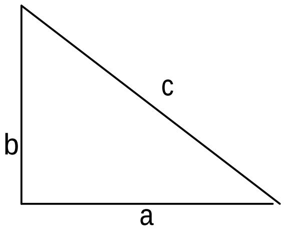
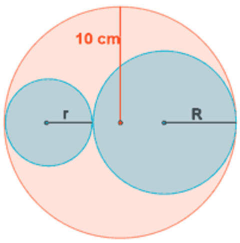
1. De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10cm., calcula as longitudes de los catetos que corresponden ó de área máxima



El área A de un triángulo rectángulo de catetos a y b, e hipotenusa c, viene dada por A = 1/2 ab Pero, por el teorema de Pitágoras, se tiene $a^2 + b^2 = 100$ y por tanto $b=\sqrt{100-a^2}$
Reemplazando en la primera ecuación, resulta $A=1/2a.\sqrt{100-a^2}$
Derivando en función de "a" para hallar el punto crítico, se tiene
$A'(a)=\frac{1}{2}\sqrt{100-a^2}+\frac{1}{2}a.\frac{-2a}{2\sqrt{100-a^2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{100-a^2-a^2}{\sqrt{100-a^2}}\right)=$
$=\frac{100-2a^2}{2\sqrt{100-a^2}}=\frac{50-a^2}{\sqrt{100-a^2}}=0 \rightarrow a^2=50 \rightarrow a=\pm\sqrt{50}$ Realizamos la derivada segunda $A''(a)=\frac{-2a\sqrt{100-a^2}-(50-a^2)\frac{-2a}{2\sqrt{100-a^2}}}{(\sqrt{100-a^2})^2}=\frac{-2a(100-a^2)+50a-a^3}{(100-a^2)\sqrt{100-a^2}}=\frac{-200a+2a^3+50a-a^3}{(100-a^2)\sqrt{100-a^2}}=$
$\frac{-150a+a^3}{(100-a^2)\sqrt{100-a^2}}=\frac{a(a^2-150)}{(100-a^2)\sqrt{100-a^2}}$; $A''(\sqrt{50})<0$ Por tanto en ese valor la función tiene un máximo.

Luego $a=\sqrt{50}$ y despejando $b=\sqrt{50}$. Y el área máxima queda ½ $\sqrt{50}.\sqrt{50}$=1/2.50=25 unidades cuadradas

2. En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada en rojo)?



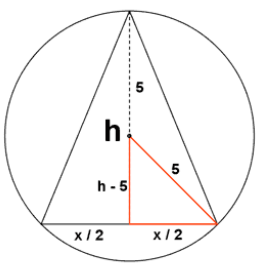
Si r y R son los radios de las circunferencias interiores, se tiene que cumplir que:

$20 = 2r + 2R \Rightarrow 10 = r + R$ El área sombreada en rojo vendrá determinada por la diferencia: $A = \pi 10^2 - \pi r^2 - \pi R^2$

$$\begin{cases} 10 = r + R \\ A = \pi 10^2 - \pi r^2 - \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 10 - R \\ A = \pi\left(100 - r^2 - R^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 10 - R \\ A = \pi\left(100 - (10-R)^2 - R^2\right) \end{cases}$$

Simplificamos la función del área: $A = \pi(100 - (10 - R)^2 - R^2) = \pi(100-100-R^2+20R-R^2)= \pi(20R - 2R^2)$
Para encontrar su máximo calculamos su derivada e igualamos a 0 :
$A'(R) = 20\pi - 4\pi R = 0 \Rightarrow 4\pi R = 20\pi \Rightarrow 4R = 20 \Rightarrow R = 5$ cm
Comprobamos que es un máximo calculando la segunda derivada
$A''(R) = -4\pi < 0$ para cualquier valor de R. Por tanto R = 5 cm maximiza el área sombreada en rojo.
Calculamos r sustituyendo el valor de R en la primera ecuación: r = 10 - R = 10 - 5 = 5 cm. Los diámetros de ambas circunferencias interiores miden: 2·5 = 10 cm

3. De los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio 5 m , ¿cuál es el de área máxima?



Consideremos x la base del triángulo y h su altura.
Para encontrar una relación entre x y h aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo marcado en rojo.
base = x/2
altura = h - radio = h – 5

$$5^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (h-5)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25 = \frac{x^2}{4} + h^2 - 10h + 25 \quad \Leftrightarrow \quad 100 = x^2 + 4h^2 - 40h + 100$$

Despejando x:

$$100 = x^2 - 4h^3 - 40h + 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{10h - h^2}$$

Reuniendo dicha expresión y la fórmula del área del triángulo isósceles tenemos:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{10h - h^2} \\ A = \dfrac{x \cdot h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{10h - h^2} \\ A = \dfrac{h \cdot 2\sqrt{10h - h^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{10h - h^2} \\ A = h\sqrt{10h - h^2} = \sqrt{10h^3 - h^4} \end{cases}$$

Para encontrar el máximo de la función área calculamos su derivada e igualamos a 0 :

$$A'(h) = \frac{30h^2 - 4h^3}{2\sqrt{10h^3 - h^4}} = \frac{15h^2 - 2h^3}{\sqrt{10h^3 - h^4}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15h^2 - 2h^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2(15 - 2h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \ , \ h = \frac{15}{2}$$

Si $h = 0$ el área del triángulo será 0 , qué es mínima, por lo que no nos interesa.
Para confirmar que $x = 15/2$ m corresponde a un máximo, calculamos el signo de la primera derivada antes y despues de dicho punto :

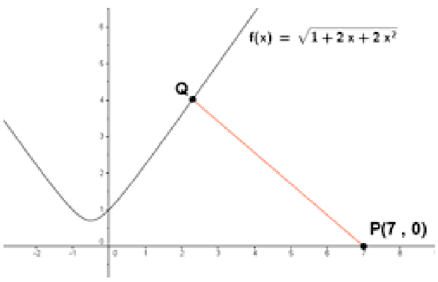
$$\begin{cases} A'(1) > 0 & [\text{creciente } \nearrow] \\ A'\left(\frac{15}{2}\right) = 0 & \\ A'(8) < 0 & [\text{decreciente } \searrow] \end{cases} \Rightarrow \text{Máximo}$$

Calculamos ahora el valor de x

$$x = 2\sqrt{10h - h^2} = 2\sqrt{10 \cdot \frac{15}{2} - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5 \cdot 15 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

El triángulo deberá medir $15/2$ m de base y $5\sqrt{3}$ m altura.

4. Desde una casa situada en el punto P(7 , 0) se quiere hacer un camino recto para conectarla con una carretera cuyo trazado viene dado por la curva de ecuación: $\boldsymbol{y = \sqrt{1 + 2x + 2x^2}}$
¿Con qué punto de la carretera conecta el camino más corto posible?



La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ viene dada por la siguiente fórmula:

$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Llamemos Q=(x , y) al punto de la curva más cercano a p.

La ecuación que relaciona ambas coordenadas viene dada por la función:

$\mathbf{y = \sqrt{1 + 2x + 2x^2}}$ Y la expresión que describe la distancia entre ambos puntos:

$$d = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 + 2x - x^2} \\ d = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 + 2x + x^2 \\ d = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \quad 2x + x^2 \\ d = \sqrt{(x - 7)^2 + 1 + 2x + x^2} = \sqrt{3x^2 - 12x + 50} \end{cases}$$

Para encontrar el mínimo de la función distancia calculamos su derivada e igualamos a 0:

$$d' = \frac{6x - 12}{2\sqrt{3x^2 - 12x + 50}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x \quad 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

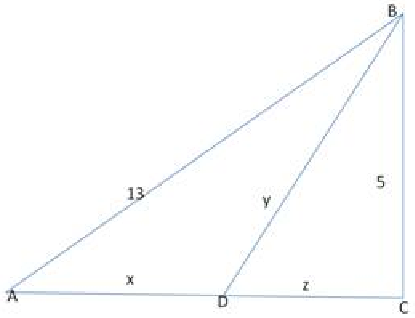
Para confirmar que $x = 2$ corresponde a un mínimo, calculamos el signo de la primera derivada antes y después de dicho punto:

$$\begin{cases} d'(0) < 0 & [\text{decreciente } \searrow] \\ d'(2) = 0 & \\ d'(3) > 0 & [\text{creciente } \nearrow] \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego la coordenada de abscisa que minimiza la distancia es x = 2. Si x = 2 $\Rightarrow$ $y = \sqrt{13}$

El punto buscado es: $Q = (2 , \sqrt{13})$

5. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h, ¿a que distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B se quiere llegar lo antes posible?



Sea D el punto donde el nadador abandona la costa y continúa a nado. AD=x; DC=z; BD=y. Por el teorema de Pitágoras AC=$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ entonces: x=12-z e y=$\sqrt{25 + z^2}$. El tiempo que emplea en ir desde A hasta D es $t_1=\frac{espacio}{velocidad} = \frac{12-z}{5}$ El tiempo que tarda en ir nadando desde D hasta B es $t_2=\frac{\sqrt{25+z^2}}{3}$. El tiempo total será :

$T=\frac{12-z}{5} + \frac{\sqrt{25+z^2}}{3}$ y ha de ser mínimo. $T'=\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\frac{2z}{2\sqrt{25+z^2}} = 0$

Entonces $\frac{1}{5} = \frac{z}{3\sqrt{25+z^2}.} \rightarrow 3\sqrt{25 + z^2}$ =5z $\rightarrow 25z^2 = 9(25 + z^2)$ Resolviendo la ecuación $z=\pm\frac{15}{4}$
El valor negativo no es válido, para comprobar que en el valor positivo tiene un mínimo hallamos $T''=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{25+z^2}-z.\frac{2z}{2\sqrt{25+z^2}}}{25+z^2} = \frac{1}{3}\frac{25+z^2-z^2}{(25+z^2).\sqrt{25+z^2}} = \frac{1}{3}\frac{25}{(25+z^2).\sqrt{25+z^2}}$ y obviamente t''(15/4)>0 por lo que es un mínimo. En consecuencia, el hombre debe abandonar la costa a x=12-z=12-15/4=33/4=8'25 Km de la ciudad A

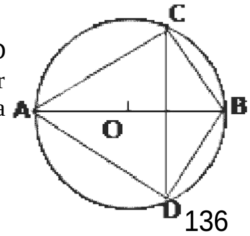
6. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene expresado por la función $c(x)=90+15x-0'6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde el 1 de enero de 1990 contado en años. ¿Hasta que año está creciendo la concentración de ozono? ¿Cuál fue la concentración máxima de ozono que se alcanzó en esa ciudad?

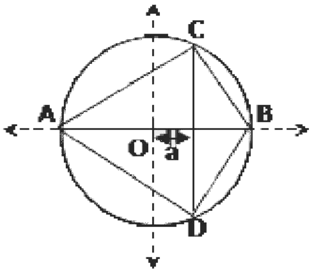
$c(x)=90+15x-0'6x^2$; c'(x)=15-1'2x=0→x=15/1'2=12,5. Para comprobar que es un máximo realizamos la derivada segunda c''(x)=-1'2<0 por tanto es un máximo. Esto significa que la concentración de ozono ha seguido creciendo hasta 12'5 años después del 1 de enero de 1990, es decir hasta el 30 de junio de 2002.
La concentración máxima ha sido $c(12'5)=90+15.12,5-0'6.12'5^2=58'75$ microgramos por metro cúbico

7. Un comercio abre sus puertas a las 9 de la mañana, sin ningún cliente, y las cierra cuando se han marchado todos. La función que representa el número de clientes en función de las horas que lleva abierto es $c(h)=-h^2+8h$. El gasto por cliente decrece a medida que van pasando las horas desde la apertura y sigue la función g(h)=300-25h. a) ¿a qué hora se produce la mayor afluencia de clientes?
b) ¿Cuánto gasta el último cliente? C) ¿Cuándo hay mayor recaudación en la cuarta o en la quinta hora?

a) $c(h)=-h^2+8h$→ c'(h)=-2h+8=0→h=4; c''(h)=-2<0 por tanto en h=4 hay un máximo. Esto quiere decir que la mayor afluencia de clientes se produce a las 4 horas de abrir, es decir a las 13 horas.
b) Primero hemos de conocer a qué hora sale el último cliente para sustituir dicha hora en la función gasto. El último cliente saldrá cuando la función c(h) se haga cero: $-h^2+8h=0\rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ h = 8 \end{cases}$ cuando h=0, es decir a las 9 de la mañana el comercio acaba de abrir; cuando h=8 es decir a las 5 de la tarde el comercio cierra. A esa hora el gasto del último cliente será g(8)=300-25.8=100€ gasta el último cliente.
c) La recaudación a una hora determinada es el producto del número de clientes por lo que gasta cada uno R(h)=c(h).g(h) . En la cuarta hora $R(4)= c(4).g(4)=(-4^2+8.4).(300-25.4)=3200$€;
$R(5)= c(5).g(5)=(-5^2+8.5).(300-25.5)=2625$€ por lo que se recauda más en la cuarta hora

8. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?





Si colocamos la circunferencia en el origen de coordenadas:
En este caso el centro de la circunferencia estaría en el origen de coordenadas y por lo tanto la ecuación de ésta sería: $x^2+y^2=10^2$
Siendo *a* la distancia de la recta CD al origen, la ecuación sería: x=a

Necesitamos calcular las coordenadas de los puntos C y D, para después poder calcular el área de los triángulos. Para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ x=a \end{cases} \rightarrow y=\pm\sqrt{10^2-a^2} \rightarrow \begin{cases} c\left(a,\sqrt{10^2-a^2}\right) \\ d\left(a,-\sqrt{10^2-a^2}\right) \end{cases}$$

La distancia entre ellos es: $d(C,D)=\sqrt{(a-a)^2+\left(-\sqrt{10^2-a^2}-\sqrt{10^2-a^2}\right)^2}=2\sqrt{10^2-a^2}$

Así el área del triángulo ADC es: $A_{ADC}=\dfrac{\left(2\sqrt{10^2-a^2}\right)\cdot(10+a)}{2}=\sqrt{10^2-a^2}\cdot(10+a)$

Y la del triángulo BCD: $A_{BCD}=\dfrac{\left(2\sqrt{10^2-a^2}\right)\cdot(10-a)}{2}=\sqrt{10^2-a^2}\cdot(10-a)$

Por lo tanto la función que debemos maximizar sería:

$A(a)=\sqrt{10^2-a^2}\cdot(10+a)-\sqrt{10^2-a^2}\cdot(10-a)=\sqrt{10^2-a^2}\cdot(2a)$ Para calcular los máximos y mínimos hacemos la primera derivada:

$$A'(a)=\frac{-2a}{2\sqrt{10^2-a^2}}\cdot 2a+\sqrt{10^2-a^2}\cdot 2=\frac{-2a^2}{\sqrt{10^2-a^2}}+2\sqrt{10^2-a^2}=$$

$$=\frac{-2a^2+2(10^2-a^2)}{\sqrt{10^2-a^2}}=\frac{-4a^2+200}{\sqrt{10^2-a^2}} \quad A'(a)=0 \Rightarrow \frac{-4a^2+200}{\sqrt{10^2-a^2}}=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{50}$$

La solución negativa no nos sirve, porque una distancia no puede ser negativa. Para comprobar si la otra maximiza o minimiza la función:

$$A''(a)=\frac{(-8a)\cdot\sqrt{10^2-a^2}-(-4a^2+200)\cdot\dfrac{-2a}{2\sqrt{10^2-a^2}}}{10^2-a^2}$$

Operando queda: $A''(a)=\dfrac{4a^3-600a}{\sqrt{(10^2-a^2)^3}}$

Para comprobar si el valor de a obtenido es máximo, lo substituimos en la segunda derivada:

$A''\left(\sqrt{50}\right)=\dfrac{4\left(\sqrt{50}\right)^3-600\cdot\sqrt{50}}{\sqrt{\left(10^2-\left(\sqrt{50}\right)^2\right)^3}}=-8$ $\Rightarrow$ para $a=\sqrt{50}$ la función tiene un máximo

9. Queremos dividir un hilo metálico de 70 metros de longitud en tres partes, de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra y además que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte

Si dividimos el hilo en 3 partes y una tiene doble longitud que otra, es decir, una va a medir 2x y otra x. La que queda medirá 70-(x+2x)=70-3x. Con estas partes hacemos cuadrados, el área de éstos será:
$A(x)=x^2+(2x)^2+(70-3x)^2=14x^2-420x+4900$

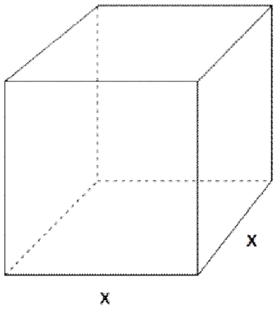
Calculamos los máximos y mínimos de la función. Para eso hacemos la primera derivada e igualamos a cero:
$A'(x)=28x-420=0 \rightarrow x=15$

El valor obtenido es un posible máximo o mínimo, para saber qué es, lo substituimos en la segunda derivada:
$A''(x)=28>0$. Entonces en x=15 hay un mínimo

Por lo tanto, los tres trozos de hilo medirán: $\begin{cases} x=15m \\ 2x=30m \\ 70-3x=25m \end{cases}$

9. Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con una capacidad de 80 dm^3. Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 €/dm^2 y para la base otro que cuesta 3 €/dm^2. Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

b) Para resolver este problema de optimización, debemos plantear una función que nos dé el coste de la caja. Esta función será: $C(x,y) = \underbrace{3x^2}_{base} + \underbrace{2x^2}_{tapa} + \underbrace{4 \cdot 2 \cdot xy}_{laterales} = 5x^2 + 8xy$



La función depende de dos variables, para ponerla solo en función de una, vamos a utilizar el dato del volumen de la caja:

$$V = A_{base} \cdot h \quad \Rightarrow \quad 80 = x^2 \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{80}{x^2}$$

Volvemos a la función del coste y sustituimos, obteniendo así el coste en función sólo de una variable:

$$C(x) = 5x^2 + 8x \cdot \frac{80}{x^2} = 5x^2 + \frac{640}{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{5x^3 + 640}{x}$$

Ahora tenemos que calcular los máximos y mínimos. Para eso hacemos la primera derivada e igualamos a cero:

$$C'(x) = \frac{15x^2 \cdot x - (5x^3 + 640) \cdot 1}{x^2} = \frac{15x^3 - 5x^3 - 640}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{10x^3 - 640}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{10x^3 - 640}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^3 - 640 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{64} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Una vez obtenido el punto crítico debemos saber si es un máximo o un mínimo, para eso vamos a hacer la segunda derivada:

$$C''(x) = \frac{30x^2 \cdot x^2 - (10x^3 - 640) \cdot 2x}{x^4} = \frac{30x^3 - 20x^3 + 1280}{x^3} \qquad C''(x) = \frac{10x^3 + 1280}{x^3}$$

Sustituimos el punto crítico en la segunda derivada:

$$C''(4) = \frac{10 \cdot 4^3 + 1280}{4^3} = 30 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ es mínimo}$$

Sabemos que para ese valor el coste de la caja es mínimo. Tan sólo nos queda calcular la altura:

$$y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{4^2} = 5$$

Las dimensiones de la caja para que el coste de esta sea mínimo son de 4 dm el lado de la base y 5 dm la altura.