## DERIVADA DE UNA FUNCIÓN: INTRODUCCIÓN

Vamos a estudiar a continuación las funciones derivables y la relación de la derivada con ciertas características de las funciones como son: su crecimiento y decrecimiento o su concavidad y convexidad. Si las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos, las funciones derivables tienen la propiedad de que su gráfica, además de ser continua, no presenta picos, cambios bruscos de dirección, o rectas tangentes verticales. La derivada de una función nos va a dar una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente.

La derivada es una potente herramienta de cálculo que logró solucionar distintos problemas que desde la época de la Grecia clásica se venía planteando la humanidad. Problemas como el estudio del movimiento de los cuerpos a través de la relación entre el espacio y el tiempo, la determinación de la velocidad y aceleración de dichos movimientos, u otros de tipo geométrico como trazar la recta tangente a una curva en un punto, fueron ampliamente tratados por matemáticos griegos como Zenón, Eudoxio o Arquímides.

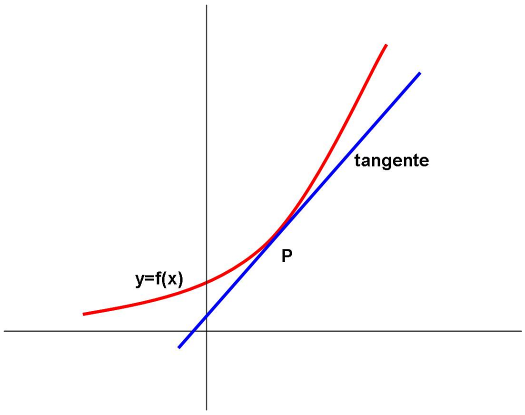
En los siglos XVI y XVII, el desarrollo de la notación simbólica trae consigo que se puedan afrontar estos y otros muchos problemas clásicos que no habían avanzado por falta de herramientas. Las matemáticas y la física se desarrollan con gran rápidez y surgen genios como Galileo, Kepler, Descartes o Fermat, entre otros, que contribuyen con sus tratados a crear las herramientas que permitan el nacimiento del cálculo, tanto el diferencial como el integral.

A finales del siglo XVII, Newton y Leibnitz descubrieron por caminos diferentes, y también utilizando diferente notación, el concepto de derivada, y muchos otros elementos del cálculo, teniendo en cuenta la idea de límite. Leibnitz publicó antes que Newton sus principales teorías, pero parece que Newton las había desarrollado unos años antes aunque no había llegado a publicarlas. Estos hechos dieron lugar a serias disputas sobre la paternidad del cálculo ya que Newton denunció a Leibnitz por plagio y una gran parte de la comunidad científica se puso de su parte. Hoy día parece innegable la genialidad de ambos autores que, en cualquier caso, no podrían haber desarrollado sus teorías sin los descubrimientos de todos sus antecesores. En ese sentido, la frase " Si he podido ver más lejos ha sido porque he subido a hombros de gigantes", que Newton utilizó, es una excelente caracterización del proceso colectivo de construcción del conocimiento científico.

Vamos a aproximarnos al concepto de derivada de una función en un punto de dos formas diferentes: en primer lugar a partir del problema del cálculo de la recta tangente a una función en un punto y, en segundo lugar, a través de la tasa de variación instantánea de una función.

## CONCEPTO DE RECTA TANGENTE

La idea intuitiva o gráfica de recta tangente a una función en un punto P es muy sencilla. Es fácil comprender que la recta tangente a la función de la figura, en el punto P, es la que hemos dibujado. Sin embargo, cuando intentamos definir el concepto de recta tangente las cosas no son tan sencillas.




Si hablamos de la recta tangente a una circunferencia en un punto, podríamos definirla como la recta que toca a la circunferencia en ese punto y solo en ese. ¿Sería esta definición válida para todas las curvas? Vamos a verlo con algunos ejemplos gráficos.

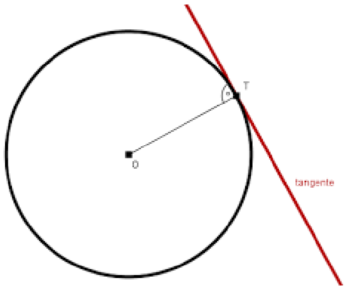



Imagen 1

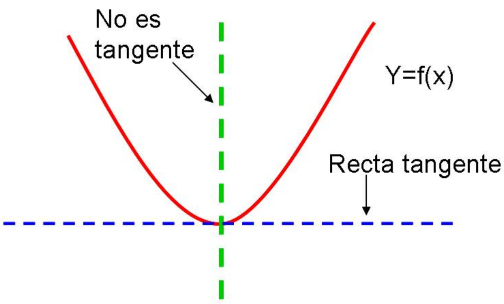
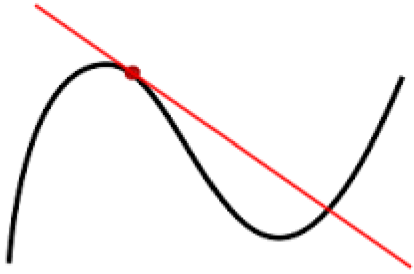



Imagen2



En la primera gráfica vemos que hay 2 rectas que tocan a la función en un único punto. Sin embargo, una es tangente a ella y otra no.
En la segunda gráfica la recta dibujada es tangente a la función en el punto marcado. Sin embargo, corta a la función en otros puntos diferentes.
Por lo tanto el concepto de recta tangente dado para una circunferencia no es válido para otras curvas. Podríamos también preguntarnos ¿una misma recta puede ser tangente en más de un punto? ¿Puede atravesar la función en el punto de tangencia?. Las dos siguientes imágenes tratan de responder a esas cuestiones

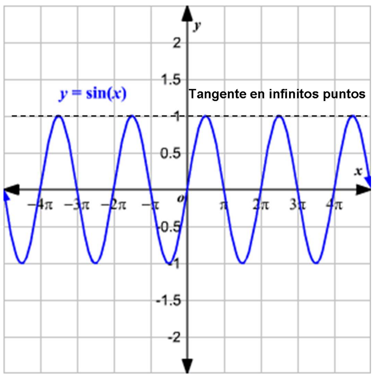



Imagen 3

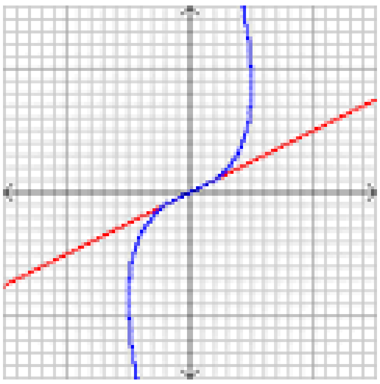
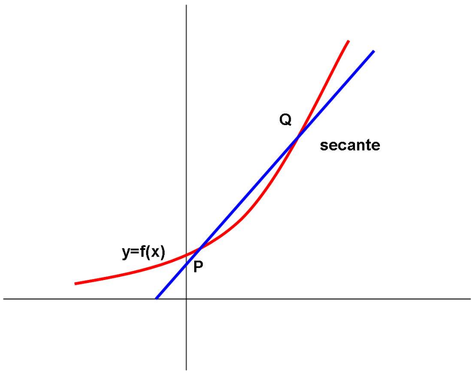
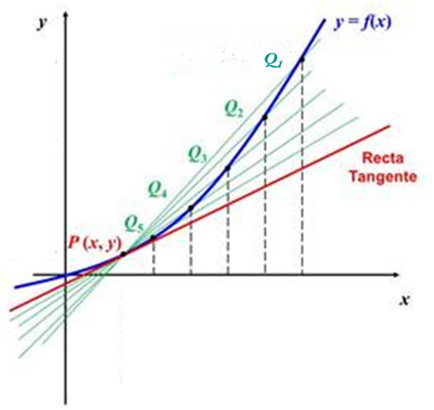
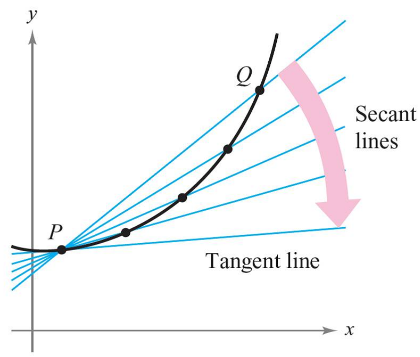


Imagen 4

Para intentar llegar al concepto de la recta tangente a una función en un punto, vamos a fijarnos primero en las rectas secantes que pasan por dicho punto.
Una secante a una curva es una recta que pasa por dos puntos de dicha curva. A la recta de la figura la denotaremos por secante PQ.
Consideremos ahora una serie de secantes PQ haciendo que el punto P permanezca fijo y el punto Q se traslade por la curva acercándose a P. Tendríamos una situación como la de las siguientes gráficas:



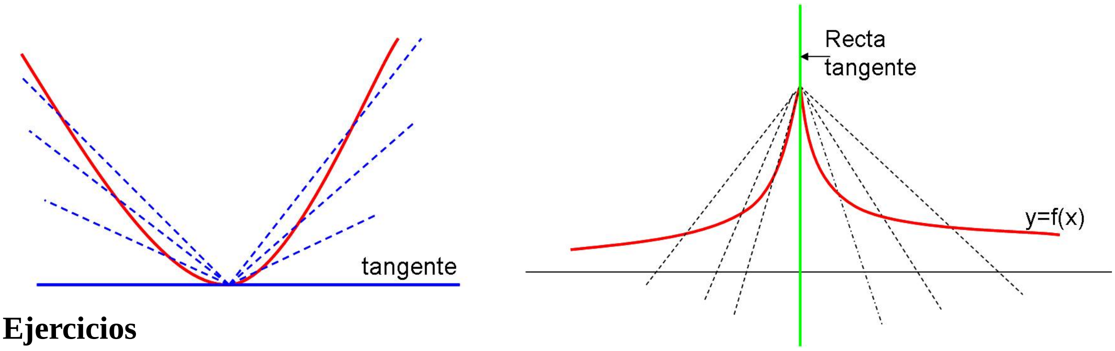



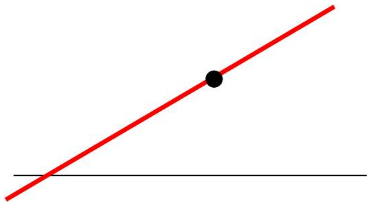
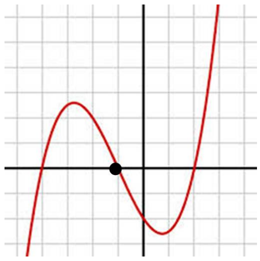
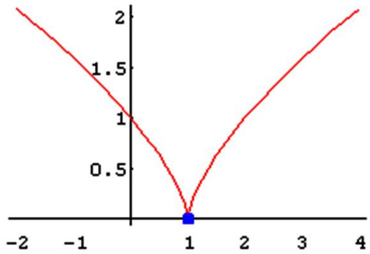
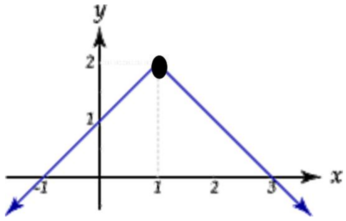
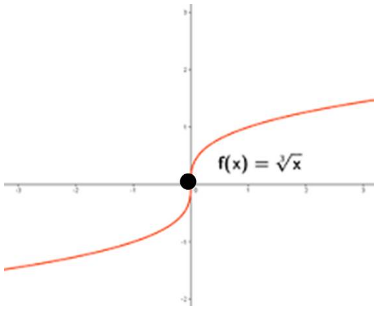

Si nos fijamos en las sucesivas rectas secantes $PQ_1$, $PQ_2$,.......$PQ_5$.. Observamos que la distancia entre dichas rectas secantes y la recta tangente disminuye a medida que el punto Q se acerca a P, tendiendo a cero a medida que el punto Q tiende a P.
Podemos entonces definir la recta tangente a y=f(x) en un punto P como la posición límite que tienden a ocupar las secantes PQ cuando el punto Q tiende al punto P.

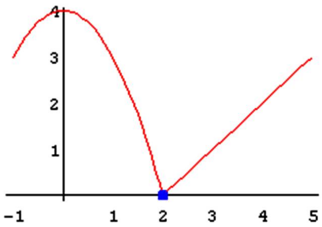
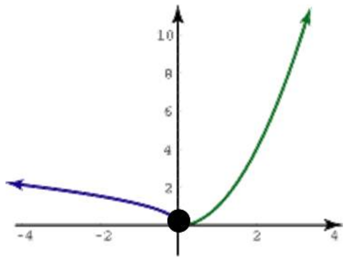
$$\text{Recta tg en P}=\lim_{Q\to P} \text{rectas PQ}$$

Ejemplos: Observa en las siguientes gráficas como se obtiene la recta tangente como límite de las secantes




**Ejercicios**
Utilizando el concepto de recta tangente, decide si las siguientes funciones tienen o no recta tangente en los puntos que se indican y, en caso afirmativo dibújala o indica cual es. ¿Qué puede ocurrir con la recta tangente de una función en un punto anguloso? ¿y en un punto de discontinuidad?

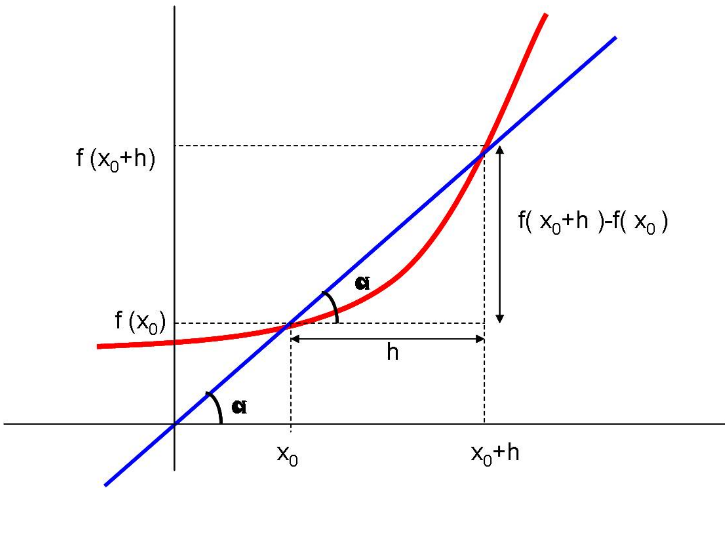






Ahora que ya conocemos el concepto de recta tangente a una función en un punto P veamos como se calcula.

Dado que conocemos el punto P por el que pasa, el problema se reduce a calcular la pendiente de dicha recta tangente. (recuérdese que una recta queda determinada si conocemos su pendiente y un punto por el que pasa, siendo la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente: $m(x-x_0)=(y-y_0)$; m=pendiente, $(x_0, y_0)$ un punto de la recta)

Como la tangente es el límite de las secantes cuando Q tiende a P, comenzaremos por calcular la pendiente de una de las secantes PQ . Sea $P(x_0, f(x_0))$, (la 2ª coordenada es la imagen de la 1ª por ser P un punto de la función y=f(x), sa Q el punto $Q(x_0+h, f(x_0+h))$




Como puede verse en la gráfica, La pendiente de la secante PQ será:

$$m_s=tg\alpha=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

De la definición de recta deducimos por tanto que la pendiente de la recta tangente será:

$$m=\lim_{Q\to P}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ahora bien, que Q→P es equivalente a decir que h→0 y por tanto la pendiente de la recta tangente vendrá dada por la fórmula $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

A este límite se le conoce con el nombre de derivada de f en $x=x_0$ y se denota por f '$(x_0)$.

***Así pues la derivada de una función y=f(x) en un punto x=$x_0$ de su dominio, se define como: f '($x_0$)=$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y representa a la pendiente de la recta tangente a la función y=f(x) en el punto x=$x_0$***

**Ejemplo:** Calcula la recta tangente a la función y=$x^2$ en x=3
En primer lugar hallamos el punto por el que pasa la recta tangente. Dado que en el punto de tangencia la recta y la función coinciden y en nuestro caso f(3)=$3^2$=9, el punto es (3,9)
En 2º lugar hallamos la pendiente de dicha recta tangente:
$m=f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{9+h^2+6h-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(h+6)}{h}=$
$=\lim\limits_{h\to 0}(h+6)=6$
Por último utilizamos la ecuación punto-pendiente de la recta para hallar la tangente: $m(x-x_0)=y-y_0$. En nuestro caso: $x_0=3$; $y_0=f(3)=9$; m=f '(3)=6. La recta tangente será:
6(x-3)=y-9; o bien operando 6x-y-9=0
**NOTA:** Dado que ya conocemos el cálculo de derivadas del curso pasado, para hallar la derivada podríamos haber utilizado las reglas de derivación: $y=x^2\Rightarrow y'=2x\Rightarrow m=f'(3)=2.3=6$
**NOTA**:Observa que la derivada de una función f es otra función f ' que asocia a cada punto la derivada de la función en dicho punto, le llamaremos **función derivada**. Hablaremos de ello con mayor precisión más adelante.
**Ejercicios resueltos**:
1. Utilizando la definición de la función derivada calcula f '(1) siendo f(x)=$x^2$-2x+4
Sol: En este caso no podemos utilizar las reglas de derivación ya que nos piden que utilicemos la definición. $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)+4-(1-2+4)}{h}=$
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1+h^2+2h-2-2h+4-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h=0$

2. Comprueba si la función $y=\begin{cases} x^2+2 \text{ s } x<1 \\ 3x \text{ si } x\geq 1\end{cases}$ es derivable en x=1
Sol: $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ . Ahora bien, al intentar hallar f(1+h) nos encontramos con que si h es positivo (1+h) es mayor que 1 y tendríamos que sustituir su imagen en la 2ª fórmula, pero si h es negativo (1+h) es menor que 1 y su imagen deberíamos hallarla utilizando la primera fórmula. Dado que h tiende a cero, h puede ser positiva, cuando nos acercaos a 0 por la derecha, o negativa, si nos acercamos a cero por la izquierda. Por ello, para calcular el límite anterior debemos calcular los límites laterales por la izquierda y por la derecha. A esos límites se les conoce como derivadas laterales y se representan por $f_-'(x)$ (derivada por la izquierda) y $f_+'(x)$ (derivada por la derecha). En nuestro caso
$f_-'(1)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1+h^2+2h+2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h(h+2)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+2)=2;$ $\quad f_+'(1)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{3+3h-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}==3$

Y dado que los límites laterales no son iguales ese límite no existe, lo que significa que la función no es derivable en x=1
Si estudiamos la continuidad de esta función vemos que en x=1 la función es continua, sin embargo la derivada no existe al ser distintas las derivadas laterales. Diremos que en x=1 la función tiene **un punto anguloso**

***Definición: llamamos derivada lateral por la izquierda de la función y=f(x) en un punto $x=x_0$ de su dominio, y la representamos por $f_-'(x_0)$ al número $f_-'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.***
***Llamamos derivada lateral por la derecha, y se representa por $f_+'(x_0)$, al número $f_+'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.***
***Para que exista la derivada de y=f(x) en el punto $x=x_0$, deben existir y ser iguales las dos derivadas laterales.***

**Ejercicios resueltos**

3. Dada la función $y=\begin{cases} 5x+4 \text{ si } x\le 0 \\ x^2 \text{ si } x>0 \end{cases}$ a)comprueba si es derivable en x=0. b)Dibuja la gráfica de la función e interpreta gráficamente el resultado obtenido en el apartado anterior.

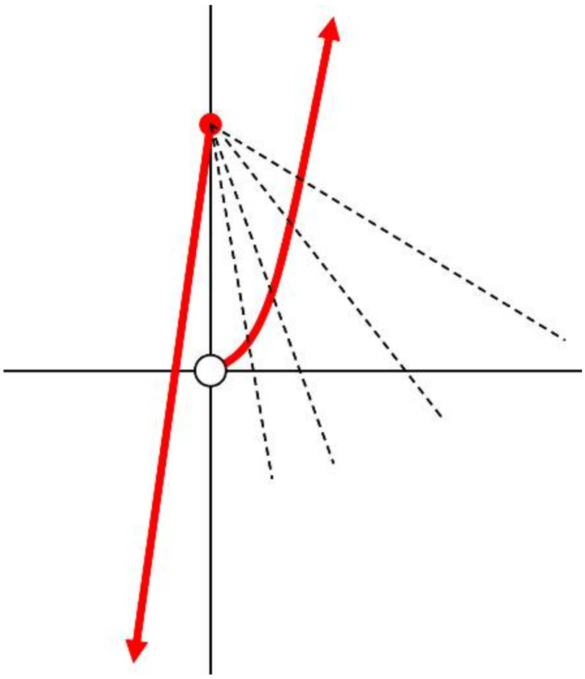
A) Puesto que en x=0 hay un cambio de función tendremos que realizar las derivadas laterales y comprobar si coinciden.

$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(h)^2+4}{h}=\frac{4}{0}=\infty$

$f_-'(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{5(0+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}=5$

La función no es derivable en x=0

B) La gráfica de esa función a trozos será la siguiente:



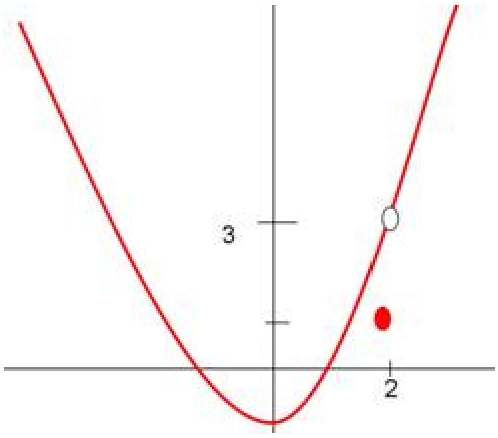
Si hallamos el límite de las secantes por la izquierda en el punto (0,4) coincide con la recta y=5x+4, cuya pendiente vale 5. Por ello la derivada lateral por la izquierda es igual a 5.

Sin embargo, si calculamos las secantes por la derecha vemos que se acercan a una recta vertical, es decir una recta que formaría un ángulo de $\pi/2$radianes con el eje OX. La pendiente de esa recta sería por lo tanto tg($\pi/2$) que no existe.
La derivada por la derecha representa el límite al que tienden las pendientes de las secantes por la derecha, es decir $\lim_{x\to\pi/2}(tgx)=\infty$

**NOTA:** Lo que acabamos de ver ocurriría en cualquier función discontinua da salto finito.

4. Dada la función $y=\begin{cases} x^2-1 \text{ si } x\ne 2 \\ 1 \text{ si } x=2 \end{cases}$

a) representa gráficamente la función y decide si es o no derivable en x=2 a partir del significado geométrico de la derivada. B) Comprueba analíticamente el resultado.




a)La gráfica de la función dada es la siguiente

Si hallamos las secantes PQ, siendo P el punto P(2,1) y Q un punto de la curva que se desplace acercándose a P, observaremos que, tanto a la derecha como a la izquierda, las sucesivas secantes tienden a una recta vertical. Por lo tanto la función no es derivable en x=2 y tanto la derivada lateral por la derecha como por la izquierda en x=2 serán infinitas.

B)f '(2)=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{f(2+h)-f(2)}}{\text{h}}$=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(0+h)^2-1-1}{\text{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-2}{h}=\dfrac{-2}{0}=\infty$. Obsérvese que tanto si h es positivo como negativo (0+h)≠2 y, por tanto, su imagen se halla en la primera fórmula. Por ello el límite se hará de forma análoga cuando h→ $0^-$ y cuando h→ $0^+$, dando el mismo resultado.

De los dos ejemplos anteriores puede deducirse el siguiente resultado que es fundamental a la hora de estudiar la derivabilidad de una función: **Una función discontinua en un punto no es derivable en dicho punto**

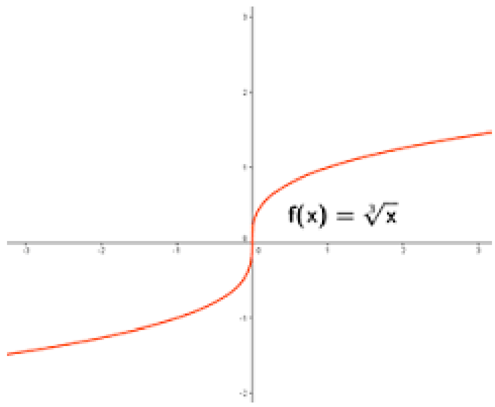
5. Dada la función y=$\sqrt[3]{x}$ a)estudia, utilizando la definición, si es o no derivable en x=0. b)dibuja la gráfica de la función y explica, a partir de ella, el resultado obtenido en el apartado anterior.

Sol. f '(0)=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{f(0+h)-f(0)}}{\text{h}}$=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h}}{\text{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^{1/3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h^{-2/3}$=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}}=\dfrac{1}{0}=\infty$

Por lo tanto f no es derivable en x=0

La gráfica de esta función es la siguiente:

Como puede observase al realizar sucesivas rectas secantes, la recta tangente en x=0 es vertical y, por lo tanto, la derivada en dicho punto no existe.




**Continuidad y derivabilidad**

Ya hemos visto antes en algunos ejemplos que cuando una función no es continua no es derivable. Vamos a ver a continuación con más precisión las relaciones entre continuidad y derivabilidad.

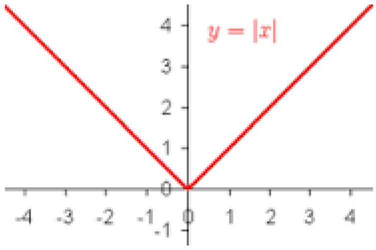
**Teorema:** Si f es una función derivable en un punto x=$x_0$ de su dominio⇒ f es continua en dicho punto.

En efecto, si f es derivable en x=$x_0$ ∃ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f\,'(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))$= f '($x_0$).$\lim\limits_{h\to 0}h=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=0\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)=f(x_0)$ Es decir que f es continua.

De este teorema deducimos que **si una función no es continua no puede ser derivable** (pues si fuese derivable sería continua según el teorema anterior)

No se cumple sin embargo el teorema recíproco, esto es: **que una función sea continua no implica que la función sea derivable.**

Por ejemplo: la función y=|x| es continua en x=0 y, sin embargo, no es derivable en dicho punto al no coincidir los límites de las secantes por la izquierda y por la derecha, como puede observarse en su gráfica.




**Ejercicios resueltos: estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos.**

6. Estudia si la función y= $\begin{cases} x^2+2 \text{ s x<1} \\ 3x \text{ si x} \geq 1 \end{cases}$ es derivable en x=1.

Este ejercicio lo hemos ya resuelto en el ejercicio 2 utilizando la definición de derivada, obteniendo que la función no es derivable en x=1 ya que $f_-'(1)=2$ y $f_+'(1)=3$.
Veamos como podríamos haber estudiado el problema de una forma diferente.
En primer lugar comprobaremos si la función es o no continua en x=1.:
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2)=3$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3x) = 3$; f(1)=3. Luego la función es continua en x=1

Por otra parte, la función f es derivable en (-∞,1), al ser una función polinómica, y tambien en (1,∞) por la misma razón. Calculemos, mediante las reglas de derivación, la función derivada en dichos intervalos: f ‘(x)= $\begin{cases} 2x \text{ si x<1} \\ 3 \text{ si x>1} \end{cases}$

Para ver si la función es derivable en x=1 tendremos que comprobar si la función derivada así obtenida tiene límite en x=1, es decir si el límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha en dicho punto.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 = f_-'(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3 = f_+'(x)$
Dado que los límites por la izquierda y por la derecha no coinciden la función no es derivable en x=1.
**NOTA: Este método solo es válido para funciones continuas**. Observemos por ejemplo la siguiente función: y= $\begin{cases} x^2+1 \text{ si x<1} \\ x^2 \text{ si x} \geq 1 \end{cases}$ y’= $\begin{cases} 2x \text{ si x<1} \\ 2x \text{ si x>1} \end{cases}$ y sin embargo la función no es derivable en x=1 al no ser continua. Realiza la gráfica de la función y analiza a partir de ella el significado de que los dos límites laterales de la función derivada den lo mismo y la razón de que, a pesar de ello, la función no sea derivable. ¿Concide en este caso el $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$ con $f_-'(x)$? ¿y el $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$ con $f_+'(x)$ ?

7. Estudia la derivabilidad de la función: y= $\begin{cases} x-1 \text{ si x<0} \\ x^2-x+2 \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-2 \text{ si x>2} \end{cases}$ y halla su función derivada.

Estudiaremos primero la continuidad de la función:
Las funciones y=x-1, y=$x^2$-x+2 e y=3x-2 son continuas en R por ser funciones polinómicas, por lo tanto f es continua en $(-\infty, 0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$. Tenemos que estudiar la continuidad en x=0 y en x=2.
Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x-1=-1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2-x+2=2$; f(0)=2. La función es discontinua de 1ª especie en x=0.
Continuidad en x=2: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2-x+2=4$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3x-2=4$; f(2)=4. La función es continua en x=2.
Estudiamos ahora la derivabilidad de la función:
Las funciones y=x-1, y=$x^2$-x+2 e y=3x-2 son derivables en R por ser funciones polinómicas, por lo tanto f es dervable en $(-\infty, 0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$. Tenemos que estudiar la derivabilidad en x=0 y en x=2.
Derivabilidad en x=0: La función no es derivable en ese punto por no ser continua.
Derivabilidad en x=2: Estudiamos primero la función derivada antes y después del 2

$$f'(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ 2x-1 \text{ si } 0<x<2 \\ 3 \text{ si } x>2 \end{cases}$$ ; : $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x-1=3$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 3=3$ Por lo tanto la función es derivable en x=2

La función derivada será: $$f'(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ 2x-1 \text{ si } 0<x\le 2 \\ 3 \text{ si } x>2 \end{cases}$$ Observar que estamos tomando la igualdad en x=2 porque ya hemos comprobado que es derivable en ese punto.

8. Calcula a y b para que la función: $$y=\begin{cases} ax^2+2x-3 \text{ si } x\le 1 \\ b+Lx \text{ si } x>1 \end{cases}$$ sea derivable en todo R

Para cualquier valor de a y b se verifica que la función y=a$x^2$+2x-3 es continua y derivable en R, por ser una función polinómica, y la función y=b+Lx es continua y derivable en (0, ∞) por ser una función elemental definida en ese intervalo. En consecuencia, f es continua y derivable en $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$. Tendremos que estudiar su derivabilidad en x=1.
Continuidad en x=1: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2+2x-3=a+2-3=a-1$; $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}(b+Lx)=b$; f(1)=a-1. Luego la función será continua siempre que a-1=b

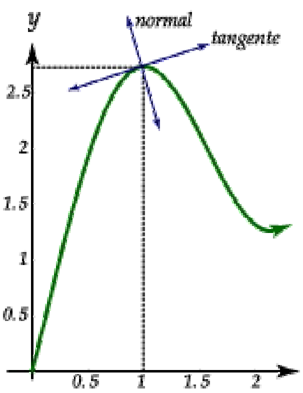
Estudiamos su derivabilidad: $$f'(x)=\begin{cases} 2ax+2 \text{ si } x<1 \\ 1/x \text{ si } x>1 \end{cases}$$ ; $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2ax+2=2a+2$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 1/x=1$. Por tanto, para que f sea derivable es necesario que

$$\begin{cases} a-1=b & \text{(para que sea continua)} \\ 2a+2=1 & \text{(para que coincidan las derivadas laterales)} \end{cases}$$ Resolviendo el sistema a=-1/2, b=-3/2

**Recta normal a una función en un punto**

Llamaremos recta normal a una función en un punto P($x_0$, f($x_0$)) a la recta que pasando por P es perpendicular a la tangente en ese punto.
Si se tiene en cuenta que las pendientes de dos rectas perpendiculares verifican m'=-1/m, es fácil comprender que la pendiente de la normal vendrá dada por

m'=-1/f '($x_0$)



**Ejercicios resueltos: Calculo de las rectas tangente y normal a una función en un punto**

9. Hallar la recta tangente y la normal a y=tgx en $x=\pi/4$

$x_0=\pi/4$ ; $y_0=f(x_0)=f(\pi/4)=tg(\pi/4)=1$; Punto $(\pi/4,1)$

$f'(x)=1+tg^2(x) \Rightarrow f'(\pi/4)=1+tg^2(\pi/4)=1+1=2$ (pendiente de la recta tangente);

Ecuación de la recta tangente: $m(x-x_0)=y-y_0$; $2(x-\pi/4)=y-1$

Ecuación de la recta normal: $m(x-x_0)=y-y_0$; $-1/2(x-\pi/4)=y-1$

10. Dada la función $y=x^2$ a) hallar un punto cuya recta tangente sea horizontal

b) hallar un punto cuya recta tangente sea paralela a la bisectriz del 2º cuadrante

c) Hallar un punto cuya recta tangente sea paralela a la recta 3x+2y-5=0

Nota: para realizar este ejercicio debemos tener en cuenta que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y que la pendiente de la recta tangente en un punto coincide con la derivada en ese punto.

a) Que la recta tg sea horizontal es equivalente a decir que la pendiente de dicha recta, es decir la derivada, valga cero. $f'(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$. En ese punto la recta tangente es horizontal.

b)La bisectriz del 2º cuadrante es la recta y=-x y su pendiente será y'=-1. Buscamos un punto de la curva cuya derivada sea igual a -1. $f'(x)=2x=-1 \Rightarrow x=-1/2$. En ese punto la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante

c) Necesitamos conocer la pendiente de la recta 3x+2y-5=0,despejando queda $y=\frac{5-3x}{2}$, por tanto su pendiente será y'=-3/2. Buscamos un punto de la curva cuya derivada sea igual a -3/2. $f'(x)=2x=-3/2 \Rightarrow x=-3/4$. En ese punto la recta tangente es paralela a la recta 3x+2y-5=0

11. Determinar k para que las rectas tangentes a la función $y=kx^4-x^3+2$ en x=0 y en x=1 sean paralelas

Sol: Si las rectas tangentes en esos dos puntos son paralelas deben tener la misma pendiente. Esto es equivalente a decir que las derivadas en ambos puntos tienen que ser iguales.
$f'(x)=4kx^3-3x^2$; sustituyendo obtenemos: $f'(0)=0$; $f'(1)=4k-3. \Rightarrow 4k-3=0 \Rightarrow k=3/4$

12. Hallar un punto de la función $y=\sqrt{x+1}$ cuya recta tg forma un ángulo de 30º con la parte positiva del eje OX. Escribe la ecuación de la tangente y de la normal en ese punto

Sol: Por definición la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que la recta forma con la parte positiva del eje OX. Es decir, la pendiente de la recta tangente será $m=tg(30º)=1/\sqrt{3}$. Como esa pendiente ha de coincidir con la derivada, buscamos un punto de la función cuya derivada valga $1/\sqrt{3}$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1/4$

Recta tangente en x=-1/4:

$x_0=-1/4$; $y_0=f(-1/4)=\sqrt{-\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$; Recta tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1/4)=y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Recta normal en x=-1/4:

$x_0=-1/4$; $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $m'=-1/m=-\sqrt{3}$ Recta normal $\sqrt{3}(x+1/4)=y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**La derivada como tasa de variación instantánea de una función**.

Hasta ahora hemos estudiado la derivada como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. Veamos ahora este concepto desde un punto de vista distinto que nos servirá para medir la variación de la variable y con respecto a la variable x.

Vamos a comenzar estudiando un ejemplo:

Supongamos que la relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $e(t) = 6t^2$. Calcular la velocidad media entre t=1 y t=4.

La velocidad media será la relación entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido, en consecuencia la $v_m$ en ese intervalo de tiempo, [1,4], vendría dada por

$V_m = \frac{e(4)-e(1)}{4-1} = \frac{6.4^2-6.1^2}{3} = \frac{90}{3} = 30 m/sg$

De forma general si e=e(t) es una función que determina el espacio recorrido en función del tiempo, llamaremos velocidad media en un intervalo $[t_1, t_2]$ al número $v_m = \frac{e(t_2)-e(t_1)}{t_2-t_1}$

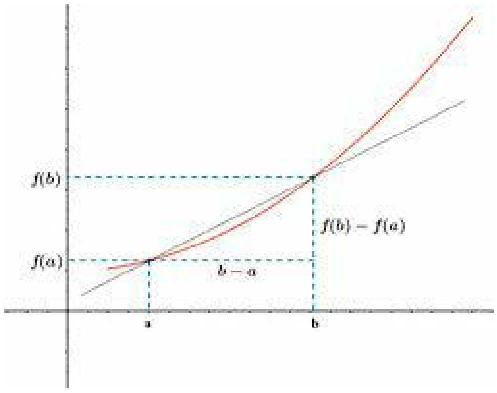
Supongamos que queremos ahora conocer la velocidad instantánea de ese móvil en un determinado momento $t=t_0$, ¿cómo podríamos proceder?

Parece evidente que la velocidad media en un intervalo de tiempo no tiene porqué coincidir con la velocidad que el móvil lleva en cada uno de los instantes que conforman dicho intervalo. Sin embargo, cuanto más pequeño es el intervalo de tiempo que tomemos más cercanas estarán la velocidad media y la velocidad instantánea. Por ello, para determinar la velocidad instantánea en el instante $t=t_0$ podríamos tomar intervalos del tipo $[t_0, t_0+h]$ e ir haciéndolos cada vez más pequeños, de forma que la velocidad instantánea sería el límite de las velocidades medias en dichos intervalos cuando $h \to 0$.

De forma matemática definiríamos $V_i = \lim_{h \to 0} \frac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h}$

Vamos a generalizar estos conceptos para una función cualquiera y=f(x) y a determinar cual sería su significado.

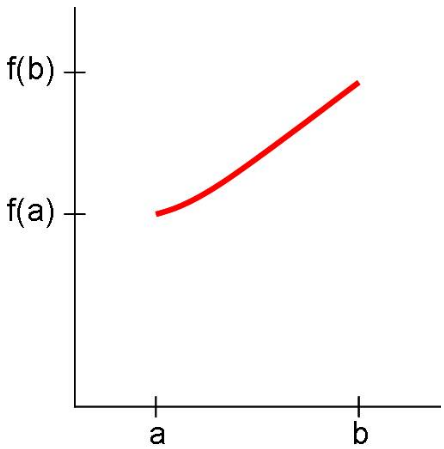
**Definición:** Llamamos Tasa de variación media de una función y=f(x) en un intervalo [a,b] al número: $TVM = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$

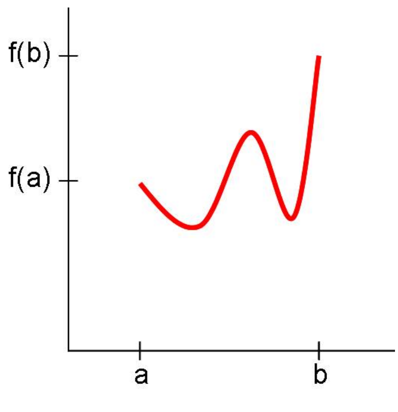



Como vemos en la gráfica la TVM en el intervalo [a,b] se corresponde con la pendiente de la recta secante a la función en dichos puntos. Es decir mediría lo que ha variado la altura, f(b)-f(a), en relación a lo que ha variado la longitud, (b-a).

La TVM solo describe la relación entre las variables en los extremos del intervalo, no importa lo que ocurre dentro del mismo. Por ejemplo, las dos gráficas siguientes tienen la misma TVM

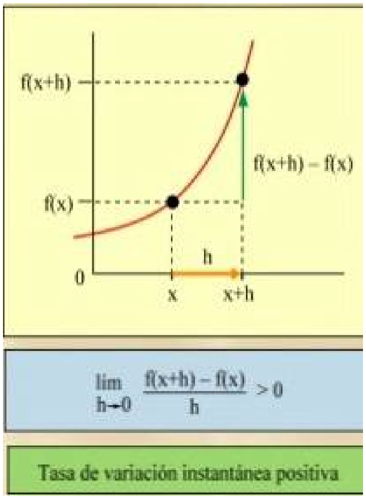
en el intervalo [a,b] y sin embargo sus comportamientos en dicho intervalo son absolutamente diferentes.

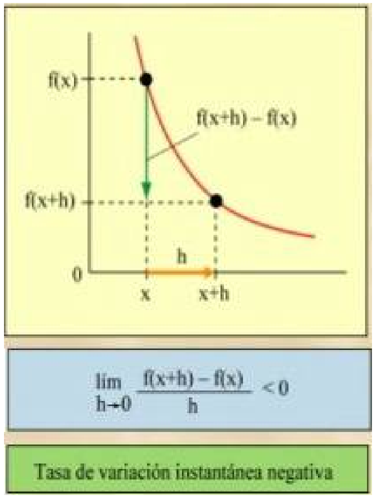


Generalizaremos ahora el concepto de velocidad instantánea que hemos visto antes para una función cualquiera.
**Definición**: Llamamos tasa de variación instantánea de una función y=f(x) en un punto $x=x_0$ de su dominio al número TVI=$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$. A este número se le llama también derivada de la función en $x=x_0$. $f\,'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
La TVI medirá la relación entre las dos variables en un punto dado.
Fijémonos que si ese cociente es positivo, la variación de la y tiene que tener el mismo signo que la variación de la x, en algún entorno del punto $x_0$. Es decir, si la x aumenta la y aumenta, si la x disminuye la y disminuye. Esto es equivalente a decir que la función es creciente en dicho punto. Además, cuanto mayor sea la TVI mayor será la relación del aumento de la y con respecto a la x, es decir el crecimiento será más rápido.

Por otra parte, si la derivada o TVI es negativa, el cociente ha de tener distinto signo, lo que indica que si la x aumenta la y disminuye y viceversa. Por lo tanto la función es decreciente en ese punto.




**Ejemplo:** Dada la función $f(x)=x^2+1$ calcula su TVM en el intervalo [1,2] y su TVI en x=2
TVM=$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{5-2}{1}=3$**;** la TVI en x=2 es equivalente a hacer f ‘(2); f’(x)=2x,
f ‘(2)=4; TVI en x=2 es igual a 4
**Derivadas de orden superior**
Consideremos una función y=f(x) con dominio D y sea D’ el conjunto donde dicha función es derivable. Llamamos función derivada de f a la función que asocia a cada punto de D’ con su derivada en ese punto:
D(f): D’---------------------→R
x-----------------------→ f ‘(x).
Esta nueva función será derivable en un conjunto D’’, llamaremos derivada segunda de f a la función:
$D^2$(f): D’’-----------------→R
x---------------------→(f ‘(x))’=f ‘’(x)
Siguiendo el mismo razonamiento podríamos definir la derivada tercera, derivada cuarta, y, en general, la derivada n-sima de f.
**Ejemplo1:** Hallar la derivada cuarta de la función $y=x^5-2x^4+3x^2-6$, indicando su dominio
La función es derivable en todo R por ser polinómica. Hallamos sus derivadas sucesivas hasta la de orden 4: $y\,'=5x^4-8x^3+6x$; $y\,''=20x^3-24x^2+6$; $y'''=60x^2-48x$; $y^{IV}=120x-48$ su dominio es R

**Ejemplo 2**: Dada la función y=$\sqrt{x}$ Calcula su segunda derivada indicando su dominio
El dominio de y=$\sqrt{x}$ es [0,∞); y'=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ siendo su dominio (0,∞) que es el conjunto en que la función de partida es derivable; y''=$\frac{-2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$ Su dominio será (0,∞)
Ejemplo 3: Dada la función y=Lx halla su función derivada segunda indicando su dominio
El dominio de y=LX es (0,∞); su primera derivada es y'=$\frac{1}{x}$ con dominio (0,∞), conjunto de derivabilidad de la función y=Lx, (obsérvese que aunque el dominio de la función y=1/x es R-{0}, no puede tomarse ese dominio para la derivada de y=Lx, ya que una función no puede ser derivable en un conjunto mayor que su dominio); y''=-1/$x^2$ con dominio (0,∞)

**Derivabilidad en un intervalo**.
Diremos que una función y=f(x) es derivable en un intervalo abierto (a,b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

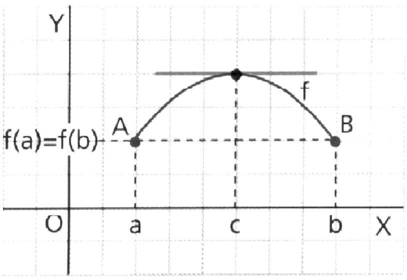
Veamos a continuación dos teoremas fundamentales que cumplen las funciones derivables y algunas de sus aplicaciones.

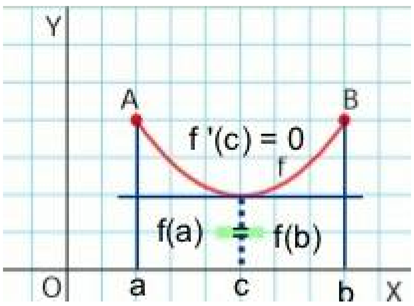
## TEOREMA DE ROLLE

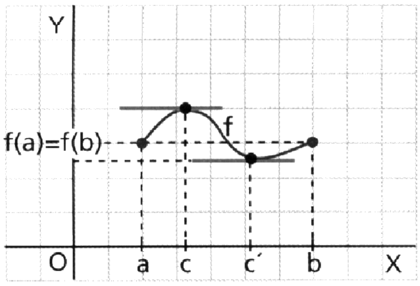
Sea f una función continua en [a,b] , derivable en (a,b) y tal que f(a)=f(b); se verifica entonces que existe algún punto c ∈(a,b) tal que f '(c)=0

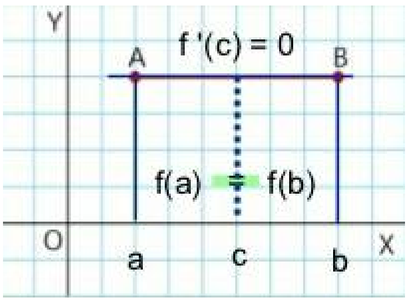
### Significado geométrico

El significado geométrico del teorema de Rolle es que si f es una función continua en [a,b], derivable en (a,b) y tal que f(a)=f(b), entoces existe al menos un punto perteneciente al intervalo abierto (a,b) en el que su recta tangente es horizontal

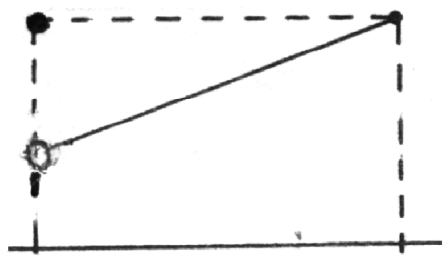


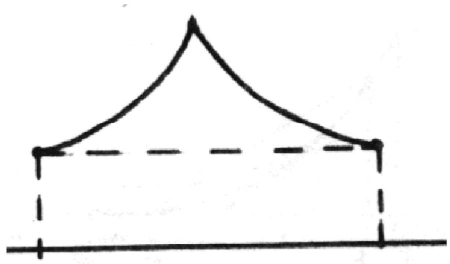



**NOTA :**
Las hipótesis de continuidad en el intervalo cerrado y de derivabilidad en el abierto se deben a que son las mínimas necesarias para que el teorema se verifique. En las dos figuras que siguen podemos observar: en la 1ª una función que cumple todas las hipótesis de Rolle excepto la continuidad en el cerrado, pues sólo es continua en el abierto; en la 2ª una función que cumple igualmente todas las hipótesis del teorema excepto la derivabilidad en un punto del intervalo abierto. En ambos ejemplos vemos que no se verifica la tesis del teorema, es decir no existe ningún punto del intervalo abierto con recta tangente horizontal.





**EJEMPLO 1**: Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $y=x^3-2x^2+x$ en el intervalo [0,1]. En caso afirmativo halla el valor c que verifica la tesis.
La función es continua en el intervalo [0,1] y derivable en el y intervalo (0,1) por ser una función polinómica. Además, f(0)=0 y f(1)=0, por lo tanto si es aplicable el teorema
de Rolle en ese intervalo.
Para calcular el valor que cumple la tesis debemos derivar e igualar a cero. $f'(x)=3x^2-4x+1=0$
$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1/3 \end{cases}$ Dado que el valor de la tesis del teorema debe pertenecer al abierto (0,1), deducimos que dicho valor es c=1/3
**EJEMPLO 2**: Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función
$y=\begin{cases} x^2+x \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } 0<x \leq 3 \\ 3\cos(x-3) \text{ si } x>3 \end{cases}$ en el intervalo [-2,2] y en el intervalo [-2,4]. En caso afirmativo halla el valor c que verifica la tesis.
Tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en los intervalos señalados. Dado que está compuesta por funciones elementales los únicos puntos problemáticos serán x=0 y x=3. Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0$; $\lim_{x\to 0^+} x=0$; f(0)=0 Por lo tanto la función es continua en x=0. Continuidad en x=3: $\lim_{x\to 3^-} x=3$; $\lim_{x\to 3^+} 3\cos(x-3)=3$; f(3)=3. Por lo tanto la función es continua en x=3.
En consecuencia la función es continua en todo R y en particular en los intervalos cerrados [-2,2] y [-2,4]. Estudiaremos ahora su derivabilidad: $y'=\begin{cases} 2x+1 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } 0<x<3 \\ -3\text{sen}(x-3) \text{ si } x>3 \end{cases}$ ;
$f_-'(0)=1$; $f_+'(0)=1$ Por lo tanto f es derivable en x=0 ; $f_-'(3)=1$; $f_+'(3)=0$ Por lo que f no es derivable en x=3. En consecuencia, f es derivable en el abierto (-2,2) pero no en el (-2,4), por lo que en este intervalo no cumple las hipótesis del teorema de Rolle.
En el intervalo [-2,2] cumple la hipótesis de continuidad en el cerrado y derivabilidad en el abierto, falta comprobar lo referente a las imágenes: f(-2)=4-2=2; f(2)=2, en consecuencia

cumple las hipótesis del teorema en este intervalo. Vamos a hallar el valor del punto c que garantiza la tesis, para ello igualamos la derivada a cero: 2x+1=0⇒x=-1/2 $\in (-2, 2)$.

**EJEMPLO 3**: Halla a,b y c para que la función y=$\begin{cases} x^2+ax+b \text{ si } x \leq 2 \\ cx+1 \text{ si } x>2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,4]. Halla para dichos valores los puntos que verifican la tesis.

La función está compuesta por funciones polinómicas por lo que es continua y derivable en R-{2} cualesquieran que sean los valores de a,b y c. Estudiemos la continuidad y derivabilidad en x=2; $\lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+b)=4+2a+b=f(2)$; $\lim_{x\to 2^+}(cx+1)$=2c+1. Para que la función sea continua en x=2 es necesario que 4+2a+b=2c+1; y'=$\begin{cases} 2x+a \text{ si x<2} \\ c \text{ si x>2} \end{cases}$ $f_-'(2)$=4+a; $f_+'(2)$=c.

Para que la función sea derivable en x=2 es preciso que 4+a=c. Además, para que se cumpla el teorema en el intervalo[0,4] ha de ocurrir que f(0)=f(4), f(0)=b; f(4)=4c+1, luego b=4c+1.

De todo lo anterior se deduce que para que f cumpla el teorema en ese intervalo ha de cumplirse: $\begin{cases} 4+2a+b=2c+1 \\ 4+a=c \\ b=4c+1 \end{cases}$ y resolviendo el sistema se obtiene: a=-3, b=5, c=1.

Nos piden que, para esos valores, hallemos los valores que cumplen la tesis. Es decir, los puntos del intervalo (0,4) en los que se anula la derivada. Si x>2 la derivada es igual a c=1, lo que quiere decir que no se anula; si x<2 la derivada vale 2x+a=2x-3=0⇒x=3/2, que pertenece al intervalo (0,4) y es el único que cumple la tesis del teorema de Rolle.

**COROLARIO DEL TEOREMA DE ROLLE:** Del teorema de Rolle obtenemos facilmente el siguiente resultado: *Entre dos raices a y b de una función que sea continua en [a,b] y derivable en (a,b) se encuentra siempre una raiz de su derivada.*Basta aplicar el teorema para el caso de que f(a)=f(b)=0, es decir que a y b sean dos raíces de y=f(x)

Este corolario puede servirnos para demostrar la unicidad de las raíces de una función por el método de reducción al absurdo.

**Ejemplo 1**: Demuestra que la función y=$x^3+x^2+2x+1$ tiene una y solo una raíz real.

Por el teorema de Bolzano comprobamos que tiene alguna solución: f(-1)= -1<0, f(0)=1>0 y f es continua en el intervalo [-1,0], por ser una función polinómica. Aplicando el teorema de Bolzano sabemos que $\exists c \in (-1, 0)$ tal que f(c)=0, es decir que f posee al menos una raiz en el intervalo (-1,0).

Pasamos ahora a demostrar que solo puede tener 1 raíz aplicando el corolario del teorema de Rolle: Al ser una función polinómica f es continua y derivable en todo R, si la función tuviese dos raíces cumpliría todas las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo comprendido entre ellas y, por lo tanto, tendría que haber en dicho intervalo un punto en el que la derivada se hiciese cero. Sin embargo, la derivada de la función es y'=$3x^2+2x+2$, que no se hace cero nunca pues la ecuación $3x^2+2x+2=0$ no tiene solución. Esto garantiza que la función no puede tener dos raíces ya que ello contradiría el teorema de Rolle.

**Ejercicios Propuestos**: (Solución al final de la teoría)

1. Demuestra que la ecuación $x^4$-4x-1=0 tiene exactamente 2 raíces reales y dar un intervalo al que pertenezca cada una de ellas.

2. Demuestra que la ecuación $x^3-5x^2+3x+2=0$ tiene exactamente 3 raíces reales y dar un intervalo al que pertenezca cada una de ellas.
3. Demuestra que las funciones $y=2x^3+x^2$ e $y=x^2+6x-1$ se cortan una única vez en el intervalo (0,1)

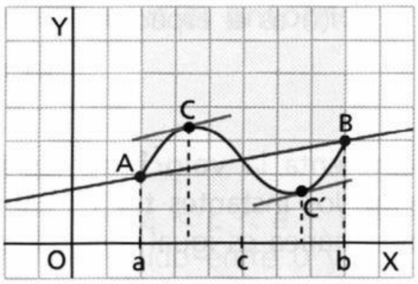
4.Demuestra que la función $y=e^x+x$ corta al eje OX una sola vez

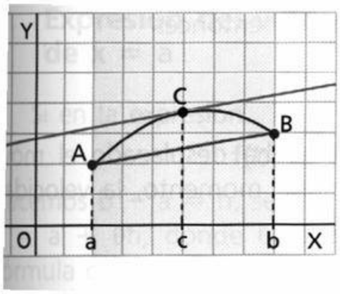
## <u>TEOREMA DEL VALOR MEDIO</u>

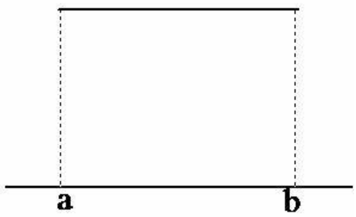
Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), se verifica que existe un punto $c\in(a,b)$ tal que : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

<u>Significado geométrico</u>

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $x=c \in(a,b)$ ; $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos (a,f(a)) y (b, f(b)). Dado que el teorema nos garantiza la igualdad de esas dos pendientes, las rectas correspondientes han de ser paralelas. Es decir, el teorema del valor medio garantiza que si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en el abierto (a,b) existe al menos un punto, de dicho intervalo abierto, cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))








<u>Nota 1:</u>

El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio cuando f(a)=f(b)

<u>Nota 2:</u>

En los mismos ejemplos que hemos puesto para el teorema de Rolle puede comprobarse que son necesarias las hipótesis de continuidad en el cerrado y de derivabilidad en el abierto

**EJEMPLO 1** Razona si la función $y=\cos^2 x$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,\pi]$. En caso afirmativo halla los valores que verifiquen la tesis

La función $y=\cos^2 x$ es continua y derivable en todo R, por lo tanto: es continua en el intervalo $[0,\pi]$ y derivable en $(0,\pi)$. Es decir, cumple las hipótesis del teorema del valor medio en dicho intervalo. Para calcular el o los valores que cumplen la tesis, hemos de resolver la ecuación $f'(x)=\dfrac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}$ ;

$f'(x)=-2\cos x.\operatorname{sen} x$ ; $\dfrac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}=\dfrac{\cos^2(\pi)-\cos^2(0)}{\pi}=0$ Por lo que obtenemos $2\cos x.\operatorname{sen} x=0$, resolviendo esa ecuación vemos que en el intervalo $(0,\pi)$ tiene una única raíz $x=\pi/2$ que será el valor que verifica la tesis.

**EJEMPLO 2**: Determina un punto de la función $y=x^2$ cuya recta tangente sea paralela al segmento determinado por los puntos A(1,1) y B(3,9)
Dado que la función es continua y derivable en todo R, cumplirá el teorema del valor medio en cualquier intervalo que tomemos. Los puntos A y B pertenecen a la función, al ser f(1)=1 y f(3)=9. Aplicando el teorema del valor medio al intervalo [1,3] sabemos que existirá un punto c, perteneciente al abierto, cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A y B. Dicho punto será aquel que verifique f '(x)=$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$;
y'=2x= 4 $\Rightarrow$x=2 ; f(2)=4$\Rightarrow$ El punto buscado será (2,4)

**Ejemplo 3**

Calcula los valores m y n para que la función f(x)=$\begin{cases} x^2+nx \text{ si } x<-2 \\ x^3+mx^2 \text{ si } x\geq -2 \end{cases}$ cumpla las hopótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-4,2]. Para esos valores halla el o los valores a los que se refiere la tesis.
Dado que las dos partes que componen nuestra función son funciones polinómicas, continuas y derivables en todo R, el único punto problemático en el intervalo [-4,2] es x=-2. Hemos de estudiar la continuidad y derivabilidad en este punto:
$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-} x^2+nx=4-2n;\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+} x^3+mx^2=-8+4m.$ Por tanto para que sea continua en el cerrado [-4,2] ha de verificarse que 4-2n=-8+4m
Estudiamos ahora la derivabilidad. f '(x)=$\begin{cases} 2x+n \text{ si } x<-2 \\ 3x^2+2mx \text{ si } x>-2 \end{cases}$ $f_-$'(-2)=-4+n; $f_+$'(-2)=12-4m
Por tanto para que sea derivable en el intervalo [-4,2] ha de verificarse que sea continua y además que -4+n=12-4m. Resolvemos el sistema para que se cumplan ambas hipótesis:
$\begin{cases} 4-2n=-8+4m \\ -4+n=12-4m \end{cases}$ y obtenemos n=-4 y m=5. La función es por tanto
F(x)=$\begin{cases} x^2-4x \text{ si } x<-2 \\ x^3+5x^2 \text{ si } x\geq -2 \end{cases}$ y su derivada f '(x)=$\begin{cases} 2x-4 \text{ si } x<-2 \\ 3x^2+10x \text{ si } x\geq -2 \end{cases}$. Para calcular el punto que cumple la tesis debemos hallar un punto c$\in$(-4,-2) tal que f '(c)=$\frac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=-\frac{2}{3}$
Si c$\in(-4,-2)$ ha de verificarse que 2c-4=-2/3, resolviendo obtenemos c=5/3 que no pertenece a ese intervalo y por tanto no es válido. Si c$\in$(-2,2) ha de verificarse que $3c^2+10c=-2/3$, resolviendo c=$\begin{cases} \frac{-5+\sqrt{23}}{6} \simeq 0'068056 \in (-2,2) \\ \frac{-5-\sqrt{23}}{6} \simeq -3'265277 \notin (-2,2) \end{cases}$ luego hay un único valor c=$\frac{-5+\sqrt{23}}{6}$

**Soluciones ejercicios propuestos teorema de Rolle.**

1. Demuestra que la ecuación $x^4$-4x-1=0 tiene exactamente 2 raíces reales y dar un intervalo al que pertenezca cada una de ellas.

**Solución**
Consideremos la función f(x)=$x^4$-4x-1 continua y derivable en todo R, por ser una función polinómica.
Vamos a demostrar en primer lugar que dicha función tiene al menos dos raíces:

Consideramos el intervalo [-1,0] en el que la función es continua por serlo en todo R; f(-1)=4>0; f(0)=-1<0. La función cumple en dicho intervalo las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, posee una raíz en el intervalo (-1,0).
Consideremos ahora el intervalo [1,2] en el que la función también es continua por la misma razón dada anteriormente. Se verifica que f(1)=-4<0 y f(2)=7>0. Por el teorema de Bolzano sabemos que la función posee otra raíz en el intervalo (1,2).
Así pues hemos demostrado que la ecuación de partida tiene al menos dos raíces reales y hemos dado, al mismo tiempo, un intervalo al que pertenece cada una de ellas.

Pasemos ahora a demostrar que la ecuación no puede tener más de dos raíces reales.
Si la función f(x) tomada anteriormente tuviese más de dos raíces reales, su derivada tendría que tener una al menos dos ya que el teorema de Rolle garantiza que entre dos raíces de una función continua y derivable se encuentra al menos una de su derivada.
Sin embargo, f ' (x)=$4x^3-4$ y $4x^3-4=0 \Rightarrow 4x^3=4 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1$. Es decir la derivada solo tiene una raíz real y, por lo tanto, la función de partida no puede tener más de dos.

2. Demuestra que la ecuación $x^3-5x^2+3x+2=0$ tiene exactamente 3 raíces reales y dar un intervalo al que pertenezca cada una de ellas.

**Solución**
Consideremos la función f(x)=$x^3-5x^2+3x+2$ continua y derivable en todo R, por ser una función polinómica.
Vamos a demostrar en primer lugar que dicha función tiene al menos tres raíces:

Consideramos el intervalo [-1,0] en el que la función es continua por serlo en todo R; f(-1)=-7<0; f(0)=2>0. La función cumple en dicho intervalo las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, posee una raíz en el intervalo (-1,0).

Consideremos ahora el intervalo [0,2] en el que la función también es continua por la misma razón dada anteriormente. Se verifica que f(0)=2>0 y f(2)=-4<0. Por el teorema de Bolzano sabemos que la función posee otra raíz en el intervalo (0,2).

Por último, consideremos el intervalo [2,5] en el que la función también es continua por ser polinómica. Se verifica que f(2)=-4<0 y f(5)=17>0. Por el teorema de Bolzano sabemos que la función posee otra raíz en el intervalo (2,5).

Así pues hemos demostrado que la ecuación de partida tiene al menos tres raíces reales y hemos dado, al mismo tiempo, un intervalo al que pertenece cada una de ellas.

Pasemos ahora a demostrar que la ecuación no puede tener más de esas tres raíces reales.
Si la función f(x) tomada anteriormente tuviese más de tres raíces reales, su derivada tendría que tener al menos tres ya que el teorema de Rolle garantiza que entre dos raíces de una función continua y derivable se encuentra al menos una de su derivada.

Sin embargo, f ' (x)=$3x^2-10x+3$ y $3x^2-10x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1/3 \end{cases}$. Es decir la derivada solo tiene dos raíces reales y, por lo tanto, la función de partida no puede tener más de tres.

3. Demuestra que las funciones $y=2x^3+x^2$ e $y=x^2+6x-1$ se cortan una única vez en el intervalo (0,1)

**Solución**

Que dichas funciones se corten es equivalente a demostrar que $2x^3+x^2 = x^2+6x-1$ o, lo que es lo mismo que $2x^3-6x+1=0$. Hemos pues de demstrar que dicha ecuación solo posee una raíz real en el intervalo (0,1).

Consideremos la función $f(x)=2x^3-6x+1$ continua en el intervalo [0,1] por ser polinómica. Se verifica que $f(0)=1>0$ y $f(1)= -3<0$, por el teorema de Bolzano sabemos que la función tiene al menos una raíz en el intervalo (0,1)

Demostraremos ahora que dicha raíz tiene que ser única. La función es continua en [0,1] y derivable en (0,1) por ser polinómica, si tuviese dos raíces reales en dicho intervalo se cumpliría el teorema de Rollo en el subintervalo determinado por dichas raíces y, en consecuencia, la función derivada tendría que tener al menos una raíz en el intervalo (0,1). Sin embargo, la función derivada es $f'(x)=6x^2-6$ que se hace cero únicamente en $x=-1$ y $x=1$, por lo tanto no tiene ninguna raíz en el intervalo abierto (0,1).

Hemos demostrado pues que las funciones de partida se cortan una vez y solo una en (0,1).

4. Demuestra que la función $y=e^x+x$ corta al eje OX una sola vez

Vamos a comenzar demostrando que dicha función corta al eje OX al menos una vez, lo que es equivalente a comprobar que tiene al menos una raíz real.

Consideremos el intervalo [-1,0] en el que la función es continua por serlo en todo R ya que es una función elemental. $f(-1)=e^{-1}-1<0$; $f(0)=e^0=1>0$. La función cumple en el intervalo [-1,0] las hipótesis del teorema de Bolzano y, por lo tanto, tiene al menos una raíz en el abierto (-1,0).

Demostraremos ahora que dicha raíz es única. Si la función tuviese dos raíces $x=a$ y $x=b$, cumpliría en el intervalo [a,b] el teorema de Rolle ya que es continua en [a,b] y derivable en (a,b), por ser una función elemental, y $f(a)=f(b)=0$. En consecuencia, su derivada tendría que tener en dicho intervalo una raíz real. Sin embargo, $f'(x)= e^x+1$ que no se hace nunca cero pues $e^x+1=0 \Rightarrow e^x=-1$ lo que no es posible al ser $e^x > 0 \;\forall x \in R$

ANEXO: Tabla de funciones derivadas

| Función | Función derivada | Función compuesta | Aplicación regla de la cadena |
|---|---|---|---|
| y=k | y'=0 | | |
| y=x | y'=1 | | |
| y=k.x | y'=k | y=k.f(x) | y'=k.f '(x) |
| $y=x^n$ | $y'=n.\ x^{n-1}$ | $y=(f(x))^n$ | $y'=n(f(x))^{n-1}.f'(x)$ |
| $y=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$ | Se aplica la fórmula anterior | | |
| Caso particular $y=\sqrt{x}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $y=\sqrt{f(x)}$ | $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ |
| y=(f+g)(x) | y'=f '(x)+g '(x) | | |
| y=(f.g)(x) | y'=f '(x).g(x)+f(x).g'(x) | | |
| y=(f/g)(x) | $y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ | | |
| $y=a^x$ | $y'=a^x$ La | $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}.f'(x).La$ |
| Caso particular $y=e^x$ | $y'=e^x$ | $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}.f'(x)$ |
| y=Lx | y'=1/x | y=L(f(x)) | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $y=\log_a x$ | $y'=1/x.\ \log_a e$ | $y=\log_a(f(x))$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$ |
| y=senx | y'=cosx | y=sen(f(x)) | y'=cos(f(x)).f '(x) |
| y=cosx | y'=-senx | y=cos(f(x)) | y'=-sen(f(x)).f '(x) |
| y=tgx | $y'=\sec^2(x)$ o bien $y'=1+tg^2(x)$ | y=tg(f(x)) | $y'=\sec^2(f(x)).f'(x)$ $y'=(1+tg^2f(x)).f'(x)$ |
| y=ctgx | $y'=-cosec^2(x)$ o bien $y'=-(1+ctg^2(x))$ | y=ctg(f(x)) | $y'=-cosec^2(f(x)).f'(x)$ $y'=-(1+ctg^2f(x)).f'(x)$ |
| y=secx | y'=secx.tgx | y=sec(f(x)) | y'=sec(f(x)).tg(f(x)).f '(x) |
| y=cosecx | y'=-cosecx.ctgx | y=cosec(f(x)) | y'=-cosec(f(x)).ctg(f(x)).f '(x) |
| y=arcsenx | $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | y=arcsen(f(x)) | $y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$ |
| y=arccosx | $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | y=arccos(f(x)) | $y'=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$ |
| y=arctgx | $y'=\frac{1}{1+x^2}$ | y=arctg(f(x)) | $y'=\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$ |

**Función potencial -exponencial**: se aplican logarítmos y después se deriva
**Ejemplo**: $y=(senx)^x$. 1º. Aplicamos logarítmos a ambos miembros: Ly=xL(senx).
2ºDerivamos ambos mienbros: $\frac{y'}{y}=L(senx)+x\frac{cosx}{senx}$ . 3º despejamos y':
$y'=(L(senx)+x\frac{cosx}{senx}).y=(L(senx)+x\frac{cosx}{senx})\ .\ (senx)^x$

## EJERCICOS DE DERIVABILIDAD

A**) Tasa de variación media. Definición de derivada. Recta tangente**

1. Una misma recta ¿puede ser tagente a una función en diferentes puntos?. Explica la respuesta ayudándote de una gráfica.
2. ¿Hay alguna función que tenga la misma pendiente en todos sus puntos? Razona la respuesta.
3. Verdadero o falso: a) Toda función continua es derivable; b) Toda función derivable es continua; c) Si una función no es derivable entonces no es continua; d) Si una función no es continua entonces no es derivable.
4. Calcular, utilizando la definición de derivada, f ’(2) siendo $f(x)=1-x+x^2$. ¿Qué significado geométrico tiene f ‘(2)?. Calcular el punto de corte de la recta tangente a y=f(x) en x=2 con el eje OX.
5. Calcular b para que la tasa de variación media de la función y=L(x+b) en el intervalo [0,2] valga L2. Calcular a continuación la tasa de variación instantánea en los extremos del intervalo.
6. Sea $y=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x^2-3}{3} & \text{si } x>0 \end{cases}$ ¿existe algún punto en el que la tangente a la gráfica sea paralela al eje OX?
7. Explicar porqué la función y=|x| no es derivable en x=0. Calcular las derivadas laterales.
8. Estudia la derivabilidad de la función y=|x+1| análitica y gráficamente.
9. Dadas las funciones $y=x^2$ e $y=x^2+2$ ¿Cómo son sus pendientes en x=2?¿Cómo son sus rectas tangentes en dicho punto?
10. ¿Puede ser la recta y=x paralela a la recta tangente a la función $y=x^3-7x+1$ en algún punto?. ¿Existe algún punto de dicha curva con tangente paralela a la recta x=1?
11. Si la tangente a una curva en un punto es horizontal ¿cuánto vale la derivada en dicho punto?. ¿Y si la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrate?
12. ¿Puede haber distintas funciones qué tengan la misma función derivada? En caso afirmativo cómo serían sus gráficas.
13. Hallar los puntos en los que la función $y=|x^2-5x+6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado de forma analítica y gráfica.
14. Hallar la derivada de $y=x^3$ en x=0 ¿Cuál es la recta tangente a la función en dicho punto? ¿Cual es la posición de dicha tangente respecto a la gráfica de la función?
15. Halla el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la tangente a la curva xy=1 en el punto x=1
16. ¿Es correcto definir la tangente a una curva en un punto P como aquella recta que tiene en común a la curva exactamente el punto P?
17. Utilizando la definición de derivada demuestra que las funciones y=f(x) e y=f(x)+c tienen la misma derivada si c es una constante.
18. Se ha trazado una recta tangente a la función $y=x^3$ cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto (0,2). Hallar el punto de tangencia.
19. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2+x+1$, paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
20. Hallar los punto de la curva $y=x^3-4x+2$ en los que su recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.
21. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2-5x+6$ paralela a la recta 3x+y-2=0

22. Hallar los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a la función $y=x^2$ que pasan por el punto (4,7)
23. Determinar los valores del parámetro k para que las tangentes a la curva $y=kx^3-x^2+7x-18$ en los puntos x=1 y x=2 sean paralelas.
24. Halla el punto de la función $y=2\sqrt{x}$ en el que la recta tangente forme un ángulo de 60º con la parte positiva del eje OX. Escribe la ecuación de dicha tangente.
25. Halla los puntos de la curva $y=3x^2-5x+12$ en los que la recta tangente pase por el origen de coordenadas.
26. Determina el valor del ángulo que forma la tangente a la curva $y=-x^3+3$ con la parte positiva del eje OX en el punto x=3
27. Derivar las siguientes funciones: $y=(\text{arc sen}x)^{\text{arc tg}x}$; $y=\sqrt{(senx)^{\cos x}}$ ; $y=[(x^2+x+1)]^{\text{arc tg }x}$
28. Determinar y' en la siguiente función implícita: . L(x)y-seny=5.
29. Hallar las rectas tangente y normal de las siguientes curvas: a) $y=(senx)^{\cos x}$ en $x=\pi/2$ b) y=arctgx en x=1; c) y=arcsen(x) en x=0'5

30. Halla la T.V.M. De la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ en el intervalo [1,1+h]. Con el resultado obtenido calcula f '(1)

31 Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva $y=x^3+1$ que es paralela a la recta x+12y-6=0

B**) Estudio de la derivavilidad. Teoremas de Rolle y del valor medio**.

1. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $y=\begin{cases} e^{x-1} \text{ si } x\le 1 \\ Lx+1 \text{ si } x>1 \end{cases}$ ; b) $y=\begin{cases} \cos x-1 \text{ si } x\le 0 \\ \frac{2x}{\pi} \text{ si } 0<x\le \pi/2 \\ senx \text{ si } x>\pi/2 \end{cases}$ ; c) $y=\begin{cases} \frac{x}{Lx} \text{ si } x>e \\ e \text{ si } x\le e \end{cases}$ ;

d) $y=\begin{cases} x^2-x+1 \text{ si } x\le 1 \\ Lx+x \text{ si } 1<x<e \\ x+1 \text{ si } x\ge e \end{cases}$ ; e) $y=\begin{cases} 2^x \text{ si } x<0 \\ x^2+1 \text{ si } 0\le x\le 1 \\ Lx+e^{x-1}+1 \text{ si } x>1 \end{cases}$ ; f) $y=\begin{cases} senx \text{ si } x\le 0 \\ L(\cos x)+x \text{ si } 0<x<\pi/2 \end{cases}$

g) $y=\begin{cases} e^{x^2} \text{ si } x\le 0 \\ x+1 \text{ si } 0<x<1 \\ Lx+2x \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ ; h) $y=\begin{cases} senx \text{ si } 0\le x\le \pi/2 \\ \cos ecx \text{ si } \pi/2<x<2\pi \end{cases}$ ; i) $y=\begin{cases} tgx \text{ si } 0\le x\le \pi \\ senx \text{ si } \pi<x<2\pi \end{cases}$

j) $y=\begin{cases} x^3-1 \text{ si } x\le 0 \\ \frac{3}{x-2} \text{ si } 0<x<3; \\ x^2-6x+12 \text{ si } x\ge 3 \end{cases}$ : k) $y=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\ge 0 \\ \frac{x}{1-x} \text{ si } x<0 \end{cases}$ ; l) $\begin{cases} e^x \text{ si } x\le 0 \\ \cos x \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ L(senx) \text{ si } \pi/2\le x<\pi \end{cases}$

2. Determinar el valor de los parámetros a,b, c y d de modo que las siguientes funciones sean derivables en todo R: a) $y=\begin{cases} x^3+1 \text{ si } x\ge 0 \\ ax+b \text{ si } x<0 \end{cases}$ ; b) $y=\begin{cases} asenx \text{ si } x<0 \\ bx \text{ si } 0\le x\le 1 \\ Lx+c \text{ si } x>1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ ax^3+bx^2+cx+d \text{ si } 0\le x\le 2 \\ \cos(x-2) \text{ si } x>2 \end{cases}$ d) $y=\begin{cases} L(e+senx) \text{ si } x<0 \\ x^3+ax+b \text{ si } x\ge 0 \end{cases}$

3. Comprobar si se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los siguientes casos. En caso afirmtivo hallar el valor al que se refiere la tesis

a) $f(x)=3\cos^2x$ en$[\pi/2, 3\pi/2]$ ; b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 \text{ si } x<1 \\ 5x-8 \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ en [-2,8/5] c) $y=\sqrt[3]{x^2}$ en [-1,1]

d) $y=x^2-4x+11$ en [1,3] ; e) y= | cosx | en $[0,\pi]$; f) y= 1- |x| en [-1,1]

4. Comprobar si se verifican las hipótesis del teorema del valor medio en los siguientes casos. En caso afirmtivo hallar el valor al que se refiere la tesis
   a) y=$2x^2$-5x+1 en [1,6] ; b) y=2cosx en [$\pi/3, 2\pi/3$]; c) y=$\sqrt{x}$ en [1,9];
   d) y=$\sqrt{1-senx}$ en $[0,\pi]$
5. Dada la parábola y=$3x^2$, encontrar un punto en que la tangente a la curva sea paralela la cuerda que une los puntos (0,0) y (4,48)
6. Dada la función y=$\begin{cases} ax \text{ si } x<1 \\ \dfrac{x^2-b}{2} \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$ ¿hay algún valor de a y b para los que f cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo[-2,2]? En caso afirmativo calcula el valor al que se refiere la tesis.
7. Dada la función y=aLx+b se pide: a) Hallar a y b sabiendo que la gráfica pasa por los puntos A(1,3) y B(e,5); b) Demostrar la existencia de un punto c∈(1,e) en el que la tangente a la gráfica sea paralela a la recta que pasa por A y B c) Calcular las coordenadas del punto c
8. La función y=1 – $\sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo [-1,1 ]. Demostrar que la derivada de dicha función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice este resultado el teorema de Rolle?. Razona la respuesta.
9. Comprobar que entre las raíces de la función y=$\sqrt[3]{x^2-5x-6}$ se encuentra alguna de su derivada.
10. Calcula p,m y n para que la función y=$\begin{cases} -x^2+px \text{ si } -1\leq x<3 \\ mx+n \text{ si} 3\leq x\leq 5 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,5]. Halla para dichos valores el o los puntos que verifican la tesis.
11. Demuestra que la función y=$x^3$-3x+b no puede tener más de una raíz en el intervalo [-1,1] cualquiera que sea el valor de b.
12. Demuestra que la ecuación $e^x$-1=0 no tiene más raíces reales que x=0
13. Si una función es derivable en todo R y su derivada es siempre positiva, ¿pueden existir dos números a y b distintos tales que f(a)=f(b)? Razona la respuesta.
14. Sea f(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } -2\leq x\leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} \text{ si} -1<x\leq 0 \end{cases}$ ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [-2,0]? En caso afirmativo halla el o los valores que verifican la tesis.
15. Representa gráficamente la función y=|x|+|x-1|. Razona en qué puntos dicha función no es derivable.

16 Demostrar que la función y= $x^5$+x-1 tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1

17. Demostrar que la función y=$e^x$-x-3 Posee un cero en la parte positiva del eje OX. Investigar si es único.

18 Dada la parábola y=$x^2$-3x+2 se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas x=1 y x=3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r.

19. Sea f(x)=$\begin{cases} x^2+4x+3 \text{ si } x\leq 0 \\ -x^2+ax+b \text{ si } x>0 \end{cases}$ Hallar a y b para que f sea derivable. Con los valores obtenidos calcula los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A(-3,f(-3)) y B(2,f(2))
20. Comprobar que la ecuación $x^7$+3x+3=0 tiene una única solución real.
21. Sea f(x)=2+$x^3(x-2)^2$ probar que la función f ‘(x) tiene al menos una raíz real en el intervalo (0,2) sin calcular la función f ‘

22. Sea y=f(x) una función derivable en R; sean a y b dos raíces de la derivada f '(x) tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de f '(x). Razonar si pueden ocurrir cada una de las siguientes posibilidades: a) entre a y b no existe ninguna raíz de f(x) b) entre a y b existe una sola raíz de f(x); c) entre a y b existen dos raíces de f(x)
23. Para cada uno de los siguientes apartados dar un ejemplo que demuestre que el enunciado es falso, justificando la respuesta. a) la suma de dos funciones discontinuas es una función discontinua b) toda función continua es derivable

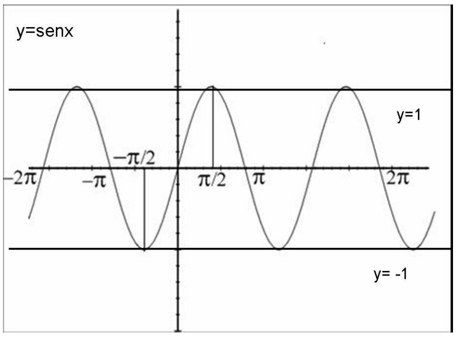
**C)Otros ejercicios propuestos para practicar teorema de Rolle, Bolzano y valor medio**

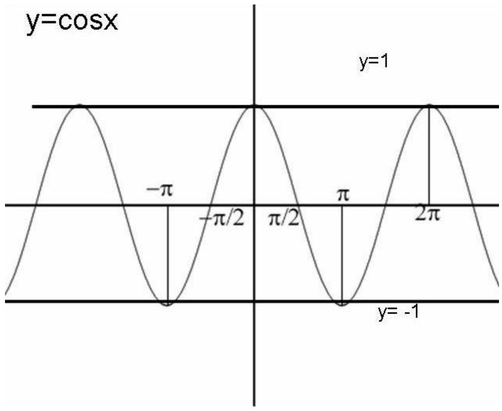
1.Sea *f*(x) una función continua y derivable en IR tal que *f*(0) = 3. Calcula cuánto tiene que valer *f*(5) para asegurar que en (0, 5) existe un valor c tal que *f* '(c) = 8.
2. Sea *f*(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b], con derivada segunda en el intervalo (a, b). Demuestra que si *f*(x) = 0 en al menos tres valores de x $\in$ [a, b], entonces *f* ''(x) = 0 para algún x $\in$ [a, b].
3. Si una función *f(x)* verifica las hipótesis del Teorema de Rolle, ¿verifica también las del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial? ¿Que diferencia hay en las conclusiones de ambos teoremas en ese caso?
4. Dada la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, halla tres intervalos tales que cada uno contenga una raíz diferente de la ecuación $f'(x) = 0$.
5. Si el término independiente de un polinomio en x es igual a 3 y el valor que toma ese polinomio para x = 2 es 3, prueba que su derivada se anula para algún valor de x; razona que ese valor pertenece a un cierto intervalo que se especificará.
6. Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ no puede tener más de una raíz real.
7. Demuestra que la ecuación $x^{18} - 5x + 3 = 0$ no puede tener más de dos raíces reales. (Sugerencia: localiza los puntos en que se anula la derivada del primer miembro y ver cuántos son, para deducir lo dicho).
8. Comprueba, utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, que la curva $y = x^5 - 5x - 1$ tiene exactamente tres puntos de intersección con el eje OX.
9. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. ¿Puede cumplir la tesis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo [-2, 5]?. Justifícalo
10. ¿Se puede aplicar el Teorema de Rolle a la función *f*(x) = |sen x| en el intervalo [$\pi$/3, 4$\pi$/3]? Razona la respuesta.
11. Comprueba que la función *f*(x) = |x – 2| no cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo [0, 3].

**SOLUCIÓN EJERCICIOS DERIVABILIDAD.**

A)

1. Si, la misma recta puede ser tangente a una función en diferentes puntos. Si observamos por ejemplo la función y=senx, vemos que las rectas y=1 e y=-1 son tangentes a la función en infinitos puntos. Lo mismo ocurre con la función y=cosx




2.Se define la pendiente de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Si la función es una recta, su recta tangente coincide en todos sus puntos con ella misma y por tanto tiene en todos sus puntos la misma pendiente. Es decir, si la función es del tipo y=ax+b a,b∈R , su recta tangente en cualquier punto $x=x_0$ coincide con la propia recta y=ax+b por tanto su pendiente es m=a $\forall x_0 \in R$.

3.a) Falso, por ejemplo la función y=|x| es continua en x=0 y sin embargo no es derivable.

b) Verdadero, ya que de la existencia del $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se sigue que $\lim_{h\to o} f(x+h) = f(x)$ y por tanto que la función es continua.

c) Falso por ejemplo la función y=|x| no es derivable en x=0 y sin embargo es continua

d) Verdadero, es equivalente a demostrar que si una función es derivable entonces es continua, realizado en el apartado b.

4. $f(x)=1-x+x^2$; $f'(2)=\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(2+h)+(2+h)^2-3}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-2-h+4+4h+h^2-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(3+h) = 3$$

f '(2) es geométricame la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)=1-x+x^2$ en x=2.

Para calcular el punto de corte de la tangente con el eje OX calculamos en primer lugar esa recta. El punto de tangencia es (2, f(2))=(2,3). La pendiente de la tangente es, como ya dijimos m=f '(2)=3. Por tanto la recta tangente tiene por ecuación 3(x-2)=y-3. Operando queda y=3x-3. Su punto de corte con el eje OX será su intersección con y=0. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = 3x-3 \\ y = 0 \end{cases}$ se obtiene el punto de corte (1,0)

5. Se define la tasa de variación media de una función y=f(x) en el intervalo [x,x+h] al número TVM=$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Así pues en nuestro caso TVM=$\frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{L(2+b)-L(b)}{2} =$

$=\dfrac{L(\frac{2+b}{b})}{2}$ Dado que nos dicen que la TVM=L2, se obtiene: $\dfrac{L(\frac{2+b}{b})}{2} = L2 \Rightarrow L(\frac{2+b}{b}) = 2L2 \Rightarrow$

$L(\frac{2+b}{b}) = L2^2 \Rightarrow \dfrac{2+b}{b} = 4 \Rightarrow 2+b = 4b$; 3b=2; b=2/3.
La tasa de variación instantanea en un punto coincide con la derivada en dicho punto. Nos piden por lo tanto la derivada de la función y=L(x+2/3) en x=0 y en x=2.
Y'=$\dfrac{1}{x+2/3}$ ; f '(0)= $\dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$; ; f '(2)= $\dfrac{1}{2+2/3} = \dfrac{1}{8/3} = \dfrac{3}{8}$.

6. Que exista un punto cuya recta tangente sea horizontal es equivalente a decir que exista un punto cuya derivada sea cero. Estudiaremos por ello la función derivada y veremos si se hace cero en algún punto .

f(x)=$\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \le 0 \\ \frac{x^2-3}{3} \text{ si } x>0 \end{cases}$ El único punto problemático de esta función es x=0,

f '(x)=$\begin{cases} 2 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{3} \text{ si } x>0 \end{cases}$ ,estudiamos la derivabilidad en x=0.

$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{2h-1+1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = 2;\ f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^2-3}{3}+1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^2-3+3}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2}{3h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{3} = 0$ Por lo tanto la función no es derivable en x=0

La función derivada es entonces la escrita más arriba. Observamos que no se hace cero en ningún punto, por tanto no hay ningún punto con recta tangente horizontal.

7. De la gráfica de la función y=|x| se deduce que no es derivable en x=0 al tener en x=0 un punto anguloso y no coincidir la posición límite de las secantes a la izd y a la dcha. Vamos a estudiarlo de forma analítica para calcular sus derivadas laterales.

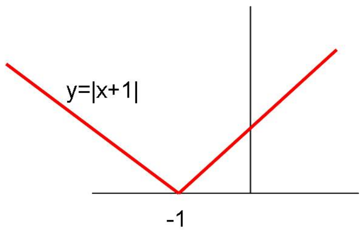
y=|x|=$\begin{cases} -x \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$ Estudiamos la derivabilidad en x=0 que es el único punto problemático:

$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1;\ f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$ En consecuencia f no es derivable en x=0

8. Y=|x+1|=$\begin{cases} -(x+1) \text{ si } x<-1 \\ x+1 \text{ si } x \ge -1 \end{cases}$ Tanto las funciones y=-x-1 como y=x+1 son derivables en todo R por ser polinómicas, en consecuencia nuestra función es derivable en R-{-1}, siendo su función derivada: y'=$\begin{cases} -1 \text{ si } x<-1 \\ 1 \text{ si } x>-1 \end{cases}$ . Estudiamos ahora la derivada en x=-1:

$f'_-(-1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{-(-1+h+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1;\ f'_+(-1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(-1+h+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$

Por tanto f no es derivable en x=-1.
Para hacer el estudio gráfico dibujamos la gráfica de la función.
La función posee en x=-1 un punto angulosa, las secantes a la izd y a la derecha de x=-1 tienden a una recta diferente por lo tanto no existe recta tangente, en consecuencia la función no es derivable en x=-1




9. y=$x^2$; y'=2x La pendiente en x=2 es igual a f '(2) =4
y=$x^2$+2; y'=2x. La pendiente en x=2 es igual a f '(2)=4. Por lo tanto tienen la misma pendiente.

La recta tangente a la primera función pasa por el punto (2,4) y la de la recta tangente a la segunda función por el punto (2,6); dado que tienen la misma pendiente y no pasan por el mismo punto las rectas tangentes a ambas funciones son paralelas.

10. Para que la recta y=x sea paralela a la recta tangente a $y=x^3-7x+1$ en un punto, sus pendientes deben coincidir. La pendiente de y=x es y'=1; la pendiente de la recta tangente a $y=x^3-7x+1$ en un punto x será $y'=3x^2-7$, igualando obtenemos $3x^2-7=1 \Rightarrow 3x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$
La recta x=1 es vertical, si la recta tangente a la función en un punto fuese vertical la función no sería derivable en dicho punto. La función $y=x^3-7x+1$ es derivable en todo R por ser una función polinómica, en consecuencia ninguna de sus tangentes es paralela a la recta x=1.

11. Si la recta tangente a una función en un punto es horizontal la derivada en dicho punto vale cero. Si la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante la derivada en ese punto vale 1. En ambos casos la derivada coincide con la pendiente de la recta tangente.

12. Dado que la derivada de una constante es cero la función y=f(x) tiene la misma función derivada que las funciones y=f(x)+k siendo k una constante cualquiera. La gráfica de f(x)+k se obtiene al trasladar la gráfica de y=f(x) k unidades en sentido vertical, entendiendo que esa traslación es hacia arriba si k es positiva y hacia abajo si k es negativa.

13. $y=|x^2-5x+6|$. Hallamos las raíces de la función sin valor absoluto. $x^2-5x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

La función $y=x^2-5x+6$ es positiva en $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ y negativa en (2,3). En consecuencia,

$y=|x^2-5x+6|=\begin{cases} x^2-5x+6 \text{ si } x<2 \\ -x^2+5x-6 \text{ si } 2\le x\le 3 \\ x^2-5x+6 \text{ si } x>3 \end{cases}$ Estudiamos su deribabilidad. Los únicos puntos problemáticos son x=2 y x=-3 (ya que la función está compuesta por funciones polinómicas continuas en todo R). Estudiamos las derivadas laterales en dichos puntos:

$f'_{-}(2) = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-5(2+h)+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+h^2+4h-10-5h+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h-1)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(h-1) = -1$

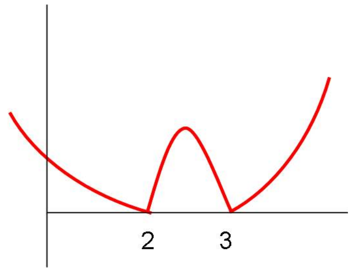
$f'_{+}(2) = \lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)^2+5(2+h)-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-4-h^2-4h+10+5h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-h+1)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(-h+1) = 1$ Luego f no es deivable en x=2

$f'_{-}(3) = \lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+5(3+h)-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-9-h^2-6h+15+5h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-h-1)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(-h-1) = -1$

$f'_{+}(3) = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-5(3+h)+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+h^2+6h-15-5h+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+1)}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$ Luego f no es derivable en x=3

Su función derivada será: $y'=\begin{cases} 2x-5 \text{ si } x<2 \\ -2x+5 \text{ si } 2<x<3 \\ 2x-5 \text{ si } x>3 \end{cases}$

Gráficamente vemos que la función posee en x=2 y x=3 2 puntos angulosos y por lo tanto no es derivable. En esos puntos al tender las secantes a la izd y a la derecha a distintas rectas no hay recta tangente




14. $y=x^3$; $y'=3x^2$; $f'(0)=0$. Recta tangente: $x_0=0$; $y_0=f(0)=0$; $m=f'(0)=0$ Por tanto la recta es y=0. La recta tangente en ese punto atraviesa la gráfica de la función.
15. La curva xy=1 es la función y=1/x. Hallamos primero la recta tangente a dicha función en x=1. $x_0=1$; $y_0=f(x_0)=1$; $y'=-1/x^2$ , $m=f'(1)=-1$
Recta tangente $m(x-x_0)=y-y_0$ ; -1(x-1)=y-1 o lo que es lo mismo x+y-2=0. Seguidamente hallamos los puntos de corte de dicha recta con los dos ejes coordenados:

Intersección con el eje OX$\left\{\begin{array}{c} x+y-2=0 \\ y=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow x=2$ La base del triángulo vale 2 unidades.

Intersección con el eje OY$\left\{\begin{array}{c} x+y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow y=2$ La altura del triángulo vale 2 unidades.

Por lo tanto el área del triángulo es S=$\dfrac{b-h}{2}=2u^2$

16. No sería correcto. En primer lugar la recta tangente a una curva en un punto P puede tener en común con la curva más puntos que el punto P, por ejemplo la recta tangente a la función y=senx en x=$\pi$/2 tiene infinitos puntos en común con la curva. En segundo lugar, no todas las rectas que tienen un único punto en común con una curva son tangentes a ella, Por ejemplo, la recta x=0 tiene un único punto en común con la parábola $y=x^2$, el pumto (0,0), y sin embargo no es tangente a la parábola en dicho punto.

17. Vamos a hallar la función derivada de g(x)=f(x)+c:
g '(x)=$\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+c-(f(x)+c)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$
Por tanto las dos funciones tienen la misma derivada

18. $y=x^3$ $y'=3x^2$ La pendiente es la derivada en el punto de tangencia por lo tanto $3x^2=3\Rightarrow$
$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Estos son los dos puntos en los que la pendiente de su recta tangente es 3.
Vamos a hallar las dos tangentes para ver cual pasa por el punto (0,2)
Recta tangente en x=1: $x_0=1$; $y_0=f(1)=1$; m=3$\Rightarrow$ $3(x-1)=y-1\Rightarrow 3x-y-2=0$ Sustitiyuendo vemos que no pasa por el punto (0,2).
Recta tangente en x=-1: : $x_0=-1$; $y_0=f(1)=-1$; m=3$\Rightarrow$ $3(x+1)=y+1\Rightarrow 3x-y+2=0$
Sustituyendo vemos que esta recta si pasa por el punto (0,2), luego el punto de tangencia pedido es x=-1.
19. La bisectriz del primer cuadrante es y=x, su pendiente es y'=1. Si la tangente a la función $y=x^2+x+1$ es paralela a esa recta debe tener la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente en un punto x es y'=2x+1, hallamos x para que esa pendiente sea 1: 2x+1=1$\Rightarrow x=0$
El punto de tangencia es entonces x=0, hallamos la recta tangente: $x_0=0$; $y_0=f(0)=1$; m=1
$m(x-x_0)=y-y_0$; 1(x-0)=y-1$\Rightarrow$x-y+1=0 es la tangente buscada.
20. La bisectriz del segundo cuadrante es y=-x; su pendiente es y'=-1;
$y=x^3-4x+2$; $y'=3x^2-4=-1\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Son las abscisas de los puntos buscados.

**21**. 3x+y-2=0⇒ $y=-3x+2$; pendiente y'=-3. y=$x^2$-5x+6; y'=2x-5=-3⇒ $x=1$
Recta tangente: $x_0$=1; $y_0$=f(1)=2; m=-3⇒ -3(x-1)=y-2 o bien 3x+y-5=0
**22**. Sea ($x_0$, $y_0$) el punto de tangencia . Sabemos que el punto pertenece a la curva y=$x^2$ por tanto $y_0=x_0^2$, es decir el punto es ($x_0$, $x_0^2$), hallemos la recta tangente en dicho punto:
y=$x^2$; y'=2x m=f '($x_0$)=2$x_0$ . Recta tangente 2$x_0$(x-$x_0$)=y-$x_0^2$. Como sabemos que la recta pasa por el punto (4,7) podemos sustituir dicho punto en la recta obteniendo:2$x_0$(4-$x_0$)=7-$x_0^2$, operando nos queda $x_0^2$-8$x_0$+7=0 Resolviendo esta ecuación obtenemos $x_0$=7 y $x_0$=1
**23.** y=k$x^3$-$x^2$ +7x-18, y'=3k$x^2$-2x+7; f '(1)=3k-2+7=3k+5; f '(2)=12k-4+7=12k+3 , como deben ser iguales 3k+5=12k+3⇒ $-9k=-2; k=2/9$
**24**. Que la recta tangente forme un ángulo de 60º con la parte positiva del eje OX es equivalente a decir que la pendente de la recta tangente es igual a la tg60º=$\sqrt{3}$
La función es y=2$\sqrt{x}$ , y'=2$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$
Recta tangente: $x_0$=1/3; $y_0$=f(1/3)=$\frac{2}{\sqrt{3}}$; m=$\sqrt{3}$ ;
Recta: $\sqrt{3}\,(x-1/3)=y-\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow 3x-\sqrt{3}\,y+1=0$
**25**. y=3$x^2$-5x+12, y'=6x-5. Calculemos la recta tangente en un punto cualquiera $x_0$:
$y_0$=f($x_0$)=3$x_0^2$-5$x_0$+12; m=f '($x_0$)=6$x_0$-5. Recta (6$x_0$-5)(x-$x_0$)=y-(3$x_0^2$-5$x_0$+12). Dado que pasa por el punto (0,0) podemos sustituir en la ecuación x e y por cero. Operando obtenemos:
(6$x_0$-5)(-$x_0$)=-(3$x_0^2$-5$x_0$+12)⇒ $3x_0^2=12\Rightarrow x_0=\pm 2$
Hay por lo tanto dos puntos de la curva que verifican el problema: x=2 y x=-2
**26** y=-$x^3$+3; y'=-3$x^2$ Nos piden el ángulo de la tangente con la parte positiva del eje OX en x=3, hallamos f '(3)=-27= $tg\alpha\Rightarrow\alpha$ =92º 7' 15''
**27**. a)y=(arc senx)$^{\text{arc tgx}}$; Aplicamos la derivación logarítmica:
Ly=arctgx.L(arcsenx); $\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}.L(arcsenx)+arctgx.\frac{1}{arcsenx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,despejando
y=$\left(\frac{1}{1+x^2}.L(arcsenx)+arctgx.\frac{1}{arcsenx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.(arc senx)$^{\text{arc tgx}}$;
b)y=$\sqrt{(senx)^{\cos x}}$ B)y==$(senx)^{\cos x/2}$
Ly=$\frac{\cos x}{2}L(senx)$; derivando $\frac{y'}{y}=\frac{-senx}{2}L(senx)+\frac{\cos x}{2}\frac{1}{senx}\cos x$ Despejamos y':
y'=$\left(\frac{-senx}{2}L(senx)+\frac{\cos x}{2}\frac{1}{senx}\cos x\right)$.Y'==$\sqrt{(senx)^{\cos x}}$
c)y=[($x^2$+x+1)]$^{\text{arc tg x}}$
Ly=arctgx.L($x^2$+x+1); $\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}L(x^2+x+1)+arctgx.\frac{2x+1}{x^2+x+1}$;
y'=$\left(\frac{1}{1+x^2}L(x^2+x+1)+arctgx.\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)$.[($x^2$+x+1)]$^{\text{arc tg x}}$
**28**. L(x)y-seny=5. En primer lugar derivamos la función: $\frac{1}{x.}y.+L(x)y'-\cos y.y'$=0

En 2º lugar despejamos y', y'(Lx-cosy)= $-\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{-y}{x.(Lx-\cos y)}$
**29**. a)y=(senx)$^{\cos x}$ en x=$\pi$/2 En primer lugar vamos a derivar la función. Aplicamos logaritmos:
Ly=cosx.L(senx); $\frac{y'}{y}=-senx.L(senx)+\frac{\cos x.\cos x}{senx}\Rightarrow y'=(-senxL(senx)+\frac{\cos^2 x}{senx}).senx^{\cos x}$
Recta tangente: $x_0$=$\pi$/2; $y_0$=f($\pi$/2) $=(sen(\frac{\pi}{2}))^{\cos(\pi/2)}=1^0=1$; m=f'($\pi$/2) $=0$
Recta tangente: y=1; al ser la recta tangente horizontal, la normal es la recta vertical que pasa por ese punto, es decir x=$\pi$/2
b) y=arctgx en x=1; y'=$\frac{1}{1+x^2}$ Recta tangente: $x_0$=1; $y_0$=arctg1=$\pi$/4 m=f '(1)=1/2
Recta 1/2(x-1)=y-$\pi$/4. La pendiente de la normal es m'=-1/m, en nuestro caso m'=-2. Por lo tanto la recta normal será -2(x-1)=y-$\pi$/4
c)arcsen(x) en x=0.5 y'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Recta tangente: $x_0$=0'5; $y_0$=arcsen(0'5)=$\pi$/6
m=f '(0'5)=$\frac{1}{\sqrt{1-0'25}}=\frac{1}{\sqrt{0'75}}$. Recta: $\frac{1}{\sqrt{0'75}}$(x-0'5)=y-$\pi$/6. La pendiente de la normal es

m'=$-\sqrt{0'75}$ , En consecuencia la recta normal es: $-\sqrt{0'75}$ (x-0'5)=y-$\pi$/6

**30**. T.V.M. De f(x)=$\frac{3}{x+1}$ en [1,1+h]

T.V.M.=$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{3}{2+h}-\frac{3}{2}}{h}=\frac{\frac{6-6-3h}{2(2+h)}}{h}=\frac{-3h}{h(4+2h)}=\frac{-3}{4+2h}$

f '(1)=$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-3}{4+2h}=-\frac{3}{4}$

**31**. La normal a la curva y=$x^3$+1 debe ser paralela a la recta x+12y-6=0. Esto significa que la pendiente de la normal es igual a la pendiente de la recta=-1/12

Sabemos que si m es la pendiente de la normal -1/m es la pendiente de la tangente, por lo tanto en este caso debemos de buscar un punto de la curva cuya tangente valga 12.

y=$x^3$+1; y'=3$x^2$=12$\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$ Hay por lo tanto 2 soluciones x=2 y x=-2, vamos a hallar ambas normales:

Recta normal en $x_0$=2; $y_0$=f(2)=9; m=-1/12. Recta normal: -1/12(x-2)=y-9

Recta normal en $x_0$=-2; $y_0$=f(-2)=-7; m=-1/12. Recta normal: -1/12(x+2)=y+7

B) Estudio de la derivavilidad. Teoremas de Rolle y del valor medio.

1. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) y=$\begin{cases} e^{x-1} \text{ si x} \le 1 \\ Lx+1 \text{ si x>1}\end{cases}$ ; $y'=\begin{cases} e^{x-1} \text{ si x<1} \\ 1/x \text{ si x>1}\end{cases}$ ;

La función es continua y derivable en $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ al serlo y=$e^{x-1}$ e y=Lx en los intervalos en los que están definidas.

Derivabilidad en x=1,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{x-1}=e^0=1;\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}Lx+1=1$; f(1)=1$\Rightarrow$ f es continua en x=1 .

$f'_-(1)=e^0=1;\ f'_+(1)=1\Rightarrow$ f es derivable en x=1

Por tanto f es derivable en todo R

$b)y=\begin{cases}\cos x-1 \text{ si x} \le 0 \\ \frac{2x}{\pi} \text{ si } 0<\text{x}\le \pi/2 \\ senx \text{ si x>}\pi/2\end{cases}$ ; y'=$\begin{cases}-senx \text{ si x} < 0 \\ \frac{2}{\pi} \text{ si } 0<\text{x}<\pi/2 \\ \cos x \text{ si x>}\pi/2\end{cases}$

Las funciones y=cosx, y=senx e y=$\frac{2x}{\pi}$ son continuas y derivables en todo R, por lo tanto los únicos puntos que pueden tener problemas de derivabilidad son x=0 y x=$\pi$/2

Derivabilidad en x=0:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x-1=0;\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2x/\pi=0;f(0)=0\Rightarrow$f es continua en x=0

$f'_-(0)=-sen0=0;\ f'_+(0)=2/\pi\Rightarrow$ f no es derivable en x=0

Derivabilidad en x= $\pi$/2:

$\lim\limits_{x\to \pi/2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi/2^-}2x/\pi=1;\ \lim\limits_{x\to \pi/2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi/2^+}senx=1;f(\pi/2)=1\Rightarrow$f es continua en x=$\pi$/2

$f'_-(\pi/2)=2/\pi;\ f'_+(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0\Rightarrow$ f no es derivable en x=$\pi$/2

f es derivable en R-{0,$\pi$/2}

$;c)y=\begin{cases}\frac{x}{Lx} \text{ si x>e} \\ e \text{ si x} \le e\end{cases}$ ; y'=$\begin{cases}\frac{Lx-x.\frac{1}{x}}{(Lx)^2} \text{ si x >e} \\ 0 \text{ si x<e}\end{cases}=\begin{cases}\frac{Lx-1}{(Lx)^2} \text{ si x >e} \\ 0 \text{ si x<e}\end{cases}$

y=x/Lx es continua y derivable en el intervalo (e,∞) por serlo en (0,∞)-{1}; y=e es continua en todo R y en consecuencia en $(-\infty,e)$. Por lo tanto el único problema de derivabilidad que puede tener f es en el punto x=e.

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} x/Lx = e;\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+} e = e;\ f(e) = e \Rightarrow$f es continua en x=e
$f'_-(e) = 0;\ f'_+(e) = \frac{Le-1}{e^2} = 0 \Rightarrow$ f es derivable en x=e
Por lo tanto f es derivable en todo R

d) y=$\begin{cases} x^2 - x + 1 \text{ si } x \le 1 \\ Lx + x \text{ si } 1<x<e \\ x+1 \text{ si } x \ge e \end{cases}$ ; y'=$\begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x<1 \\ 1/x + 1 \text{ si } 1<x<e \\ 1 \text{ si } x>e \end{cases}$

y=Lx es continua y derivable en (1,e) por serlo en (0,∞), el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R por ser polinómicas. Por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en x=1 y x=e
Derivabilidad en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 - x + 1 = 1; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} Lx + x = 1; f(1) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=1
$f'_-(1) = 1;\ f'_+(1) = 2 \Rightarrow$ f no es derivable en x=1
Derivabilidad en x=e
$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-}(Lx + x) = 1 + e; \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+}(x+1) = e + 1; f(e) = e + 1 \Rightarrow$f es continua en x=e
$f'_-(e) = 1/e + 1;\ f'_+(e) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=e
Por lo tanto f es derivable en todo R-{1,e}

e)$y = \begin{cases} 2^x \text{ si } x \le 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ Lx + e^{x-1} + 1 \text{ si } x>1 \end{cases}$ ; y'=$\begin{cases} 2^x L2 \text{ si } x<0 \\ 2x \text{ si } 0<x<1 \\ 1/x + e^{x-1} \text{ si } x>1 \end{cases}$

y=Lx es continua y derivable en (1,∞), el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R , por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en x=0 y x=1
Derivabilidad en x=0
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2^x = 1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 + 1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = 2^0 L2 = L2;\ f'_+(0) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0
Derivabilidad en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + 1) = 2; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(Lx + e^{x-1} + 1) = 2\ ; f(1) = 2 \Rightarrow$f es continua en x=1
$f'_-(1) = 2;\ f'_+(1) = 2 \Rightarrow$ f es derivable en x=1. Por tanto f es derivable en R-{0}

f) y=$\begin{cases} senx \text{ si } x \le 0 \\ L(\cos x) + x \text{ si } 0<x<\pi/2 \end{cases}$ ; y'=$\begin{cases} \cos x \text{ si } x<0 \\ \frac{-senx}{\cos x} + 1 \text{ si} 0<x<\pi/2 \end{cases}$

En el intervalo $(0,\pi/2)$ la función coseno es mayor que cero y por lo tanto y=L(cosx) es continua y derivable en ese intervalo. El resto de las funciones que componen f son continuas y derivables en todo R. Por lo tanto el único punto que puede tener problemas es x=0
Derivabilidad en x=0
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} senx = 0; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} L(\cos x + x) = L1 = 0; f(0) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = \cos 0 = 1;\ f'_+(0) = \frac{-sen0}{\cos 0} + 1 = 1 \Rightarrow$ f es derivable en x=0
f es derivable en $(-\infty, \pi/2)$

g) $y=\begin{cases} e^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } 0<x<1 \\ Lx+2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ ; $y'=\begin{cases} e^{x^2}.2x & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 1/x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

La función y=Lx es derivable en $(0,\infty)$ y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida, el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R. Por lo tanto los únicos puntos problemáticos son x=0 y x=1

Derivabilidad en x=0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{x^2} = 1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$ f es continua en x=0

$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0

Derivabilidad en x=1

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(Lx+2x) = 2; f(1) = 2 \Rightarrow$ f es continua en x=1

$f'_-(1) = 1;\ f'_+(1) = 3 \Rightarrow$ f no es derivable en x=1

Luego f es derivable en R-{0,1}

h) $y=\begin{cases} senx & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos ecx & \text{si } \pi/2<x<2\pi \end{cases}$ ; $y'=\begin{cases} \cos x & \text{si } 0<x<\pi/2 \\ -\cos ecx.ctgx & \text{si } \pi/2<x<2\pi \end{cases}$

La función senx es derivable en R. La función y=cosecx=$\frac{1}{senx}$ es continua y derivable en todos los puntos en los que senx≠0. En el intervalo $(\pi/2, 2\pi)$ esta función tiene un punto de discontinuidad en x=$\pi$ y por lo tanto en ese punto f no es continua y, en consecuencia, no es derivable. Hay además otro punto que puede ser problemático, x=$\pi$/2, al haber un cambio de función. Estudiamos la derivabilidad en ese punto.

$\lim\limits_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi/2^-} senx = 1; \lim\limits_{x\to \pi/\pi/2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi/2^+} \cos ecx = 1; f(\pi/2) = 1 \Rightarrow$ f es continua en x=$\pi$/2

$f'_-(\pi/2) = \cos\pi/2 = 0;\ f'_+(\pi/2) = -\cos ec\pi/2.ctg\pi/2 = 0 \Rightarrow$ f es derivable en x=$\pi$/2

Por lo tanto f es derivable en $(0, 2\pi) - \{\pi\}$

i) $y=\begin{cases} tgx & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ senx & \text{si } \pi<x<2\pi \end{cases}$ $y'=\begin{cases} \sec^2 x & \text{si } 0<x<\pi \\ \cos x & \text{si } \pi<x<2\pi \end{cases}$

La función y=tgx tiene en el intervalo (0,$\pi$) un punto de discontinuidad en x=$\pi$/2, por lo tanto en ese punto f no es continua ni derivable. El otro punto en el que puede haber problema es x=$\pi$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} tgx = 0; \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} senx = 0; f(\pi) = 0 \Rightarrow$ f es continua en x=$\pi$

$f'_-(\pi) = \sec^2\pi = 1;\ f'_+(\pi) = \cos\pi = -1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=$\pi$

f es derivable en $(0,2\pi) - \{\pi/2, \pi\}$

j) $y=\begin{cases} x^3-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{3}{x-2} & \text{si } 0<x<3; \\ x^2-6x+12 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ : $y'=\begin{cases} 3x^2 & \text{si } x<0 \\ \frac{-3}{(x-2)^2} & \text{si } 0<x<3 \\ 2x-6 & \text{si } x>3 \end{cases}$

La función y=$\dfrac{3}{x-2}$ es continua en R-{2}, como en ese punto coincide con la fórmula de nuestra función , f no es continua ni derivable en x=2. El resto de las funciones que componen f son derivables en todo R, debemos estudiar por lo tanto la derivabilidad en los puntos x=0 y x=3 en los que hay cambio de función

Derivabilidad en x=0

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-1) = -1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ f no es continua en x=0 y por lo tanto no es derivable en ese punto.

Derivabilidad en x=3
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{x-2} = 3; \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x^2-6x+12) = 3; f(3) = 3 \Rightarrow$f es continua en x=3
$f'_-(3) = -3;\ f'_+(3) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=3
f es derivable en R-{0,2,3}

k) $y=\begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} \text{ si } x<0 \end{cases}$ $y'=\begin{cases} 2x \text{ si } x>0 \\ \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \text{ si } x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \text{ si } x>0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} \text{ si } x<0 \end{cases}$

La función y=$\dfrac{x}{1-x}$ es derivable en todo R-{1} y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida. La función y=$x^2$ es derivable en R. Por lo tanto el único punto problemático es x=0.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0; f(0) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0. Por tanto f es derivable en R-{0}

l) $\begin{cases} e^x \text{ si } x \leq 0 \\ \cos x \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ L(senx) \text{ si } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$ $y'=\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ -senx \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ \frac{\cos x}{senx} \text{ si } \pi/2<x<\pi \end{cases}$

La función y=L(senx) es derivable en $(\pi/2,\pi)$ al ser el senx positivo en dicho intervalo. El resto de las funciones que componen f son derivables en todo R. Por lo tanto los únicos puntos que pueden tener problemas son x=0 y x=$\pi/2$
Derivabilidad en x=0
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = e^0 = 1;\ f'_+(0) = -sen0 = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0
Derivabilidad en x=$\pi/2$
$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^-} \cos x = 0; \lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} L(senx) = L1 = 0; f(\pi/2) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(\pi/2) = -sen\pi/2 = -1;\ f'_+(\pi/2) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=$\pi/2$
f es derivable en $(-\infty,\pi) - \{0.\pi/2\}$

2. Determinar el valor de los parámetros a,b, c y d de modo que las siguientes funciones sean derivables en todo R:
a) $y=\begin{cases} x^3+1 \text{ si } x \geq 0 \\ ax+b \text{ si } x<0 \end{cases}$ ; $y'=\begin{cases} 3x^2 \text{ si } x>0 \\ a \text{ si } x<0 \end{cases}$
Dado que las funciones que componen f son derivables en todo R necesitamos únicamente garantizar la derivabilidad en x=0
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3+1 = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax+b = b; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0 si b=1
$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = a \Rightarrow$A=0
F es derivable en R si a=0 y b=1

b) $y=\begin{cases} asenx \text{ si } x<0 \\ bx \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ Lx+c \text{ si } x>1 \end{cases}$ $y'=\begin{cases} a\cos x \text{ si } x<0 \\ b \text{ si } 0<x<1 \\ 1/x \text{ si } x>1 \end{cases}$
y=Lx es derivable si x>0, las restantes funciones que componen f son derivabes en todo R. Entonces f será derivable en R si lo es en x=0 y en x=1

Derivabilidad en x=0:
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} asenx = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx = 0;\ f(0) = 0$ ⇒f es continua en x=0 ∀a y b∈ $R$
$f'_-(0) = a.\cos 0 = a;\ f'_+(0) = b \Rightarrow a = b$ para que f sea derivable en x=0
Derivabilidad en x=1
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx = b; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx + c = c\ ; f(1) = b$ ⇒f es continua en x=1 si b=c
$f'_-(1) = b;\ f'_+(1) = 1 \Rightarrow$ b=1

Reuniendo todas las condiciones tenemos $\begin{cases} a = b \\ b = c \\ b = 1 \end{cases}$ ⇒ si a=b=c=1 f es derivable en todo R

c) $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ \cos(x-2) \text{ si } x>2 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ 3ax^2 + 2bx + c \text{ si } 0<x<2 \\ -sen(x-2) \text{ si } x>2 \end{cases}$

Dado que todas las funciones que intervienen son derivables en R, f lo será si es derivable en x=0 y x=2
Derivabilidad en x=0
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax^3 + bx^2 + cx + d = d; f(0) = d \Rightarrow$ d=1 para que f sea continua en x=0; $f'_-(0) = e^0 = 1;\ f'_+(0) = c$ ⇒c=1 para que sea derivable
Derivabilidad en x=2
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 8a + 4b + 2c + d = f(2); \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \cos(x-2) = 1; \Rightarrow$
8a+4b+2c+d=1 para que f sea continua en x=2 $f'_-(2) = 12a + 4b + c;\ f'_+(2) = -sen0 = 0 \Rightarrow$

12a+4b+c=0. Reuniendo todas las condiviones tenemos: $\begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$ y

resolviendo:a=1/4, b=-1, c=1, d=1 para que f sea derivable en R

d) y= $\begin{cases} L(e + senx) \text{ si } x<0 \\ x^3 + ax + b \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{(e + senx)} \text{ si } x<0 \\ 3x^2 + a \text{ si } x>0 \end{cases}$

Dado que e+senx es siempre positivo, por estar senx comprendido entre -1 y 1, la función y=L(e+senx) es derivable para todo x<0; la otra función que compone f es un polinomio y, por lo tanto, derivable para todo x>0. Así pues el único punto en el que f puede no ser derivable es en x=0. Estudiamos la derivabilidad en ese punto:
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} L(e + senx) = Le = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3 + ax + b) = b = f(0)$ ⇒b=1
$f'_-(0) = 1/e;\ f'_+(0) = a \Rightarrow a = 1/e$ ; f es derivable en R si b=1 y a=1/e

3. Comprobar si se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los siguientes casos. En caso afirmtivo hallar el valor al que se refiere la tesis

a)f(x)=3cos$^2$x en$[\pi/2, 3\pi/2]$ ; f es continua en $[\pi/2, 3\pi/2]$ por serlo en R; f es derivable en $(\pi/2, 3\pi/2)$ por serlo en R; f($\pi$/2)=3cos$^2$($\pi$/2)=0; f(3$\pi$/2)=3cos$^2$(3$\pi$/2)=0. Por lo tanto f cumple las hipótesis del teorema de Rolle.
Vamos a buscar el c que cumple la tesis. Esto es c∈ $(\pi/2, 3\pi/2)$ tal que f '(c)=0
f '(x)=-6cosx.senx=0⇒ $\begin{cases} senx = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ en el intervalo en el que trabajamos esto se verifica en x=$\pi$ que ∈ $(\pi/2, 3\pi/2)$. Así pues ese es el valor que cumple la tesis.

b) f(x)=$\begin{cases} x^2-4 \text{ si x<1} \\ 5x-8 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ en [-2,8/5] f es continua y derivable en cualquier punto distinto de x=1 por serlo las funciones que la componen. Estudiamos la derivabilidad en x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-4) = -3; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(5x-8) = c\text{-}3; f(1) = -3 \Rightarrow$ f es continua en x=1

y'=$\begin{cases} 2x \text{ si x<1} \\ 5 \text{ si x>1} \end{cases}$ $f_-$'(1)=2; $f_+$'(1)=5 Luego f no es derivable en x=1 y por lo tanto no es derivable en el intervalo (-2,8/5). En consecuencia, no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [-2,8/5]

c) y=$\sqrt[3]{x^2}$ en [-1,1] . F es continua en R, por lo tanto lo es en [-1,1].

y'=2/3x$^{-1/3}$=$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ que no existe en x=0, por tanto f no es derivable en (-1,1) y por tanto no cumple las hipótesis del teorema de Rolle

d) y=x$^2$-4x+11 en [1,3] ; La función es continua y derivable en R por tanto es continua en [1,3] y derivable en (1,3) ; f(1)=8 y f(3)=8 Por tanto cumple las hipótesis del teorema de Rolle en ese intervalo. Buscamos el valor de c: y'=2x-4=0⇒x=2$\in(1,3)$ Por lo tanto c=2

e) y= | cosx | en [0,$\pi$]; la función en ese intervalo se define del siguiente modo:

y=|cosx|=$\begin{cases} \cos x \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\cos x \text{ si } \pi/2<x \leq \pi \end{cases}$ $\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to\pi/2^+} f(x)$=f($\pi$/2) luego f es continua en

[0,$\pi$]; y'=$\begin{cases} -senx \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ senx \text{ si } \pi/2<x \leq \pi \end{cases}$ $f_-$'($\pi$/2)=-1; $f_+$'($\pi$/2)=1 Por tanto f no es derivable en x=$\pi$/2 y, en consecuencia no es derivable en el intervalo (0,$\pi$). Por tanto no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en ese intervalo.

f) y= 1- |x| en [-1,1]

y=1-|x|=$\begin{cases} 1-(-x) \text{ si x<0} \\ 1-x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ =$\begin{cases} 1+x \text{ si x<0} \\ 1-x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$=f(0) luego f es continua en [-1,1];

y'=$\begin{cases} 1 \text{ si x<0} \\ -1 \text{ si x>0} \end{cases}$ $f_-$'(0)=1; $f_+$'(0)=-1 por tanti f no es derivable en x=0 y en consecuencia no lo es en el intervalo (-1,1). Así pues f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle en ese intervalo.

4. Comprobar si se verifican las hipótesis del teorema del valor medio en los siguientes casos. En caso afirmtivo hallar el valor al que se refiere la tesis

a) y=2x$^2$-5x+1 en [1,6] f es continua y derivable en R por ser una función polinómica, por tanto es continua en [1,6] y derivable en (1,6). En consecuencia cumple las hipótesis del teorema del valor medio. Para encontrar el valor que verifica la tesis debemos buscar un punto c∈(1,6) tal que f '(c)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{43-(-2)}{5} = \frac{45}{5} = 9$

f '(x)=4x-5=9⇒ $x = 14/4 \in (1,6)$ Luego c=14/4

b) y=2cosx en $[\pi/3, 2\pi/3]$; f es continua y derivable en R, por tanto es continua en $[\pi/3, 2\pi/3]$ y derivable en en $(\pi/3, 2\pi/3)$. En consecuencia cumple las hipótesis del teorema del valor medio en ese intervalo. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2\cos(2\pi/3)-2\cos(\pi/3)}{2\pi/3-\pi/3} = \frac{-1-1}{\pi/3} = \frac{-6}{\pi}$

f '(x)=-2senx; f '(c)=-2senc=$\frac{-6}{\pi} \Rightarrow senc = \frac{3}{\pi} \Rightarrow c \simeq 1,26 \in (\pi/3, 2\pi/3)$

c) y=$\sqrt{x}$ en [1,9]; La función es continua en [1,9] por serlo en $[0,\infty)$ y'=$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, por tanto f es derivable en (1,9). En consecuencia cumple las hipótesis del teorema del valor medio en ese intervalo. Buscamos el valor de c:
f '(c)=$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{f(9)-f(1)}{9-1} = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow 8 = 4\sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{c} = 2 \Rightarrow c = 4 \in (1,9)$

d) y=$\sqrt{1-senx}$ en $[0,\pi]$ La función raíz cuadrada es continua en su dominio. Dado que senx $\leq 1 \forall x \in R$ esa función está definida y es continua en todo R y por lo tanto lo es en $[0,\pi]$;
y'=$\frac{-\cos x}{2\sqrt{1-senx}}$ existe si el denominador es distinto de cero, por lo tanto no es derivable en x=$\pi$/2 y en consecuencia no lo es el $(0,\pi)$. Luego no cumple las hipótesis del teorema.

5. Dada la parábola y=$3x^2$, encontrar un punto en que la tangente a la curva sea paralela la cuerda que une los puntos (0,0) y (4,48).
Utilizando la interpretación geométrica del teorema del valor medio lo que nos piden es hallar el valor medio c en el intervalo [0,4] f '(c)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 6c = \frac{48}{4} = 12 \Rightarrow c = 2$.
Dado que f(2)=12, el punto es C(2,12)

6. Dada la función y=$\begin{cases} ax \text{ si } x<1 \\ \frac{x^2-b}{2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ ¿hay algún valor de a y b para los que f cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo[-2,2]? En caso afirmativo calcula el valor al que se refiere la tesis.
Debemos comprobar si f es continua en [-2,2] y si es derivable en (-2,2). El único punto problemático es x=1 pues las funciones que componen f son polinómicas y por lo tanto continuas y derivables en todo R.
Continuidad y derivabilidad en x=1
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax = a; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-b}{2} = \frac{1-b}{2}$ ; $f(1) = \frac{1-b}{2}$ $\Rightarrow$f es continua en x=1 si a=$\frac{1-b}{2}$
y'=$\begin{cases} a \text{ si } x<1 \\ x \text{ si } x>1 \end{cases}$ $f'_-(1) = a; f'_+(1) = 1 \Rightarrow$ a=1; a=$\frac{1-b}{2} = 1 \Rightarrow b = -1$ Para a=1 y b=-1 se cumple el teorema del valor medio en [-2,2].
Vamos a hallar el valor de c: f '(c)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-2)}{2+2} = \frac{5/2+2}{4} = \frac{9}{8}$

si c<1 f '(c)=a=1≠9/8 no hay ninguna solución anterior a x=1; si c>1 f'(c)=c=9/8. Como c=9/8∈[-2,2] ese es el único valor que verifica la tesis.

7. Dada la función y=aLx+b se pide: a) Hallar a y b sabiendo que la gráfica pasa por los puntos A(1,3) y B(e,5); b) Demostrar la existencia de un punto c∈(1,e) en el que la tangente a la gráfica sea paralela a la recta que pasa por A y B c) Calcular las coordenadas del punto c
A) La gráfica pasa por (1,3)$\Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow 3 = aL1 + b \Rightarrow b = 3$
La gráfica pasa por (e,5)$\Rightarrow f(e) = 5 \Rightarrow 5 = aLe + b = a + 3 \Rightarrow a = 2$
Por tanto la función es y=2Lx+3
B) La función es continua y derivable en (0,∞), por lo tanto es continua en [1,e] y derivable en (1,e). En consecuencia cumple las hipótesis del teorema del valor medio, es decir existe un punto perteneciente al intervalo (1,e) cuya recta tangente es paralela a la cuerda que une (1,f(1)) y (e,f(e)) que son precisamente los puntos A y B

C) Vamos a calcular dicho valor medio y'=2.$\frac{1}{x}$ ;$f'(c)=\frac{2}{c}=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{5-3}{e-1}=\frac{2}{e-1}$
$\frac{2}{c}=\frac{2}{e-1}\Rightarrow c=e-1\in(1,e)$ Como nos piden las coordenadas del punto tenemos que calcular su imagen y=2Lx+3; f(e-1)=2L(e-1)+3. Punto (e-1, 2L(e-1)+3)

8. La función y=1 – $\sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo [-1,1 ]. Demostrar que la derivada de dicha función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice este resultado el teorema de Rolle?. Razona la respuesta.
y'=4/5x$^{-1/5}$=$\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ que, evidentemente, no se anula en ningún punto. El teorema de Rolle garantiza que entre dos raíces a y b de una función se encuentra una raíz de la derivada siempre que la función sea continua en el intervalo [a,b] y derivable en (a,b). x=-1 y x=1 son dos raíces de la función y=1 – $\sqrt[5]{x^4}$ y en el intervalo (-1,1) no se halla ninguna raíz de la derivada. Esto no contradice el teorema ya que aunque la función es continua en [-1,1] no es derivable en (-1,1) al no serlo en x=0.

9. Comprobar que entre las raíces de la función y=$\sqrt[3]{x^2-5x-6}$ se encuentra alguna de su derivada.
El dominio de esa función es todo R, siendo continua en su dominio. Su derivada es:
y'=1/3(x$^2$-5x-6)$^{-2/3}$.(2x-5)=$\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{x^2-5x-6}}$ Esta función es derivable en todo R excepto en los puntos en que se anula el denominador que son, precisamente, las raíces de la función. Por tanto, si a y b son dos raíces de f se verifica que f es continua en [a,b] derivable en (a,b) y f(a)=f(b)=0. Es decir se cumple el teorema de Rolle en ese intervalo y, por lo tanto, existe un punto c$\in(a,b)$ en el que la derivada se anula.

10. Calcula p,m y n para que la función y=$\left\{\begin{array}{l}-x^2+px \text{ si -1} \le x \le 3\\ mx+n \text{ si3} \le x \le 5\end{array}\right.$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,5]. Halla para dichos valores el o los puntos que verifican la tesis.
Dado que las funciones que componen f son polinómicas son continuas y derivables en todo R. Para que la función cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en ese intervalo es necesario que sea continua y derivable en x=3 y que f(-1)=f(5)
f(-1)=-1-p; f(5)=5m+n⇒ $5m+n=-1-p$

Continuidad en x=3
$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}(-x^2+px)=-9+3p$ ; $\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3+}(mx+n)=3m+n\Rightarrow -9+3p=3m+n$

Derivabilidad en x=3 y'=$\left\{\begin{array}{l}-2x+p \text{ si x<3}\\ m \text{ si 3<x<5}\end{array}\right.$ f$_-$'(3)=-6+p; f$_+$'(3)=m⇒-6+p=m

Reuniendo todas las condiciones tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{c}5m+n=-1-p\\ -9+3p=3m+n\\ -6+p=m\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}m=-8/3\\ n=9\\ p=10/3\end{array}\right.$

Por tanto la función es y=$\left\{\begin{array}{l}-x^2+\frac{10}{3}x \text{ si -1} \le x \le 3\\ -\frac{8}{3}x+9 \text{ si3} \le x \le 5\end{array}\right.$ y su derivada y'=$\left\{\begin{array}{l}-2x+\frac{10}{3} \text{ si x<3}\\ -\frac{8}{3} \text{ si 3<x<5}\end{array}\right.$

Vamos a calcular el valor de c: f '(c)=0

En el intervalo (3,5) eso no es posible ya que la derivada es constante y vale -8/3, el valor debe estar por lo tanto en (-1,3). f '(c)=-2c-+10/3=0$\Rightarrow c = 10/6 \in (-1.5)$

11. Demuestra que la función $y=x^3-3x+b$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [-1,1] cualquiera que sea el valor de b.
La función es continua y derivable en dicho intervalo, por lo tanto entre dos raíces de la función debería hallarse una de la derivada por el teorema de Rolle. $y'=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$
Si la función tuviese dos raíces en [-1,1] la derivada debería tener alguna en el intervalo (-1,1). Como esto no se cumple la función no puede tener dos raíces en dicho intervalo.

12. Demuestra que la ecuación $e^x-1=0$ no tiene más raíces reales que x=0
La función $y=e^x-1$ es continua y derivable en R, por lo tanto si tuviese dos raíces en el intervalo comprendido entre ellas verificaría el teorema de Rolle y deberíamos encontrar una raíz de su derivada. Pero $y'=e^x$ que no tiene raíces. Por tanto la función de partida no puede tener más de una raíz que es, evidentemente, x=0

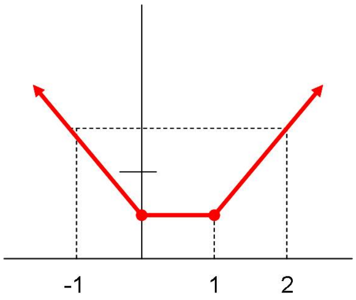
13. Si una función es derivable en todo R y su derivada es siempre positiva, ¿pueden existir dos números a y b distintos tales que f(a)=f(b)? Razona la respuesta.
No ya que al ser derivable en todo R también es continua en R y, por lo tanto, si hubiese dos números a y b tales que f(a)=f(b) la función verificaría en el intervalo [a,b] el teorema de Rolle, es decir habría un punto perteneciente al abierto cuya derivada sería cero, pero esto es imposible pues nos dicen que la derivada es siempre positiva.

14. Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } -2 \le x \le -1 \\ \frac{x^2-3}{2} \text{ si} -1<x \le 0 \end{cases}$ ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [-2,0]?
En caso afirmativo halla el o los valores que verifican la tesis
La función y=1/x es continua y derivable en R-{0} y por lo tanto lo es en (-–2-1) La función $y=\frac{x^2-3}{2}$ es continua y derivable en R por ser polinómica. En consecuencia el único punto en que la función puede tener problema es en x=-1

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1$; f(-1)=-1$\Rightarrow$ f es continua en x=-1
$y'=\begin{cases} -\frac{1}{x^2} \text{ si } -2<x<-1 \\ x \text{ si } -1<x<0 \end{cases}$ $f_-'(-1)=-1$; $f_+'(-1)=-1$ Por tanto f es derivable en x=-1
Al ser continua en [-2,0] y derivable en (-2,0) cumple las hipótesis del teorema del valor medio en dicho intervalo.
Vamos a calcular c: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(-2)}{2} = \frac{-3/2+1/2}{2} = -\frac{1}{2}$
Si c<-1 f '(c)=$-\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ el valor c=+$\sqrt{2}$ no nos sirve porque estamos partiendo de que c<-1, el valor c=- $\sqrt{2} \in (-2,0)$ y por lo tanto es válido
Veamos que ocurre si c>-1 f '(c)=c=- $\frac{1}{2} \in (-2,0)$ por tanto también es válido.
Así pues, en este caso hay dos valores en ese intervalo que verifican la tesis: c=- $\sqrt{2}$ y c=-1/2

15. Representa gráficamente la función y=|x|+|x-1|. Razona en qué puntos dicha función no es derivable.

$$y=|x|+|x-1|=\begin{cases} -x-x+1 \text{ si } x<0 \\ x-x+1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ x+x-1 \text{ si } x>1 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$$




A partir de la gráfica vemos que no es derivable en x=0 y en x=1 al tener puntos angulosos en ambos valores.

16 Demostrar que la función y= $x^5$+x-1 tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1
En primer lugar demostraremos que tiene al menos 1 raíz real en ese intervalo: f es continua en R por ser una función polinómica, por tanto es continua en [0,1]; f(0)=-1<0; f(1)=1>0, En consecuencia, aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,1)$ t.q. $f(c)=0$, es decir tiene al menos una raíz entre 0 y 1.
Veamos ahora que es única: f es continua en [0,1] y derivable en (0,1) por serlo en todo R al ser una función polinómica. Por el teorema de Rolle sabemos que si f tuviese dos raíces en ese intervalo existiría entre ellas al menos 1 raíz de su función derivada. Pero f '(x)=$5x^4$+1 que no se hace cero en ningún valor real, por lo tanto f no puede tener 2 raíces en dicho intervalo.

17. Demostrar que la función y=$e^x$-x-3 Posee un cero en la parte positiva del eje OX. Investigar si es único.
F(0)=-2<0; f(2)>0; f es continua en R, por lo tanto lo es en el intervalo [0,2]. En consecuencia f cumple en ese intervalo el teorema de Bolzano, de lo que se deduce que tiene al menos 1 raíz en el intervalo (0,2).
Para ver si es única utilizaremos el teorema de Rolle. Dado que f es continua y derivable en $(0,\infty)$, el teorema de Rolle garantiza que si f tiene 2 raíces positivas la derivada ha de tener también una raíz comprendida entre ellas. Pero y'=$e^x$-1 solo se hace cero en x=0 y, en consecuencia f no puede poseer dos raíces positivas.

18 Dada la parábola y=$x^2$-3x+2 se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas x=1 y x=3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r.
Al ser una función polinómica f es continua en [1,3] y derivable en (1,3) por serlo en todo R. Por tanto cumple el teorema del valor medio en dicho intervalo. De la interpretación geométrica de dicho teorema se deduca que en el valor medio c tal que f '(c)=$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos de la función de abscisas x=1 y x=3. Tenemos pues que hallar dicho punto y luego la ecuación de la recta tangente.
$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$; f'(x)=2x-3 por lo que 2c-3=1$\Rightarrow c=2$
Recta tangente: $x_0$=2; $y_0$=f(2)=0; m=f'(c)=1. Recta tangente : x-2=y

19. Sea f(x)=$\begin{cases} x^2+4x+3 \text{ si } x \le 0 \\ -x^2+ax+b \text{ si } x>0 \end{cases}$ Hallar a y b para que f sea derivable. Con los valores obtenidos calcula los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A(-3,f(-3)) y B(2,f(2))

Dado que las dos funciones que componen f son polinómicas y por lo tanto derivables, el único punto problemático es x=0

Derivabilidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+4x+3) = 3$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^2+ax+b) = b \Rightarrow 3 = b$ para que f sea continua en x=0.

y'=$\begin{cases} 2x+4 \text{ si } x<0 \\ -2x+a \text{ si } x>0 \end{cases}$ ; $f'_-(0) = 4$; $f'_+(0) = a \Rightarrow a = 4$ para que f sea derivable en x=0

La función es por lo tanto f(x)=$\begin{cases} x^2+4x+3 \text{ si } x \le 0 \\ -x^2+4x+3 \text{ si } x>0 \end{cases}$ y su derivada y'=$\begin{cases} 2x+4 \text{ si } x \le 0 \\ -2x+4 \text{ si } x>0 \end{cases}$

Dado que f es derivable en R se verifica que es derivable en [-3,2] y continua en (-3,2), verificándose el teorema del valor medio en dicho intervalo. Los puntos que nos piden son los valores medios de la función en [-3,2]. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(2)-f(-3)}{2+3} = \dfrac{7}{5}$

Si c<0 f '(c)=2c+4=$\frac{7}{5} \Rightarrow 10c+20 == 7 \Rightarrow c = -\frac{13}{10} \in (-3,2)$ punto válido

Si c>0 f '(c)=-2c+4=$\frac{7}{5} \Rightarrow -10c+20 = 7 \Rightarrow c = \frac{13}{10} \in)(-3,2)$ también es válido. Por lo tanto hay 2 valores que verifican el problema x=-13/10 y x=13/10

20. Comprobar que la ecuación $x^7+3x+3=0$ tiene una única solución real.

Para demostrar que tiene alguna raíz utilizamos el teorema de Bolzano. La función $y=x^7+3x+3$ es continua en R y por lo tanto lo es en [-1,0]. Además f(-1)=-1<0 y f(0)=3>0 por lo tanto cumple el teorema de Bolzano en dicho intervalo, en consecuencia $\exists c \in (-1,0)$ tq f(c)=0 es decir c es una solución de la ecuación de partida.

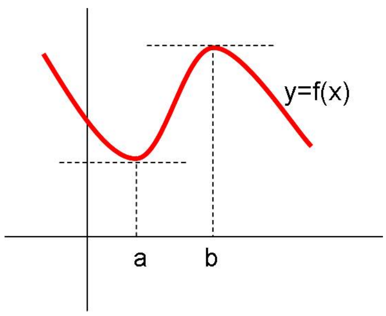
Si la ecuación tuviese 2 soluciones a y b reales, se verificaría que f(a)=f(b)=0, siendo f continua en [a,b] y derivable en (a,b) por serlo en todo R. Por el teorema de Rolle se verificaría que $\exists c \in (a,b)$ t.q. f '(c)=0 pero f '(x)=$7x^6+3=0 \Rightarrow 7x^6 = -3$ lo que no es posible en R. Por tanto la derivada no tiene ninguna raíz real y, en consecuencia, f no puede tener 2 raíces.

21. Sea $f(x)=2+x^3(x-2)^2$ probar que la función f '(x) tiene al menos una raíz real en el intervalo (0,2) sin calcular la función f '

Podemos demostrar lo que nos piden aplicando el teorema de Rolle. Buscamos 2 puntos en los que f(x) valga lo mismo. Es fácil encontrarlos ya que para x=0 y x=2 el segundo sumando se anula y por lo tanto f(0)=2)f(2). En el intervalo [0,2] la función es continua por ser una función polinómica y en (0,2) es derivable por la misma razón, como además f(0)=f(2) f cumple en dcho intervalo el teorema de Rolle. Es decir, $\exists c \in (0,2)$ tal que f '(c)=0

22. Sea y=f(x) una función derivable en R; sean a y b dos raíces de la derivada f '(x) tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de f '(x). Razonar si pueden ocurrir cada una de las siguientes posibilidades: a) entre a y b no existe ninguna raíz de f(x) b) entre a y b existe una sola raíz de f(x); c) entre a y b existen dos raíces de f(x)

a) Si es posible que ocurra, basta considerar una función que tenga en a y b extremos relativos y que sea enteramente positiva entre ellos. En ese caso f '(a)= f '(b)=0, por ser a y b extremos, y no existe entre ellos ninguna raíz de f entre a y b al ser f(x)>0



b)También este caso es posible. Consideremos la función y=senx. Su derivada y'=cosx posee dos ceros consecutivos en x=$\pi$/2 y en x=3$\pi$/2 y la función solo se hace cero 1 vez en dicho intervalo, en el punto x=$\pi$

c) No es posible que ocurra este tercer caso. La función es derivable en R y por lo tanto cumpliría el teorema de Rolle en cualquier intervalo de números reales que consideremos. Si entre a y b hubiese dos raíces c y d de f(x), a<c<d<b , aplicando este teorema existiría una raíz de la derivada en (c,d) y por lo tanto a y b no serían raíces consecutivas de f '(x) como afirma el enunciado.

23. Para cada uno de los siguientes apartados dar un ejemplo que demuestre que el enunciado es falso, justificando la respuesta. a) la suma de dos funciones discontinuas es una función discontinua b) toda función continua es derivable

a) Consideremos las funciones $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ Ambas son discontinuas en x=0 ya que: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0 \Rightarrow$ f discontinua en x=0 : $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1 \Rightarrow$ g discontinua en x=0.

Sin embargo f+g es continua en x=0. En efecto, $(f+g)(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x<0 \\ x+1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ .Es decir (f+g)(x)=x+1, función continua en R.

b) Consideremos la función $y=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\leq 0 \\ x \text{ si } x>0\end{cases}$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2)=0$ ; $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$; $f(0)=0\Rightarrow$ f es continua en x=0; $y'=\begin{cases} 2x \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>0\end{cases}$ $f_-'(x)=0$; $f_+'(x)=1$. Por tanto f no es derivable en x=0

**C) Soluciones de otros ejercicios propuestos para practicar: teorema de Rolle, Bolzano y valor medio**

1. Utilizando el teorema del valor medio aplicado al intervalo [0,5] sabemos que $\exists$ c$\in (0,5)$ tq f ' (c)= $\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{f(5)-3}{5}$ Si queremos garantizar que f ' (c)=8 tendremos $\frac{f(5)-3}{5}$ =8$\Rightarrow$ f(5)-3=40$\Rightarrow$ f(5)=43

2. Aplicando el corolario del teorema de Rolle, dado que f(x)=0 en tres puntos del intervalo [a,b] se verificará que
f '(x) posee en (a, b) al menos dos raíces, llamemósles $c_1$ y $c_2$. Dado que en el intervalo (a,b) existe la derivada segunda, la función y=f ' (x) será continua en $[c_1,c_2]\subset(a,b)$, derivable en $(c_1, c_2)$ y f '$(c_1)$=f ' $(c_2)$=0. Podemos aplicar por lo tanto el teorema de Rolle a la función y=f ' (x), obteniendo que $\exists$ c$\in (c_1,c_2)$ tq f '' (c)=0

3. Si una función verifica en un intervalo el teorema de Rolle verificará también en dicho intervalo el teorema del valor medio del cálculo diferencial ya que las hipótesis del teorema del valor medio, continuidad en el cerrado y derivabilidad en el abierto, forman parte de las hipoótesis exijidas para que se verifique el de Rolle.
Las conclusiones de ambos teoremas en este caso son las mismas pues el teorema de Rolle es un caso particular del del valor medio cuando f(a)=f(b)

4. La función $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ es continua y derivable en todo R por ser polinómica. Además tiene 4 raíces en x=1, x=2, x=3 y x=4. Aplicando el corolario del teorema de Rolle sabemos que entre 2 raíces cualesquiera de una función continua y derivable se encuentra una raíz de su derivada. En consecuencia, la derivada de la función de partida tendrá una raíz el los intervalos (1,2); (2,3) y (3,4).

5. El término independiente de un polinomio es igual a su valor numérico en x=0.
Consideremos la función f(x)=P(x). f((0)= f(2)=3; f es continua en [0,2] y derivable en, (0,2) por ser polinómica, por lo tanto, aplicando el teorema de Rolle, $\exists c\in(0,2)$tq f ’ (c)=0 (Como nos piden, hemos demostrado que la derivada se anula y especificado un intervalo en que lo hace)

6. Consideremos la función $y=x^3+6x^2+15x-23$ continua y derivable en R. Si dicha función tuviera 2 raíces, entre ellas tendría que existir una raíz de su derivada por el teorema de Rolle. Sin embargo $y' = 3x^2+12x+15$ no se anula para ningún valor real, como podemos comprobar resolviendo la ecuación $3x^2+12x+15=0$, por lo tanto la función de partida ha de tener como máximo 1 raíz.
Nota: Obsérvese que en este ejercicio no nos piden que demostremos que dicha raíz existe.

7 Consideremos la función $y=x^{18}-5x+3$ continua y derivable en R. Si dicha función tuviera más de 2 raíces reales, entre ellas tendría que existir una raíz de su derivada por el teorema de Rolle, por lo que la derivada debería tener al menos 2 raíces. Sin embargo $y' = 18x^{17}-5$ que únicamente se anula en x= $\sqrt[17]{\frac{5}{18}}$ , como podemos comprobar resolviendo la ecuación $18x^{17}-5=0$, por lo tanto la función de partida ha de tener como máximo 2 raíces.
Nota: Obsérvese que en este ejercicio no nos piden que demostremos que dichas raíces existen

8. En primer lugar vamos a demostrar que la ecuación $y=x^5-5x-1$ tiene al menos 3 raíces, utilizamos para ello el teorema de Bolzano. Consideremos la función $y=x^5-5x-1$, continua en todo R.

1º: f(-2)=-23<0; f(-1)=3>0, por el teorema de Bolzano la función se hace cero en algún punto del intervalo (-2,-1)

2º f(-1)=3>0; f(0)=-1<0 , por el teorema de Bolzano la función se hace cero en algún punto del intervalo (-1,0)

3º f(0)=-1<0; f(2)=21>0, por el teorema de Bolzano la función se hace cero en algún punto del intervalo (0,2)

Hemos comprobado que la función tiene al menos 3 raíces reales y, por lo tanto queambién las tiene la ecuación de partida.
Vamos ahora a demostrar que no puede tener más que tres utilizando para ello el teorema de Rolle. La función es continua y derivable en R, por ser una función polinómica, por lo tanto es aplicable el teorema de Rolle en cualquier intervalo [a,b]. En consecuencia, si la función tuviese más de 3 raíces reales su derivada tendría que tener al menos 3. Sin embargo, su derivada es $y' =5x^4-5$ y tiene únicamente dos raíces, en efecto: $5x^4-5=0 \Rightarrow x=\sqrt[4]{1}=\pm 1$. Por lo tanto la función de partida no puede tener más de tres raíces.

9. $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$ Esta función es continua y derivable en R-{-1} por ser un cociente de funciones polinómicas. Para que cumpliese las hipótesis del teorema del valor medio en [-2,5]

debería ser continua en dicho intervalo y derivable en (-2,5), pero en x=-1 tiene una discontinuidad asintótica por lo que no se cumplen las hipótesis del teorema.

10. La función $f(x) = |\text{sen } x|$ es continua en R y por lo tanto en el intervalo $[\pi/3, 4\pi/3]$ Sin embargo no es derivable en los puntos $x=k\pi$ siendo $k \in Z$. Dado que el punto $x=\pi \in (\pi/3, 4\pi/3)$ la función no es derivable en dicho intervalo abierto por lo que no cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

11. La función $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Es continua en R y derivable en R-{2} (deberías comprobarlo estudiando su continuidad y derivabilidad) Por tanto no cumple las hipótesis del valor medio en el intervalo [0,3] al no ser derivable en (0,3)