FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL. CONCEPTOS PRELIMINARES

De manera intuitiva podemos decir que una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Definición

Se llama función real de variable real a toda aplicación f de un subconjunto no vacío $D \subset R$ en R, es decir $f: D\subset R \text{---------------------}> R$

$x \text{---------------------}> y=f(x)$

Una función real está definida, en general, por una ley o criterio que se puede expresar por una fórmula matemática. La variable x recibe el nombre de variable independiente y la y o f(x) variable dependiente o imagen.

El subconjunto D de números reales que tienen imagen se llama campo de existencia o dominio de definición de la función f y se representa D(f). $D(f)=\{x\in R / \exists f(x)\}$

El subconjunto de R formado por aquellos números reales que son imagen de algún elemento del dominio se llama recorrido, conjunto imagen o rango.

$\text{Img}(f)=\{y\in R / y=f(x),\ x\in D\}$

Nota: la función se llama real porque su recorrido es un subconjunto de los números reales, se llama de variable real porque su dominio está contenido en R.

Cálculo del dominio de una función

Dado que dominio es el mayor conjunto de números reales que tienen imagen, este puede venir limitado por dos causas

1. Por la naturaleza del problema que representa. Por ejemplo: si $f(x)=x^2$ representa el área de un cuadrado de lado x, el dominio sería $(0,\infty)$, ya que el lado de un cuadrado ha de ser necesariamente positivo

2. Por la expresión algebraica de la función. En este caso tenemos que tener en cuenta fundamentalmente cuatro aspectos:

a) Si en la fórmula aparece un denominador éste debe ser distinto de cero

b) Si aparece un radical de índice par el radicando debe ser mayor o igual que cero

c) La función logaritmo solo admite valores estrictamente mayores que cero

d) La función exponencial debe tener base positiva.

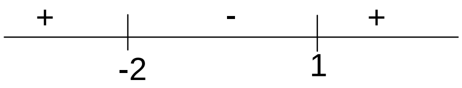
Ejemplo 1: Calcula el dominio de la función $y=3x^5-2x^2+x+2$: Su dominio es D(f)=R.

Ejemplo 2: Calcula el dominio de $y=\frac{3x-7}{x^2-9}$ $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow D(f)=R-\{-3,3\}$

Ejemplo 3: Calcula el dominio de $y=\sqrt{2x-8}$; $2x-8\geq 0 \Rightarrow x\geq 4 \Rightarrow D(f)=[4,\infty)$

Ejemplo 4: Calcula el dominio de $y=\sqrt{x^2+x-2}$ Para resolver la inecuación $x^2+x-2\geq 0$

Estudiamos primero las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ Ahora damos valores en los subintervalos en los que esos don números dividen a la recta real, obteniendo:

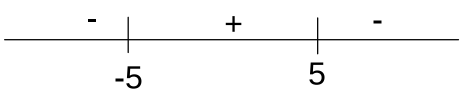


Por lo que el dominio de f es:

D(f)=$(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$ Se toman los extremos porque en ellos el radicando es igual a cero

Ejemplo 5: Calcula el dominio de y=$\dfrac{\sqrt{-x^2+25}}{x-4}$ El radicando tiene que ser positivo:

-x^2+25≥ 0. Resolvemos la ecuación -x^2+25=0⇒ $x = \pm 5$ y damos valores



Por tanto la raíz existe en el intervalo [-5,5]

Pero el denominador no puede ser cero x-4=0⇒x=4

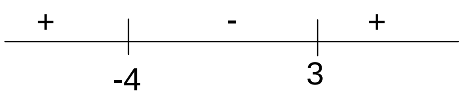
Por tanto D(f)=[-5,5]-{4}

Ejemplo 6: Calcula el dominio de y=L(3x-2); 3x-2>0; x>2/3; D(f)=(2/3,∞)

Ejemplo 7: Calcula el dominio de y=L$\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)$ Necesitamos resolver la inecuación $\dfrac{x-3}{x+4}$>0

Para ello hallamos las raíces de su numerador y denominador y damos valores en los subintervalos en los que dichas raíces dividen la recta real.

x-3=0⇒ $x = 3$; x+4=0⇒ $x = -4$



D(f)=$(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ No podemos tomar los extremos porque en x=3 quedaría L0 que no existe y en x=4 se anula el denominador.

Ejemplo 7 Calcula el dominio de y=$\sqrt{tgx}$. Reducimos el estudio a $[0, 2\pi)$. Necesitamos que tgx≥ 0, sabemos que en el primer y tercer cuadrante la tg es positiva por tanto D=$[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

Ejercicios:

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones: a) y=$\dfrac{6x-4}{x^2-7x+12}$; b)y=$\dfrac{3x-1}{\sqrt{-2x+4}}$; c) $y = \sqrt{x^2+x}$; d); $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x^2+4x}$ e) y=L(x-4); f)y=L(4-x^2); g)=y=e$^{\frac{x-1}{x^2-2}}$

h) y=$\sqrt{9-x^2}$; i) $y = \dfrac{6x^2-3x+1}{\sqrt{x^2-4}}$; j)y=$\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$; k)y=$\sqrt{\dfrac{6x+1}{-3x+2}}$; l) y=$\sqrt{\dfrac{x+4}{2x-6}}$;

m) y=L$\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$; n)y=L(-x+1); o) y=$\dfrac{L(2x-3)}{x^2-7x+12}$; p) $y = \dfrac{7x-1}{L(x-1)}$; q) y=$\dfrac{L(-x^2+1)}{x-6}$;r)y=L(x^2-5x+6)

2. Restringiendo el estudio al intervalo [0,2π), estudia el dominio de las funciones:

a) y=$\sqrt{senx}$; b) y=$\sqrt{\cos x}$; c) y=$\frac{x+1}{tgx}$ d) y= $\frac{\sqrt{tgx}}{senx}$; e) y=secx

Soluciones :

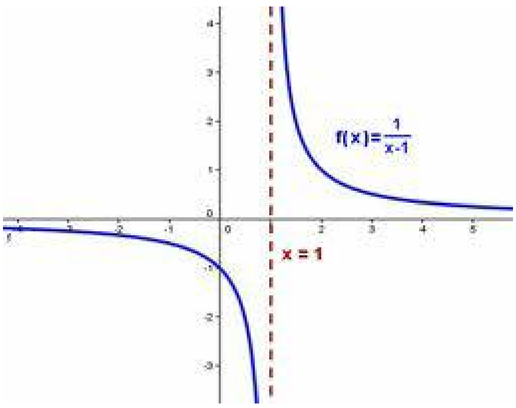
1. a) D(f)=R-{3,4}; b) D(f)=$(-\infty, 2)$; c)D(f)=$(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$; d)D(f)=$(-\infty,-3]\cup[-1,\infty)-\{0,-4\}$
e)D(f)=(4∞) ; f)D(f)=(-2,2) ; g)D(f)=R-{-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ } ; h)D(f)=[-3,3]; i)D(f)=$(-\infty-2)\cup(2,\infty)$
j)D(f)=$(-\infty-2]\cup[2,\infty)$; k)D(f)=[-1/6,2/3); l) D(f)=$(-\infty,-4]\cup(3,\infty)$; m)D(f)=$(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$
n) D(f)$(-\infty,1)$; o)D(f)=$(3/2,\infty)$-{3,4}; p)D(f)=$(1,\infty)$-{2};q)D(f)=(-1,1); r)D(f)=$(-\infty,2)\cup(3,\infty)$

2. a)D(f)=$[0,\pi]$; $b)$D(f)= $[0,\pi/2]\cup[3\pi/2,2\pi)$; $c)D(f)=(0,2\pi)-\{\pi/2,\pi,3\pi/2\}$
d) D(f)=$(0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2)$; e)D(f)=$[0,2\pi)-\{\pi/2,3\pi/2\}$

Definición

Llamamos grafo de una función al conjunto de todos los puntos del plano (x,y) tales que su primera coordenada pertenece al dominio y la segunda es la imagen de la primera: grafo(f)={(x,y) /x∈D(f) e y=f(x)}

Si representamos los puntos del grafo en un sistema de coordenadas obtenemos una curva a la que llamamos gráfica de la función. La gráfica constituye por tano el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen la ecuación y=f(x).



A partir del estudio de la gráfica de la función podemos deducir sus propiedades fundamentales.

En la figura adjunta tenemos por ejemplo la gráfica de la función y=$\frac{1}{x-1}$ cuyo dominio es R-{1} y cuya imagen, como puede verse en la gráfica, es R-{0}

También puede observarse que es decreciente en todo su dominio y que tiene una asíntota vertical en x=1 y una horizontal en y=0. Cóncava en $(-\infty,1)$ y convexa en $(1,\infty)$ Estos conceptos, dados en el curso anterior, los recordaremos más adelante.

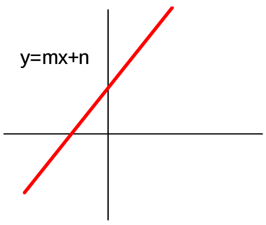
Gráficas de funciones elementales

Se consideran funciones elementales aquellas que pueden obtenerse a partir de funciones polinómicas, radicales, exponenciales, logarítmicas y/o trigonométricas, mediante composición o uso de las operaciones básicas. Ejemplos y=L(x-3); y=x^2+2x.senx; y=$e^{1/x}$; y=$\frac{x-4}{x^2+2x+1}$; y=$\sqrt{3x-2}$

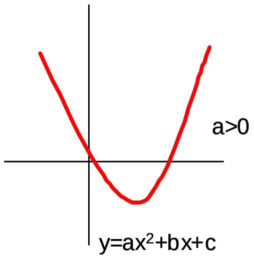
Recordaremos a continuación las gráficas de las funciones elementales más simples:

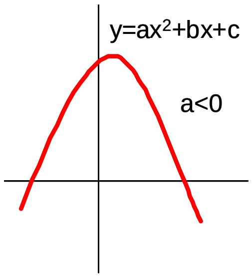
Funciones polinómicas

Función polinómica de grado 1: y=mx+n. Su gráfica es una recta en la que m representa su pendiente y n la ordenada en el origen. Si m>0 la función es creciente y si m<0 es decreciente.

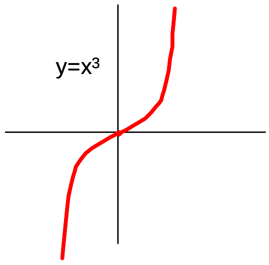


Función polinómica de grado 2: $y=ax^2+bx+c$. Su gráfica es una parábola que tendrá sus ramas hacia arriba si $a>0$ y sus ramas hacia abajo si $a<0$. Su vértice tiene por abscisa $x=-b/2a$ y por ordenada su imagen. c representa la ordenada en el origen.





La función $y=ax^2$ es par, simétrica respecto al eje OX

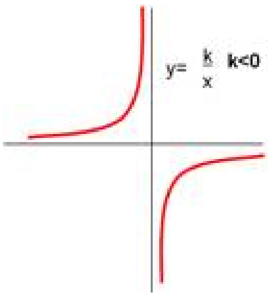


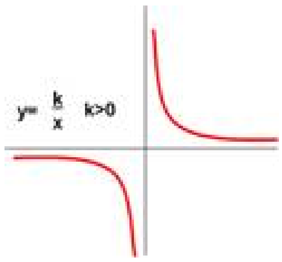
Todas las funciones polinómicas tienen por dominio todo R, de entre las de grado mayor que 2 recordaremos únicamente la gráfica de $y=x^3$ por ser de uso frecuente

Es una función impar, simétrica respecto al origen de coordenadas

Funciones racionales

Son aquellas cuya expresión algebraica es un cociente de polinomios $y=\frac{f(x)}{g(x)}$



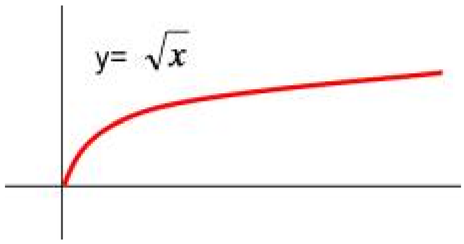


La más conocida es la función de proporcionalidad inversa $y=\frac{k}{x}$ $k\in R$, Su dominio es R-{0} y su gráfica es una hipérbola decreciente en todo su dominio si $k>0$ y creciente en todo él si $k<0$

En ambos casos la función tiene una asintota vertical en $x=0$ y una horizontal en $y=0$

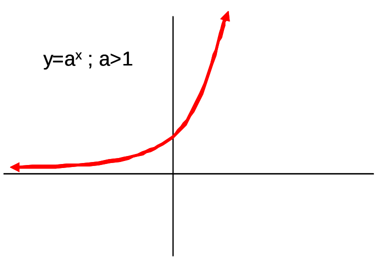
Función y=$\sqrt{x}$

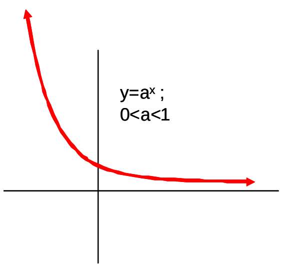
Su dominio es $[0,\infty)$ y su gráfica



Funciones exponenciales: $y=a^x$ con $a>0$:

Su dominio es R, su gráfica depende de que $0<a<1$ o bien que $a>1$. En particular $y=e^x$ es del primer tipo e $y=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ es del segundo tipo





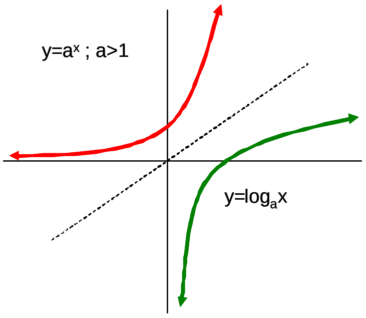
En ambos casos el D=R y el recorrido $(0,\infty)$

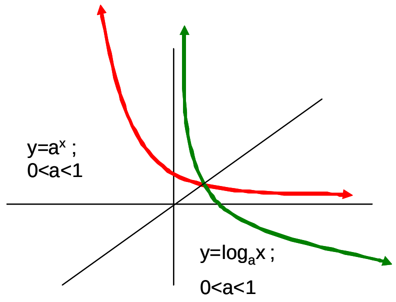
Ambas tienen una AH en $y=0$ pero en la primera es solo AH izd mientras que en la 2^a lo es solo a la derecha.

Si $a>1$ la gráfica es creciente en R y si $0<a<1$ es decreciente

Funciones logarítmicas: $y=\log_a x$ con $a>0$:

Recordemos que $\log_a x=y$ si $a^y=x$. Es decir, la función logarítmica de base "a" es la función inversa de la función exponencial de base "a". De las propiedades de las funciones inversas deducimos: a) el dominio de $y=\log_a x$ coincide con la imagen de $y=a^x$ es decir $(0,\infty)$. b) su gráfica es simétrica de la de $y=a^x$ respecto a la bisectriz del primer cuadrante, por tanto habra dos gráficas de funciones logarítmicas según $0<a<1$ o $a>1$

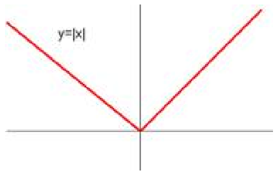




Nota: La gráfica de $y=Lx$ es la primera al ser su base e >1. Es creciente en su dominio y tiene una AV en x=0 por la Dcha.

Funciones definidas a trozos Son aquellas que tienen distintas expresiones algebraicas dependiendo del intervalo de su dominio. Ejemplo $y=\begin{cases} 3x-1 \text{ si } x<0 \\ x^2-x+2 \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$ Su gráfica y características dependen de las funciones que la compongan.

De entre ellas, recordaremos por su importancia la gráfica de la función $y=|x|=\begin{cases} -x \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$



Ejercicio: Dibuja **y encuentra la fórmula de las siguientes funciones: $y=|2x-6|$; $y=|x^2-3x+2|$; $y=|x-2|+|x+1|$; $y=x^2-5|x|+3$; $y=|\text{sen}x|$; $y=\frac{|x+1|}{x}$**

Gráficas de las funciones trigonométricas