<0

Ejemplo: relación entre las gráficas de $y=x^2$ e $y = x^2 + k$

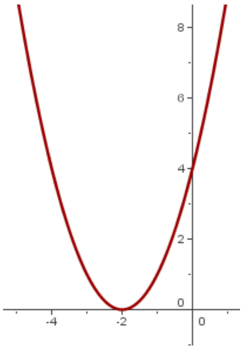


$y = x^2 + 2$ $y = x^2 - 2$

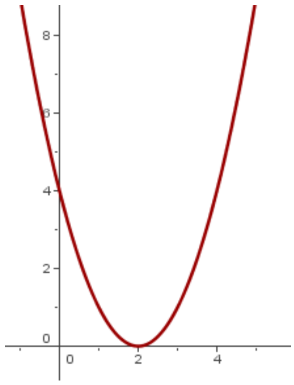
caso 2: Traslación horizontal

Dada la función $y=f(x)$ si le sumamos a x un número k obtenemos la función $g(x)=f(x+k)$ cuya gráfica será la misma que la de $f(x)$ pero trasladada horizontalmente k unidades hacia la izquierdasi $k>0$ y hacia la derecha si $k<0$

Ejemplo: relación entre la gráfica de $y=x^2$ e $y = (x + k)^2$



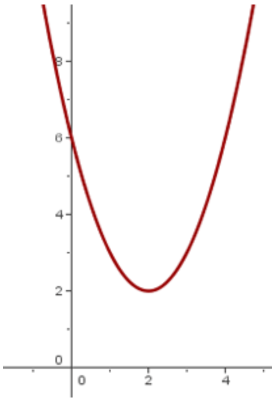
$Y=(x+2)^2$

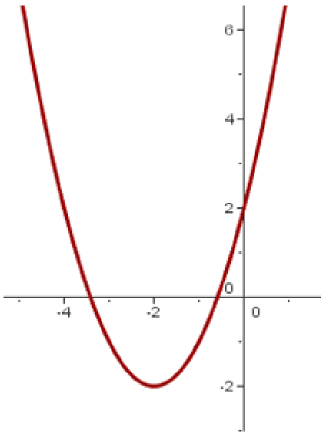


$y=(x-2)^2$

Ejemplo: a partir de la gráfica de $y=x^2$ dibuja las de $y=(x-2)^2+2$ y $y=(x+2)^2-2$

En el primer caso se produce una traslación horizontal de 2 unidades hacia la derecha, al restarle 2 a x y una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba al sumarle 2 a $f(x)$; en el segundo caso una traslación horizontal de 2 unidades hacia la izquierda, al sumarle 2 a x, y una traslación vertical de 2 unidades hacia abajo al restarle 2 a $f(x)$





$y = (x - 2)^2 + 2$ $\qquad$ $y = (x + 2)^2 - 2$

Gráfica de y=$\sqrt{x}$

Consideremos la función y=x^2 y vamos a hallar su inversa: 1. Despejamos x x=$\mp\sqrt{y}$; cambiamos la notación y==$\mp\sqrt{x}$ No es función ya que cada elemento tendría dos imágenes. Para considerar la raíz cuadrada como función solo podemos considerar uno de sus signos y así tendremos 2 funciones y=+$\sqrt{x}$ e y=-$\sqrt{x}$

Veamos sus gráficas a partir de la función inversa. Trazamos la diagonal del primer cuadrante y hacemos la gráfica simétrica respecto a esta recta. Obtenemos una parábola horizontal que no se corresponde con la gráfica de una función. La rama superior será la gráfica de y=+$\sqrt{x}$ y la inferior la de y=-$\sqrt{x}$