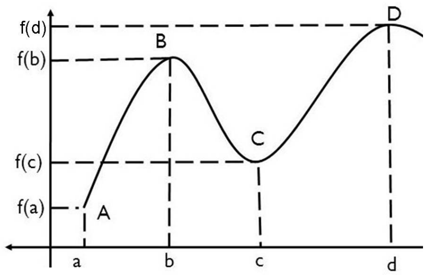
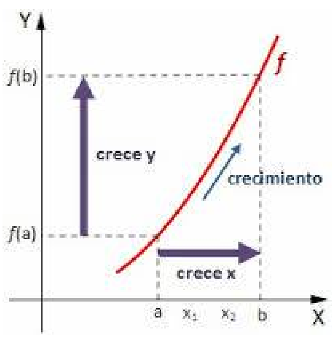
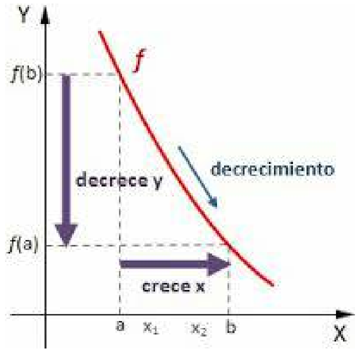
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva hemos ya visto la idea de crecimiento y decrecimiento de una función. Por ejemplo, la función de la figura adjunta es creciente en (a,b); decreciente en (b,c) y creciente de nuevo en (c,d). Pero, ¿cómo podemos dar una definición matemática de estos conceptos?



Observa en las siguientes gráficas:





En la primera se verifica que cuando x aumenta y también aumenta, es una función creciente. En la segunda cuando x crece y disminuye, es una función decreciente.

Definición: **Crecimiento en un intervalo (a,b)**

Se dice que una función y=f(x) es monótona creciente en un intervalo (a,b) si:

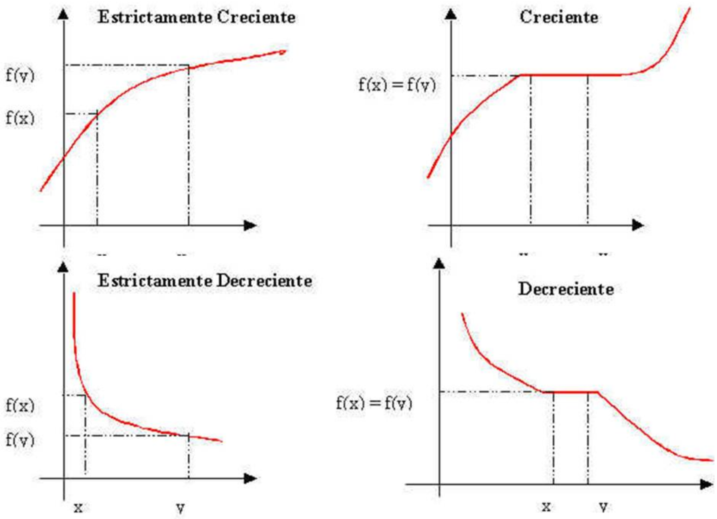
$\forall x, y \in (a,b), x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$

Se dice que una función y=f(x) es monótona decreciente en un intervalo (a,b) si:

$\forall x, y \in (a,b), x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$.

Si exigimos que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ *la función se llamará* ***estrictamente creciente.***

Si exigimos que $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ *la función se llamará* ***estrictamente decreciente***



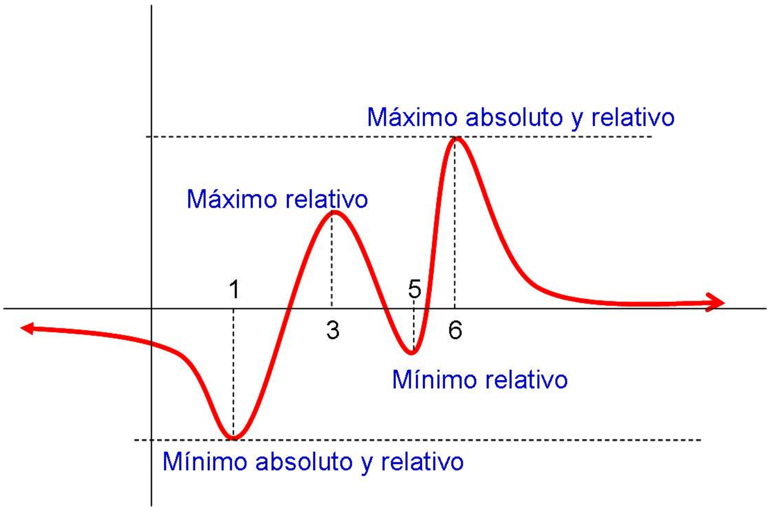
Definición*Diremos que una función es* ***creciente/decreciente en un punto x=x_0*** *de su dominio si lo es en algún entorno de dicho punto (x_0-h, x_0+h)*

MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN.

Intuitivamente un punto será un máximo absoluto (mínimo absoluto) de una función si su imagen es mayor o igual (menor o igual) que la de cualquier otro punto del dominio de la función. Hablaremos en cambio de máximos o mínimos relativos cuando su imagen es mayor, o menor, que todas las de su entorno cercano. .

Ejemplo 1

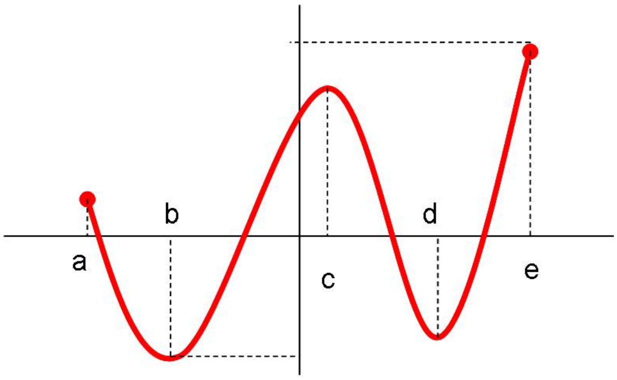
Obsérvese que en los máximos relativos la función es creciente antes del punto y decreciente después. En los mínimos relativos la función pasa de ser decreciente a ser creciente



Ejemplo 2

Observar en la gráfica que x=e es un máximo absoluto y, sin embargo no es un máximo relativo al no existir función a la derecha de ese punto; x=c es un máximo relativo pero no es absoluto.

x=b es un mínimo absoluto y relativo; x=d es solo un mínimo relativo.



De lo visto en los dos ejemplos anteriores deducimos que un punto puede ser un máximo o mínimo absoluto pero no relativo, relativo pero no absoluto, o ser ambas cosas a la vez.

Definiciones

Se dice que y=f(x) posee un ***máximo absoluto*** *en* $x=x_0$ *si* $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$

Se dice que y=f(x) posee un ***mínimo absoluto*** *en* $x=x_0$ *si* $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$

Se dice que y=f(x) posee un ***máximo relativo*** *en* $x=x_0$ *si existe un entorno de* x_0 (x_0-h,x_0+h) *tal que* $\forall x \in (x_0-h, x_0+h)\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) > f(x)$

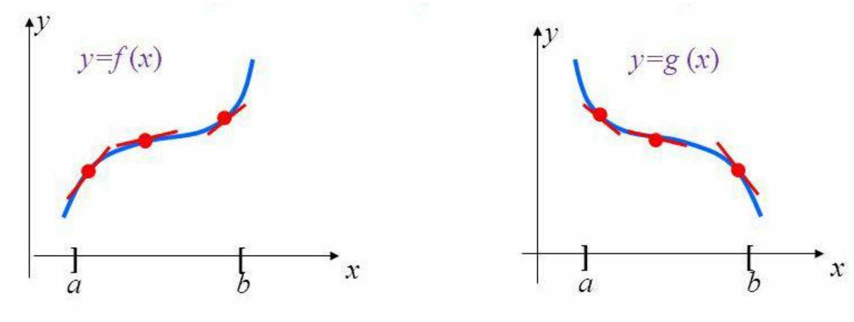
Se dice que y=f(x) posee un ***mínimo relativo*** *en* $x=x_0$ *si existe un entorno de* x_0 (x_0-h,x_0+h) *tal que* $\forall x \in (x_0-h, x_0+h)\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Vamos a ver a continuación como podemos aplicar las derivadas para conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable y, también, para encontrar sus extremos relativos.

Teorema:

Sea f una función y sea x_0 un punto de su dominio, $\begin{cases} \text{Si } f'(x_0)>0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } x=x_0 \\ \text{Si } f'(x_0)<0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } x=x_0 \end{cases}$

(Pensemos que f '(x)=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si la función es creciente, los sucesivos cocientes $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, obtenidos al aproximarse h a cero, son positivos pues, de la definición de crecimiento se sigue que: si h>0 f(x+h)>f(x) y si h<0 f(x+h)<f(x). En consecuencia, el límite al que tienden esos cocientes, es decir la derivada, debe ser ≥ 0. Por el contrario, cuando la función es decreciente a un aumento positivo de las "x" le corresponde uno negativo de las "y", por lo que esos cocientes serán negativos y el límite ha de ser ≤ 0.)
En el siguiente gráfico puede observarse como, en la primera función, las rectas tangentes tienen pendiente positiva en todos sus puntos, la función es creciente. Las rectas tangentes de la segunda función tienen pendiente negativa en todos sus puntos, la función es decreciente.



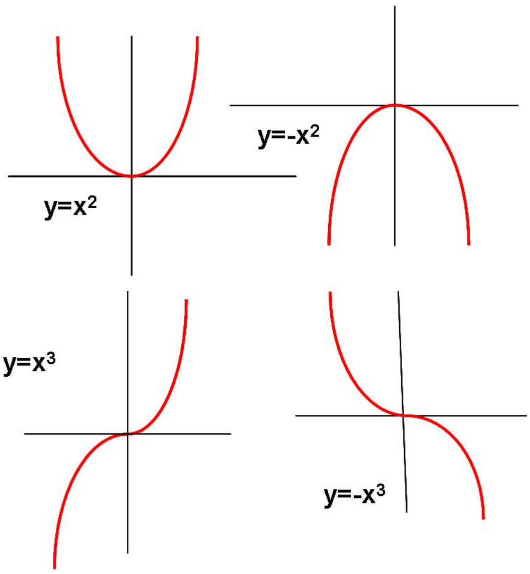
Nota:

El teorema no dice nada acerca del crecimiento de la función cuando la derivada es cero. De hecho, cuando la derivada es cero en un punto la función puede ser: creciente, decreciente, tener un máximo relativo o tener un mínimo relativo en ese punto

Ejemplo

Consideremos las funciones $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=x^3$ e $y=-x^3$, Sus derivadas son, respectivamente: $y=2x$; $y=-2x$, $y=3x^2$ e $y=-3x^2$.

En el punto x=0 la derivada de las cuatro funciones vale cero y sin embargo, como podemos observar en sus gráficas, en x=0 la primera tiene un mínimo relativo, la segunda un máximo, la tercera es creciente y la cuarta decreciente.



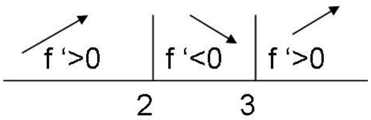
En todas ellas la recta tangente en x=0 es horizontal.

EJEMPLOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Ejemplo 1

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y=2x^3-15x^2+36x+8$

D=R; $y'=6x^2-30x+36$. Queremos saber donde es la derivada positiva y negativa, para ello calculamos los puntos en los que se hace cero y damos valores en los imtervalos en los que las raíces dividen a la recta real. $6x^2-30x+36=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$ Damos valores a y' obteniendo:



$(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ la función es creciente.

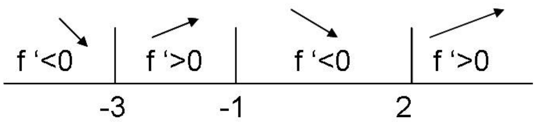
$(2,3)$ La función es decreciente

En x=2 posee un máximo relativo, en x=3 un mínimo relativo

Ejemplo 2

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=3x^4+8x^3-30x^2-72x+3$.

D=R; $y'=12x^3+24x^2-60x-72=0 \Rightarrow 12(x^3+2x^2-5x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$



$(-\infty,-3)\cup(-1,2)$ función decreciente

$(-3,1)\cup(2,\infty)$ función creciente

x=-3 y x=2 mínimos; x=-1 máximo

Ejemplo 3 Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=\frac{1}{1+x^2}$

D=R; $y'=\frac{-2x}{(1+x)^2}$ El denomindor es positivo por estar elevado al cuadrado, luego el signo depende únicamente del numerador. $-2x=0 \Rightarrow x=0$; Dando valores e obtiene que f es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,\infty)$ En x=0 tiene un máximo relativo

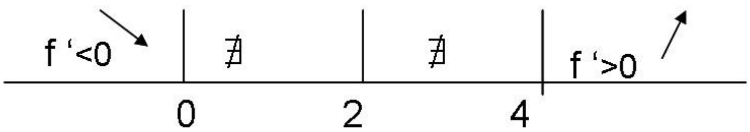
Ejemplo 4 Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=L(x^2-4x)$

D=$(-\infty,0)\cup(4,\infty)$; $y'=\frac{2x-4}{x^2-4x}$ El denominador es positivo en el dominio de la función, luego el signo depende del numerador (al dar valores, hay que tener en cuenta el dominio de la función ya que no es todo R) $2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$(-\infty,0)$ f decrece

$(0,\infty)$ f crece

No tiene extremos relativos



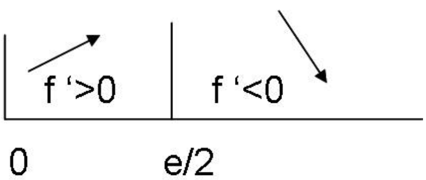
Ejemplo 5 Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=xe^{-x^2}$

D=R; $y'=e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$ Dado que el primer factor de ese producto es positivo, el signo depende solo del segundo factor. $1-2x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ Dando valores a y' so obtiene:

f decrece $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; f crece $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

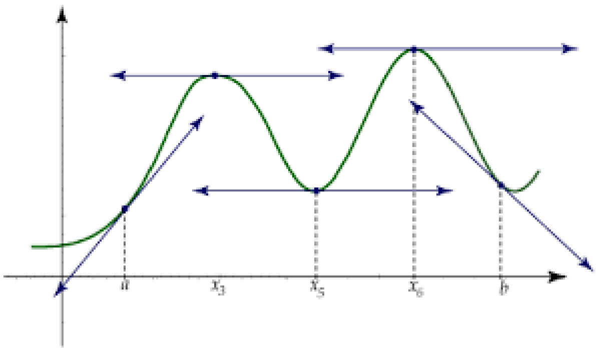
Ejemplo 6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y=\frac{L(2x)}{x}$

D=$(0,\infty)$; $y'=\frac{\frac{2}{2x}.x-L(2x)}{x^2}=\frac{1-L(2x)}{x^2}$ El signo depende del numerador al ser el denominador positivo. $1-L(2x)=0 \Rightarrow L(2x)=1 \Rightarrow 2x=e \Rightarrow x=e/2$. Damos valores teniendo en cuenta el dominio de f y obtenemos: f crece $(0,e/2)$ y decrece $(e/2,\infty)$. En $x=e/2$ tiene un máximo.



Ejemplo 7 . $y=sen^2x$. Al ser la función y=senx periódica, de período 2π, restrinjimos el estudio al intervalo $[0,2\pi)$. $y'=2senx.cosx=0 \Rightarrow \begin{cases} senx=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \end{cases} \\ \cos x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\pi/2 \\ x=3\pi/2 \end{cases} \end{cases}$ dando valores se obtiene: f '>0 en $(0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2)$, lo que significa que f crece; $f'<0$ en $(\pi/2,\pi)\cup(3\pi/2,2\pi)$ lo que significa que f decrece. x=0 y $x=\pi$ mínimos relativos; $x=\pi/2$ y $x=3\pi/2$ máximos relativos.

Teorema:
Sea f una función y x_0 un punto de su dominio. Si f posee en $x=x_0$ un extremo relativo y es derivable en dicho punto $\Rightarrow f'(x_0)=0$
(la derivada en un extremo no puede ser positiva, porque como hemos demostrado antes eso significaría que la función es creciente, y no puede tampoco ser negativa porque la función no es decreciente. Por tanto si existe ha de valer cero)



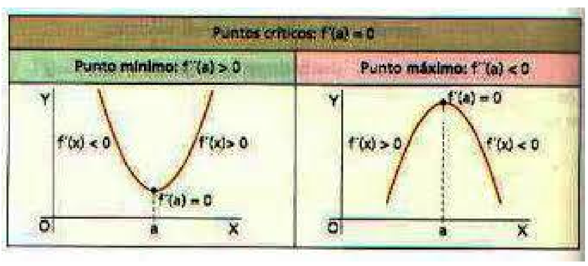
La interpretación geométrica de este teorema es que la recta tangente en los extremos relativos de una función, si existe, es horizontal.

Nota1: Si una función es derivable en todos sus puntos, el teorema anterior nos da una condición necesaria para la existencia de un extremo, pero no suficiente. Es decir, si $f'(x_0)\neq 0$ ese punto no es un extremo relativo, pero si $f'(x_0)=0$ el punto puede ser extremo o no serlo.
Nota 2: Los posibles extremos relativos de una función se encuentran entre los puntos cuya derivada es cero o entre los puntos en que la función no es derivable. Por ejemplo y=|x| tiene un mínimo relativo en x=0 y no es derivable en ese punto.

Teorema: Sea f una función y x_0 un punto de su dominio, se verifica que:

$$\begin{cases} \text{Si } f'(x_0)=0 \text{ y } f''(x_0)<0 \Rightarrow x=x_0 \text{ es un máximo relativo} \\ \text{Si } f'(x_0)=0 \text{ y } f''(x_0)>0 \Rightarrow x=x_0 \text{ es un mínimo relativo} \end{cases}$$

Como podemos ver en la gráfica, en un



mínimo relativo la derivada primera tiene el siguiente comportamiento: negativa antes del mínimo, cero en el mínimo y positiva después de él. Esto significa que f ' es una función creciente en un entorno del mínimo relativo. Dado que f '' es la derivada de f ', f ''>0⇒ que f ' es creciente y, en consecuencia que f posee un mínimo relativo. El mismo razonamiento podría hacerse para el máximo relativo: f ''<0⇒ que f ' es decreciente ⇒ hay un máximo relativo.

NOTA: Obsérvese que el teorema no dice nada si la derivada segunda también se hace cero

Por ejemplo: $y=x^4$ tiene un mínimo en x=0 y f '(0)=f ''(0)=0; $y=x^3$ es creciente en x=0 y f '(0)=f ''(0)=0. Por tanto, si las dos derivadas se anulan no podemos decidir si es o no un extremo

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x+18$ sin hallar previamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

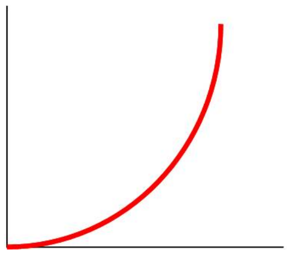
Dado que la función es derivable en todo R, al ser polinómica, sus extremos deben encontrarse entre los puntos en los que se anula la derivada. $y'=12x^3-24x^2-12x+24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$ Estos puntos serán los posibles extremos relativos de la función. Pasamos ahora a aplicar el criterio de la segunda derivada, evaluando si esta es positiva o negativa en dichos puntos.

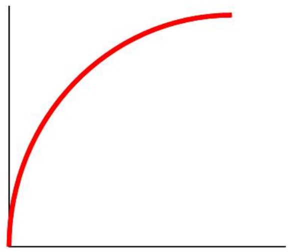
$y''=36x^2-48x-12$. f ''(-1)=72>0$\Rightarrow$x=-1 es un mínimo relativo; f ''(1)=-24<0$\Rightarrow$x=1 es un máximo relativo; f ''(2)=36>0$\Rightarrow$ x=2 es un mínimo relativo.

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA FUNCIÓN

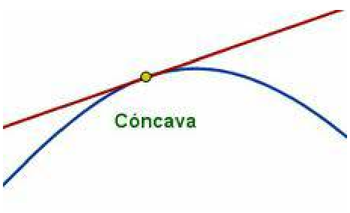
El crecimiento o decrecimiento de una función no siempre se produce con la misma rapidez, observa por ejemplo las dos gráficas que figuran a continuación e imagina que representan las ganancias, a lo largo de los meses, de dos empresas ¿ cuál de ellas crees que tendrá mayores beneficios a largo plazo?

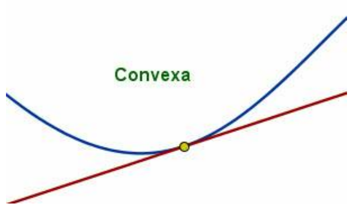
Aunque ambas funciones son crecientes, la primera tiene un ritmo creciente de crecimiento, mientras que la segunda crece con ritmo decreciente. Diremos que la primera tiene una curvatura convexa y que la segunda la tiene cóncava.





Para llegar a la definición matemática de función cóncava o convexa en un punto, vamos a analizar, en cada uno de los dos tipos de funciones, qué posición ocupa la recta tangente con respecto a la gráfica.



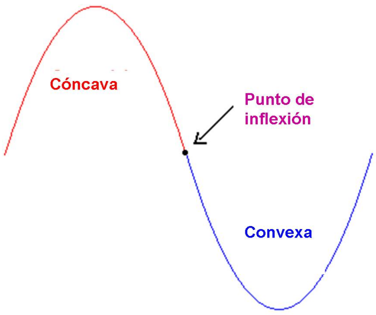


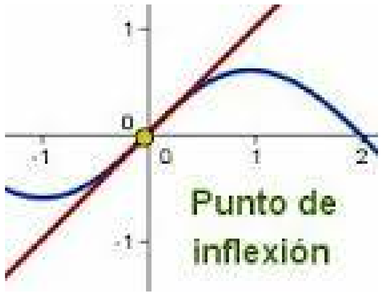
Como ves en las gráficas anteriores, en una función cóncava la recta tangente se sitúa por encima de la gráfica de la función, mientras que en una función cóncava la recta tangente se sitúa por debajo de la gráfica. Por lo tanto definimos:

Definición: *Diremos que una función es* ***cóncava (convexa)*** *en un punto $x=x_0$ de su dominio, si la recta tangente a la función en dicho punto está situada por encima (por debajo) de la gráfica de la función*

Definición: *Diremos que una función f es cóncava o convexa en un intervalo abiert (a,b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.*

Definición: *Diremos que una función posee un **punto de inflexión** en un punto $x=x_0$ de su dominio, si en dicho punto cambia la curvatura de la función pasando de convexa a cóncava o viceversa.*





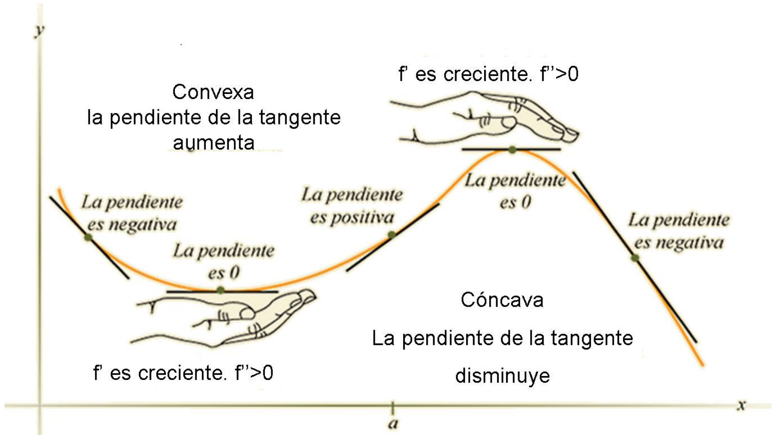
Como observamos en la gráfica anterior, en un punto de inflexión la recta tangente atraviesa la gráfica.

Veamos a continuación como podemos utilizar las derivadas para obtener los intervalos de curvatura de una función y, también, sus puntos de inflexión.

Teorema: Sea f una función y $x=x_0$ un punto de su dominio. Se verifica que:

$$\begin{cases} \text{Si } f''(x_0)>0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } x=x_0 \\ \text{Si } f''(x_0)<0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } x=x_0 \end{cases}$$

Vamos a analizarlo gráficamente.



Como se observa en la gráfica, en las funciones convexas la pendiente de la recta tangente aumenta, es decir f ‘ es una función creciente. Ahora bien, si f ‘’>0 ello implica que f ‘ es una función creciente (al ser f ‘’ la derivada de f ‘) Por tanto que la función es convexa.

De igual modo podríamos razonar para las funciones cóncavas.

Del teorema anterior se deduce que un punto de inflexión la derivada segunda, si existe, debe ser cero (puesto que no es ni cóncava ni convexa)

Teorema:

Sea f una función y $x=x_0$ un punto de su dominio en el que existe la derivada segunda. Si $x=x_0$ es un punto de inflexión $\Rightarrow f''(x_0)=0$.

NOTA: El teorema nos da una condición necesaria para la existencia de puntos de inflexión en funciones para las que la derivada segunda existe, pero no es una condición suficiente. Es decir, el hecho de que la derivada segunda se anule en un punto no garantiza que el punto sea de inflexión.

Teorema: Sea f una función y $x=x_0$ un punto de su dominio. Si $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow x=x_0$ es un punto de inflexión

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LOS INTERVALOS DE CURVATURA DE UNA FUNCIÓN.

Ejemplo1. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función $y=x^4-2x^3-12x^2+x+4$

D=R; $y'=4x^3-6x^2-24x+1$; $y''=12x^2-12x-24$. Hallamos los puntos en que se anula la segunda derivada valoramos su signo en cada uno de los subintervalos en los que dichos puntos dividen a la recta real.

$12x^2-12x-24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$ Convexa en $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

$\cup$	$\cap$	$\cup$
f ''>0	f ''<0	f ''>0
	-1	2

Cóncava en (-1,2); x=-1 y x=2 son puntos de inflexión

Ejemplo2. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

D= R-{2,-2}. $y'=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}$

$$y''=\frac{-2(x^2-4)^2+2x.2(x^2-4).2x}{(x^2-4)^4} \underset{(1)}{=} \frac{-2(x^2-4)+2x.2.2x}{(x^2-4)^3}=\frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}$$

(1)simplificamos el numerador y el denominador, dividiendo todos sus términos por x^2-4

El signo de ese cociente depende de los signos del numerador y del denominador, por tanto igualaremos ambos términos a cero y evaluaremos la derivada segunda en los subintervalos en los que queda dividida la recta real por las raíces de numerador y denominador.

En nuestro caso el numerador no se anula: $6x^2+8=0 \Rightarrow 6x^2=-8$, no tiene solución. El denominador se anula en x=2 y en x=-2. Valorando la derivada segunda en los subintervalos obtenidos llegamos a la siguiente conclusión: Convexa en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

Cóncava en (-2,2). No tiene puntos de inflexión ya que x=2 y x=-2 no pertenecen al dominio

Ejemplo 3: Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función $y=e^x(x-3)$

D=R; $y'=e^x(x-3)+e^x=e^x(x-3+1)=e^x(x-2)$; $y''=e^x(x-2)+e^x=e^x(x-1)$

Dado que el primer factor de ese producto, e^x, es positivo para cualquier número real, el signo depende del segundo factor. $x-1=0 \Rightarrow x=1$ y evaluando la derivada segunda en los subintervalos obtenidos concluimos: cóncava en $(-\infty,1)$; convexa en $(1,\infty)$; x=1 pto de inflexión.

Ejemplo 4. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función $y=e^x-x^2$

D=R; $y'=e^x-2x$; $y''=e^x-2=0 \Rightarrow e^x=2 \Rightarrow$(aplicando logarítmos) x=L2. Valorando el signo de la derivada segunda antes y después de L2 obtenemos: cóncava en $(-\infty,L2)$; convexa en $(L2,\infty)$

Ejemplo 5. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de la función y=senx+cosx

Restringimos el estudio al intervalo $[0,2\pi)$; y'=cosx-senx; y''=-senx-cosx=0⇒senx=-cosx⇒

$\Rightarrow \begin{cases} x=\pi/4 \\ x=7\pi/4 \end{cases}$ Evaluando el signo de la derivada segunda o$\begin{cases} (0,3\pi/4)\cup(7\pi/4,2\pi) \text{ cóncava} \\ (3\pi/4,7\pi/4) \text{ convexa} \end{cases}$

$x=3\pi/4$ y x=4 son puntos de inflexión. En x=0 es cóncava (se obtiene viendo qué ocurre antes y después)

Ejemplo 6. Dada la función $y=ax^4+bx^3+cx+d$, calcula a,b,c,d sabiendo que la función tiene un máximo en el punto (0,6); un mínimo en x=-1 y la recta tamgente en x=1 es paralela a y=-24x+2

Dado que tenemos 4 incógnitas hemos de encontrar 4 ecuaciones. Que el punto (0,6) sea un máximo significa: que f(0)=6 y f '(0)=0; que x=-1 sea un mínimo implica que f '(-1)=0; que la recta tangente en x=1 sea paralela a y=-24x+3 implica que f '(1)=-24. $y'=4ax^3+3bx^2+c$. Entonces:

$\begin{cases} f(0)=6 \Rightarrow d=6 \\ f'(0)=9 \Rightarrow c=0 \\ f'(-1)=0 \Rightarrow -4a+3b+c=0 \\ f'(1)=-24 \Rightarrow 4a+3b=-24 \end{cases}$ Resolviendo obtenemos: d=6, c=0, b= -4 y a=3

Ejemplo 7: Hallar la recta tangente a $y=x^3+6x^2+5$ en su punto de inflexión.

En primer lugar hemos de hallar su punto de inflexión, punto en el que f''(x)=0 y f'''(x)$\neq 0$ $y'=3x^2+12x$; $y''=6x+12=0 \Rightarrow$ x=-2, único punto que podría ser de inflexión, f'''(x)=6, por tanto f'''(-2)≠0. En consecuencia x=-2 es el punto de inflexión y hemos de hallar la recta tangente en dicho punnto: $x_0=-2$; $y_0=f(-2)=-8+24+5=21$; m=f '(-2)=12-24=-12

Recta tangente: $m(x-x_0)=y-y_0 \Rightarrow -12(x+2)=y-21$

EJERCICIOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO, CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

A)Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

1. $y=x^4-2x^2+2$; 2. $y=\frac{x^2}{x-2}$; 3. $y=-x^3-3x^2-3x+2$; 4. $y=x^4-5x^2+3$; 5. $y=x^3(x-4)^2$

6. $y=\frac{4}{x^2-6x+5}$; 7. y=cosx-senx; 8. y=senx.cosx; 9. y=-cosx-senx; 10. $y=\frac{20}{x^2+4}$; 11. $y=\frac{3x}{x^2+4}$

12. $y=\frac{3x^2}{x^2+2}$; 13. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; 14. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; 15. $y=\frac{x}{Lx}$; 16. $y=\frac{e^x}{x}$; 17. y= ctgx; 18. $y=\cos^2x$

19. $y=xe^x$ 20. $y=xe^{-x^2}$; 21. y=cos(2x); 22. $y=\sqrt{25-x^2}$; 23 $y=|x^2-6x+5|$; 24. y=x.Lx

25. $y=\frac{x}{x^2+4}$

26.Si la función y=f(x) es creciente y derivable en todo R ¿puede ser f‘ (x)=0 en algún punto? ¿Puede ser f ‘(x)<0 en algún punto? Razona las respuestas.

27. Dar un ejemplo de una función que tenga infinitos máximos y mínimos relativos

28. ¿Qué diferencia existe entre los conceptos de extremo relativo y absoluto?. Pon un ejemplo gráfico que aclare la contestación

29. Determina las condiciones que deben cumplir a,b y c para que la función $y=ax^3+bx+c$ sea a) estrictamente creciente en todo R; b) estrictamente decreciente en R.

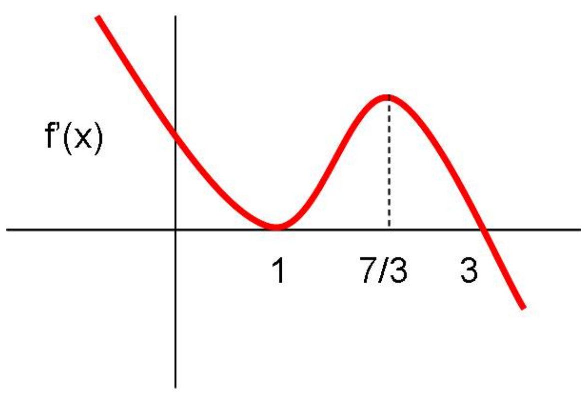
30. Verdadero o falso: Sea f una función continua en [a,b] y sea c perteneciente a (a,b) tal que f ‘(c)=0, entonces c es un máximo o un mínimo relativo de la función.

31.Verdadero o falso: a) Si una función es creciente en un punto, entonces su derivada es positiva en dicho punto; b) Si una función tiene derivada positiva en un punto, entonces es creciente en ese punto.

32. Una función f es tal que f ‘(a)=0 ¿qué puede afirmarse del comportamiento de la función en ese punto?

33. Si la derivada de una función es negativa en el punto x=2 ¿Cuál es el signo de f(2+h)-f(2) según los valores de h cuando h tiende a cero?

34. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función f(x), ¿qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función? ¿ y de los puntos de inflexión? Razonar la respuesta



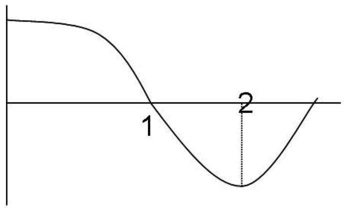
B) Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

1. $y=x^4-4x^2$; 2. $y=4x^3-5x+1$; 3. $y=|x^2+2x-3|$; 4. $y=|x^2-2|$; 5. $y=x^2-|x|-2$; 6. $y=\frac{x-1}{x+1}$

7. $y=\frac{x^2-1}{x}$; 8. $y=\frac{1}{x^2-1}$; 9. $\frac{x^3}{2x^2-8}$; 10. $y=\begin{cases} \frac{x}{Lx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$; 11. $y=e^x(x-1)$; 12. $y=xe^{-x^2}$

13. $y=\frac{e^x}{x}$; 14. y=senx+cosx; 15. $y=\text{sen}^2x$

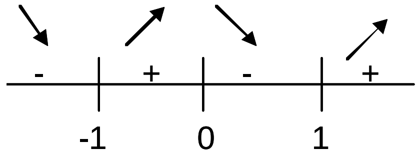
16. Si la función =f(x) tiene derivadas primera y segunda en un punto a y son ambas igual a cero ¿puede presentar en dicho punto un extremo relativo? ¿Y un punto de inflexión?. En caso negativo razona la respuesta, en caso afirmativo pon un ejemplo.
17. Explica la razón por la que la gráfica de una función polinómica de segundo grado es siempre cóncava o convexa. ¿ cómo se caracteriza en cada uno de los dos casos?
18. ¿Por qué toda función polinómica de tercer grado tiene siempre un punto de inflexión? ¿Podríamos garantizar lo mismo para todas las funciones de cuarto grado?. Razona las respuestas.
19. Da un ejemplo de una función que tenga infinitos puntos de inflexión.
20. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-6x^2+16x-11$ en su punto de inflexión
21. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$. Hallar a y b de forma que la curva tenga en x=1 una inflexión horizontal.
22. En la figura se representa la gráfica f ‘ de la derivada de una función f. A partir de ella determinar si f posee extremos relativos o puntos de imflexión en los puntos x=1 y x=2



23. Se considera la función $y=ax^2+bx+c$. Determinar las constantes a,b y c para que: Pase por el punto (0,-3); la tangente a la gráfica en x=0 sea paralela a la recta y=2x; alcance un máximo en x=1. Para esos valores de las constantes representa la gráfica de g(x)=|f(x)|

SOLUCIÓN EJERCICIOS CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

1.y=x^4-2x^2+2; D=R y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

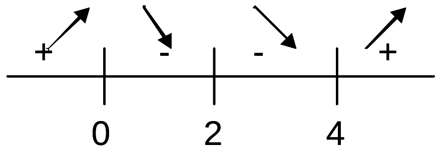


$(-\infty,-1)\cup(0,1)$ decrece; (-1,0)$\cup(1,\infty)$ crece

x=-1 mínimo; x=0 máximo; x=1 mínimo

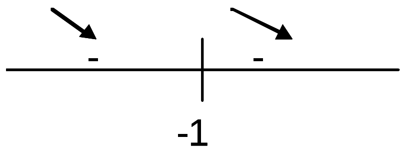
2. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; D=R-{2} y'=$\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ El denominador es >0

numerador x^2-4x=0$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$



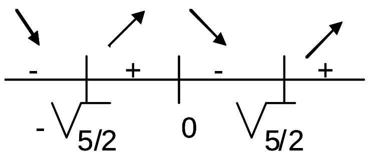
Creciente $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ Decreciente (0,4)-{2} x=0 máximo, x=4 mínimo

3. y=-x^3-3x^2-3x+2. ; D=R y'=-3x^2-6x-3=0$\Rightarrow$ $\{x=-1$



Decrece en $(-\infty,\infty)$. No tiene extremos

4. y=x^4-5x^2+3; D=R y'=4x^3-10x=x(4x^2-10)=0$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

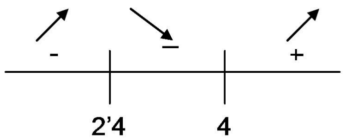


Crece $(-\sqrt{5/2},0)\cup(\sqrt{5/2},\infty)$; decrece (-∞,-$\sqrt{5/2}$)$\cup$(0, $\sqrt{5/2}$);
x=-$\sqrt{5/2}$ mínimo; x=$\sqrt{5/2}$ mínimo ; x=0 máximo

5.y=x^3(x-4)^2; D=R; y'=5x^4-32x^3+48x^2=x^2(5x^2-32x+48); x^2 >0;

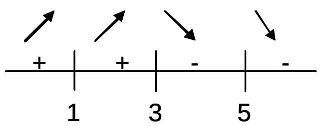
5x^2-32x+48=0 $\Rightarrow \begin{cases} x=2'4 \\ x=4 \end{cases}$

Creciente $(-\infty,2'4)\cup(4,\infty)$
Decreciente (2'4,4), x=2'4 máximo x=4 mínimo



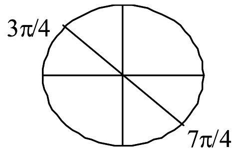
6.y=$\dfrac{4}{x^2-6x+5}$; x^2-6x+5=0$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$ $\Rightarrow$D=R-{1,5}; y=$\dfrac{-4(2x-6)}{(x^2-6x+5)^2}=\frac{-8x+24}{(x^2-6x+5)^2}$;

-8x+24=0$\Rightarrow$x=3
Creciente$(-\infty,1)\cup(1,3)$; decreciente (3,5)$\cup(5,\infty)$
x=3 máximo

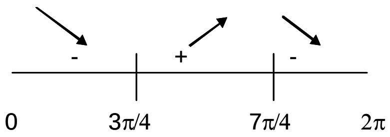


7.y=cosx-senx. Restrigimos el estudio al intervalo $[0,2\pi)$, al ser una función periódica de período π.

y'=-senx-cosx=0⇒ -senx=cosx⇒ $\begin{cases} x = 3\pi/4 \\ x = 7\pi/4 \end{cases}$



Dando valores se obtiene:

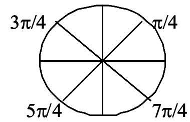


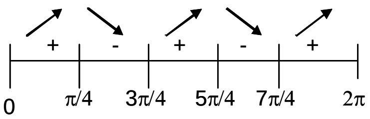
f creciente$(3\pi/4, 7\pi/4)$, f decrec. $(0,3\pi/4)\cup(7\pi/4, 2\pi)$
x=$3\pi/4$ mínimo; x=$7\pi/4$ máx X=.

En x=0 la función es decreciente dado que decrece antes y después de dicho punto.

8. y=senx.cosx. Dado que la función esperiódica de período 2π restrigimos su estudio al intervalo $[0,2\pi)$

y'=$\cos^2$x-sen^2x=0⇒ sen^2x=$\cos^2$x⇒ $\{x = \pi/4$, x=$3\pi/4$, x=$5\pi/4$,x=$7\pi/4$
y dando valores a los intervalos que determinan esas raíces se obtiene:

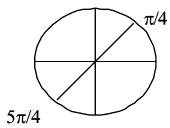


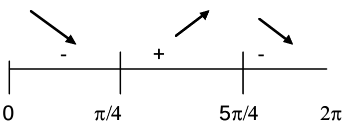


f crece $(0,\pi/4)\cup(3\pi/4,5\pi/4)\cup(7\pi/4, 2\pi)$
f decrece $(\pi/4, 3\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4)$
x=$\pi/4$ y x=$5\pi/4$ máximos; x=$3\pi/4$ y x=$7\pi/4$ mínim.

En x=0 la función es creciente por serlo antes y después de dicho punto.

9.y=-cosx-senx. Dado que la función esperiódica de período 2π restrigimos su estudio al intervalo $[0,2\pi)$
y'=senx-cosx=0⇒senx=cosx⇒ $\{x = \pi/4$, x=$5\pi/4$
Dando valores a los intervalos determinados por las raíces obtenemos:

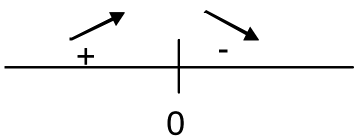




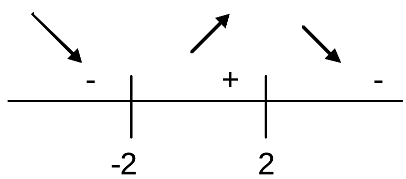
f crece $(\pi/4, 5\pi/4)$
f decrece $(0, \pi/4)\cup(5\pi/4, 2\pi)$
x=$\pi/4$ mínimo; x=$5\pi/4$ máximo
En x=0 la función decrece por hacerlo antes y después de dicho punto.

10. y=$\dfrac{20}{x^2+4}$. X^2+4=0 no tiene solución, por lo que D=R

$y' = \dfrac{-40x}{(x^2+4)^2}$; -40x=0, x=0
Creciente $(-\infty, 0)$; decreciente $(0,\infty)$
X=0 máximo



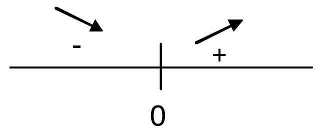
11. y=$\dfrac{3x}{x^2+4}$; D=R. y'=$\dfrac{3(x^2+4)-3x.2x}{(x^2+4)^2}$ =
=$\dfrac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$; -3$x^2+12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.
Crece (-2,2); decrece $-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
x=-2 mínimo, x=2 máximo



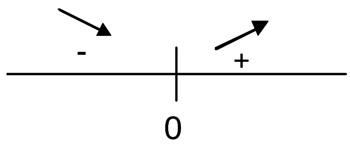
12. y=$\frac{3x^2}{x^2+2}$; $x^2+2=0$ no tiene solución $\Rightarrow$ D=R

y'=$\frac{6x(x^2+2)-3x^2.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{12x}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$

Creciente $(0,\infty)$; decreciente $(-\infty,0)$; x=0 mínimo



13. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. D=R; y'=$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$



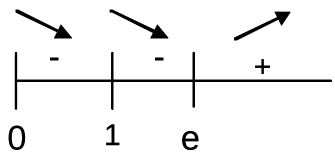
Dando valores a y' se obtiene:
F creciente $(0,\infty)$; f decreciente $(-\infty,0)$; x=0 mínimo

14. y=$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; D=R; y'=$\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ $\forall x\in R$ por ser suma de dos números positivos.
Por tanto f es creciente en $(-\infty,\infty)$

15.y=$\frac{x}{Lx}$; Para hacer el dominio hay que tener en cuenta que Lx solo existe si x>0 y que al estar en el denominador no puede ser igual a cero, Lx=0$\Rightarrow$ x=1$\Rightarrow$ D=$(0,\infty)$-{1}

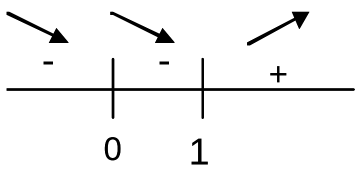
y'=$\frac{Lx-x.\frac{1}{x}}{(Lx)^2} = \frac{Lx-1}{(Lx)^2} = 0 \Rightarrow Lx = 1 \Rightarrow x = e.$

$(0,1)\cup(1,e)$ decrece; (e,∞) crece. En x=e mínimo



16. y=$\frac{e^x}{x}$ D=R-{0}; y'=$\frac{e^x.x-e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

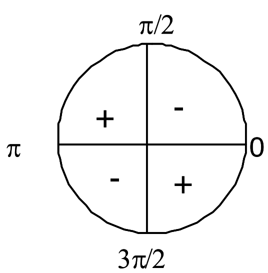
El signo de la derivada depende del factor (x-1) ya que tanto e^x como x^2 son positivos.



f decreciente $(-\infty,0)\cup(0,1)$; f creciente $(1,\infty)$
En x=1 mínimo.

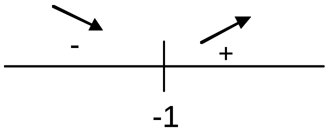
17. y=ctgx; D=R-{$k\pi$/k$\in Z$}
y'=-(1+ctg^{2}x)<0 en todo su dominio. Por tanto la función es decreciente en su dominio

18. Y=cos^{2}x. Dado que la función esperiódica de período 2π restrigimos su estudio al intervalo $[0,2\pi)$. y'=-2cosx.senx=0 $\Rightarrow$ {$x=0$, x=π/2, x=π, x=3π/2}Y'=-2cosx.senx=0.
Dando valores en los inervalos determinados por las raíces obtenemos:

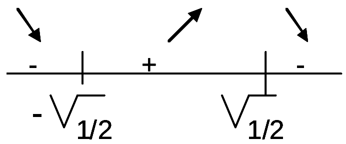


f creciente $(\pi/2,\pi)\cup(3\pi/2,2\pi)$;
f dereciente $(0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2)$
x=0 máximo, x=π/2 mínimo, x=π máximo,
x=3π/2 mínimo

19. y=x.e^x. D=R; y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)=0⇒x=-1. El signo de la derivada depende del factor (x+1) ya que e^x es positivo.
f decrece $(-\infty,-1)$, f crece (-1,∞), en x=-1mínimo.

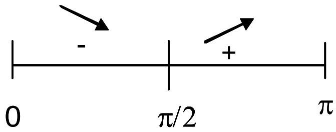


20. y=xe^{-x^2}.D=R;
y'=$e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



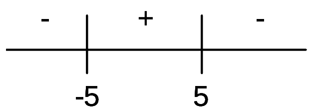
f creciente $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$;
f decreciente $(-\infty, \sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$
x=$-\sqrt{\frac{1}{2}}$ mínimo; x=$\sqrt{\frac{1}{2}}$ máximo

21.y=cos 2x. Restrigimos su estudio al intervalo [0,π) ya que la función es periódica de período π. Y'=-2sen2x=0⇒ $\begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x=\pi \Rightarrow x=\pi/2 \end{cases}$ Dando valores:



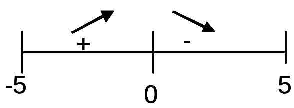
f decreciente (0,π/2); f creciente (π/2,π)
En x=π/2 mínimo.

22. y=$\sqrt{25-x^2}$ Para que la raíz exista es necesario que 25-x^2≥ 0; 25-x^2=0⇒ $x=\pm 5$



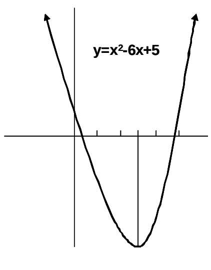
Dando valores se ve que 25-x^2≥ 0 en [-5,5]. Ese es por lo tanto el dominio de la función.

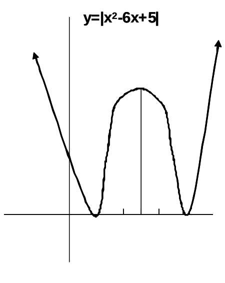
y'=$\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=0 \Rightarrow x=0$ Dando valores en el dominio de la función obtenemos:



f crece (-5,0), decrece (0,5). En x=0 máximo.

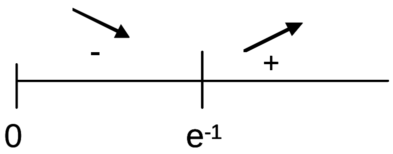
23.y=|x^2-6x+5|. D=R, Podemos deducir el crecimiento y decrecimiento a partir de su gráfica ya que esta es conocida. X^2-6x+5=0⇒ {x=1, x=5}; vértice x=$\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3$;
f(3)=-4⇒F(3)=-4F(3)=-4 vértice (3,-4). Así pues las gráficas de la función y=x^2-6x+5 y de su valor absoluto son las siguientes:





Por tanto f decrece $(-\infty,1)\cup(3,5)$
f crece (1,3)∪$(5,\infty)$
x=1 y x=5 mínimos; x=3 máximo

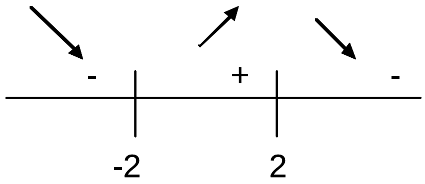
24. y=xLx. D=(0,∞); y'=Lx+x.1/x=Lx+1=0⇒Lx=-1⇒x=e^{-1}



f crece (e^{-1},∞), f decrece (0,e^{-1});
x=e^{-1} mínimo.

25. $y=\frac{x}{x^2+4}$ x^2+4=0 no tiene solución, por tanto D=R

y'=$\frac{x^2+4-x.2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow -x^2+4=0\Rightarrow x=\pm 2$



f crece (-2,2), f decrece $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$
x=-2 mínimo, x=2 máximo.

26. Si f(x) es creciente y derivable en R f '(x)≥ 0 ∀x∈ R. Por lo tanto f '(x) no puede ser negativa pero si igual a cero. Por ejemplo: la función y=x^3 es creciente en R, sin embargo f '(0)=0 al ser y'=3x^2

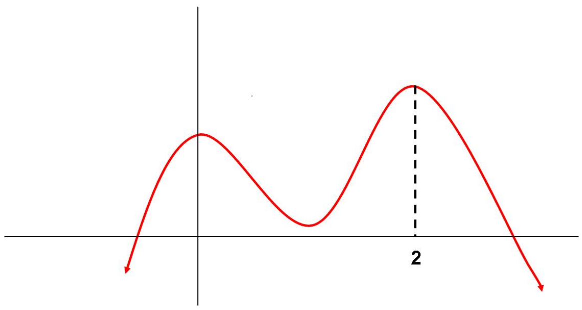
27. La función y=senx tiene un máximo relativo en x=π/ 2 y un mínimo relativo en x=3π/2. Al ser periódica de período 2π los puntos x=$\pi/2+2k\pi$ serán máximos ∀k∈ Z y los puntos x=$3\pi/2+2k\pi$ serán mínimos ∀k∈ Z por lo tanto tiene infinitos máximos y mínimos relativos.

28. Por definición x=x_0 es un extremo relativo si:

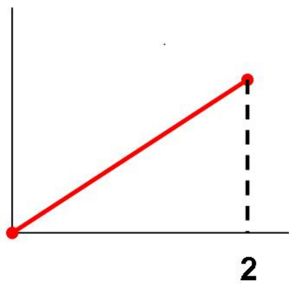
$$\exists\ Ex_0 \text{ tq } \forall x\in Ex_0\ x\neq x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)>f(x_0) \text{ (mínimo)} \\ f(x)<f(x_0) \text{ (máximo)} \end{cases}$$

Sin embargo, x=x_0 es un extremo absoltuto si $\forall x \in$D(f)$\begin{cases} f(x)>f(x_0) \text{ (mínimo absoluto)} \\ f(x)<f(x_0) \text{ (máximo absoluto)} \end{cases}$

Por ejemplo: en la función representada en la gráfica x=0 es un máximo relativo pero no absoluto; x=2 es un máximo absoluto y relativo



En la siguiente gráfica x=2 es un máximo absoluto pero no relativo



29. $y=ax^3+bx+c$; $y'=3ax^2+b$ La derivada es una función polinómica de 2º grado cuya gráfica es una parábola con vértice en el eje de ordenadas. Para que f sea creciente en R es necesario que f '(x) $\geq 0 \forall x \in R$ En consecuencia la parábola ha de ir hacia arriba$\Rightarrow a > 0$ y no tener raíces o tener como máximo una en su vértice $\Rightarrow b \geq 0$ ya que b=f(0) será la altura de su vértice.
Para que f sea decreciente f '(x)$\leq 0 \forall x \in R$ lo que, siguiendo el mismo razonamiento, implica que a<0 y b$\leq$ 0
En cuanto a c puede tener cualqyier valor ya que, como hemos visto, no interviene en la derivada y por tanto no influye en el crecimiento o decrecimiento de la función.

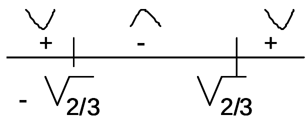
30. Falso, si f '(c)=0 en x=c la función puede ser creciente, decreciente o tener un extremo relativo. Por ejemplo la función $y=x^2$ tiene un mínimo relativo en x=0 y f'(0)=0; la función $y=-x^2$ tiene un máximo en x=0 y f '(0)=0; la función $y=x^3$ es creciente en R y por tanto creciente en x=0 y f '(0)=0; Por ultimo, la función $y=-x^3$ es decreciente en todo R y por lo tanto en x=0 y f '(0)=0
31. a) Falso, si f es creciente en $x=x_0$ la derivada en dicho punto puede no existir, ser cero o ser positiva. Serviría como ejemplo la función $y=x^3$ vista en el ejemplo anterior
b) Verdadero (ver teoría)

32. Si f '(a)=0 no podemos afirmar nada del comportamiento de la función en x=a, pudiendo ocurrir que la función en x=a sea creciente, decreciente o posea un extremo relativo. Ver ejemplos del ejercicio 30.
33. Sabemos que f '(2)<0, es decir $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} < 0 \Rightarrow$ que f(2+h)-f(2) y h deben tener distinto signo. Por tanto si h<0$\Rightarrow$f(2+h)-f(2)>0; si h>0 $\Rightarrow$f(2+h)-f(2)<0.

34. Los posibles extremos relativos están entre los puntos cuya derivada sea igual a cero, en nuestro caso esos puntos son x=1 y x=3. Sin embargo, el hecho de que f '(x)=0 no garantiza la existencia de extremo. Analicemos la función derivada en un entorno de dichos puntos:
Para x=1 observamos que podemos encontrar un entorno (1-h,1+h) tal que si x pertenece a dicho entorno y x=1 $\Rightarrow$ f '(x)>0, por lo que f es creciente. Esto significa que f es creciente en x=1, por tanto no tiene extremos relativos en dicho punto.
Para x=3 observamos que si tomamos un entorno (3-h,3+h) , a la izquierda de x=3 la derivada es positiva y por lo tanto f es creciente, sin embargo a la derecha de x=3 la derivada es negativa, esto es f es decreciente. En consecuenncia en x=3 hay un máximo relativo.
En cuanto a los puntos de inflexión se encontrarán entre los puntos cuya segunda derivada es cero. En x=7/3 y en x=1 f ' tiene recta tangente horizontal y por tanto f ''(7/3)=0 y
f ''(1)=0, por lo que ambos pueden ser puntos de inflexión. Para garantizarlo estudiamos la función en un entorno de dichos puntos. Vemos que a la izquierda de x=1 la derivada es decreciente, por tanto f es cóncava; mientras que a la derecha de x=1 la derivada es creciente, por lo que f es convexa. En x=1 hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir x=1 es un punto de inflexión. En cuanto a x=7/3, vemos que a la izquierda de x=7/3 la derivada es creciente, por tanto f es convexa; mientras que a la derecha de x=7/3 la derivada es decreciente, por lo que f es cóncava. En x=7/3 hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir x=7/3 es también un punto de inflexión.

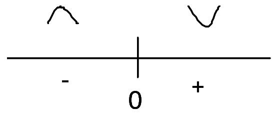
SOLUCIÓN EJERCICIOS CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

1.y=x^4-4x^2; D=R; y'=$4x^3-8x$; y"=$12x^2-8=0 \Rightarrow x^2=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$; x=$\pm\sqrt{2/3}$

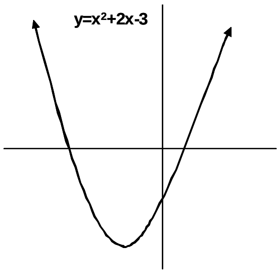


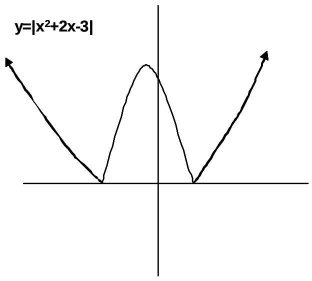
Cónva $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$; convexa $(-\infty,-\sqrt{2/3})\cup(\sqrt{2/3},\infty)$
En $x=-\sqrt{2/3}$ y en x=$\sqrt{2/3}$ puntos de inflexión.

2.y=$4x^3$-5x+1 ; D=R; y'=$12x^2$-5 ; y''=24x =0$\Rightarrow$x=0
Cóncava $(-\infty, 0)$; convexa $(0,\infty)$; x=0 punto de inflexión.



3. y=|x^2+2x-3| Lo hacemos a partir de su gráfica por ser conocida. x^2+2x-3=0$\Rightarrow \{x=-3, x=1\}$
x^2+2x-3=0; vértice =$\frac{-b}{2a}=-1; f(-1)=-4$. Vértice (-1,-4)





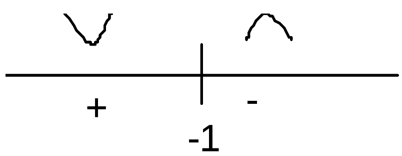
Estas son las gráficas de las funciones y=x^2+2x-3 y la de su valor absolluto construida a partir de ella. Como podemos ver ésta es convexa $(--\infty,-3)\cup(1,\infty)$ y cóncava (-3,-1)
x=-3 y x=-1 ptos de inflexión

4.y=|x^2-2| se hace igual que el Anterior. $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ convexa .$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ cóncava.
X=$-\sqrt{2}$ y x=$\sqrt{2}$ puntos de inflexión

5.y=x^2-|x|-2=$\begin{cases} x^2+x-2 \text{ si } x<0 \\ x^2-x-2 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$; y'=$\begin{cases} 2x+1 \text{ si } x<0 \\ 2x-1 \text{ si } x>0\end{cases}$; y"=$\begin{cases} 2 \text{ si } x<0 \\ 2 \text{ si } x>0\end{cases}$ La función no es deivable en x=0. En los restantes puntos la derivada segunda es positiva y por lo tanto la función es convexa. En x=0 también es convexa por serlo antes y después de este punto. En consecuencia f es convexa en R.

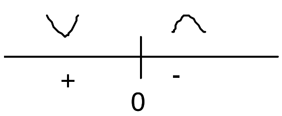
6.y=$\frac{x-1}{x+1}$; D=R-{-1}; y'=$\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$. y"=$\frac{-2.2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$

El numerador es negativo. El denominador es positivo si x>-1 y negativo si x>-1. Por tanto, el signo de y'' es el de la figura adjunta
:f es convexa $(-\infty,-1)$ y cóncava $(1,\infty)$
No tiene puntos de inflexión.



Si miramos la derivada primera es siempre positiva por lo que f es creciente en su dominio.

7. y=$\frac{x^2-1}{x}$; D=R-{0}; y'=$\frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$; y"=$\frac{2x^3-(x^2+1)2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}$

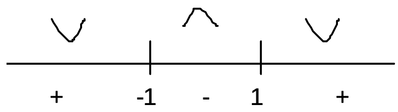


f es convexa en $(-\infty,0)$ y cónvava $(0,\infty)$
No tiene puntos de inflexión

y' es siempre positiva, luego f es creciente en su dominio

8.y=$\frac{1}{x^2-1}$; D=R-{-1,1}; y'=$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$; y''=$\frac{-2(x^2-1)^2+2x.2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}$ =

=$\frac{-2(x^2-1)+8x^2}{(x^{2-1})^3}$ = $\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$ El numerador es positivo luego el signo de y'' depende del signo del denominador. x^2-1=0⇒ $x=\pm 1$



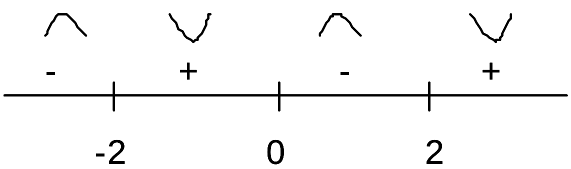
f convexa $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; (-1,1) cóncava
No tiene puntos de inflexión

Mirando y', el denominador es positivo y el numerador es positivo si x<0 y negativo si x>0, por lo que f es creciente $(-\infty,0)-\{-1\}$ y decreciente $(0,\infty)-\{1\}$. x=0 máximo

9.y=$\frac{x^3}{2x^2-8}$; $2x^2$-8=0⇒ $x=\pm 2\Rightarrow$ D=R-{-2,2}. y'=$\frac{3x^2(2x^2-8)-x^3 4x}{(2x^2-8)^2}$ = $\frac{2x^4-24x^2}{(2x^2-8)^2}$

y''=$\frac{(8x^3-48x)(2x^2-8)^2-(2x^4-24x^2)2(2x^2-8)4x}{(2x^2-8)^4}$ = $\frac{(8x^3-48x)(2x^2-8)-(2x^4-24x^2)8x}{(2x^2-8)^3}$ =

=$\frac{32x^3+384x}{(2x^2-8)^3}$ = $\frac{x(32x^2+384)}{(2x^2-8)^3}$ El factor ($32x^2$+384) es positivo por lo que el signo de y'' depende del signo de x y del signo de $2x^2$-8. Las raíces de esos dos polinomios son x=0, x=-2 y x=2. Dando valores en los intervalos a los que dan lugar esas raíces obtenemos.



f convexa (-2,0)$\cup(2,\infty)$.
f Cóncava $(-\infty,-2)\cup(0,2)$
x=0 punto de inflexión

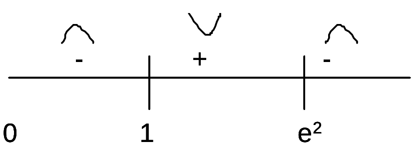
En cuanto al crecimiento y decrecimiento y'=$\frac{2x^4-24x^2}{(2x^2-8)^2}$ = $\frac{2x^2(x^2-12)}{(2x^2-8)^2}$ Tanto el denominador como $2x^2$ son positivos por lo que el signo depende del factor (x^2-12)
x^2-12=0⇒ $z=\pm\sqrt{12}$ y dando valores se obtiene: f creciente (-∞,-$\sqrt{12}$) $\cup$ ($\sqrt{12}$,∞) X2-12=0, f es decreciente en($-\sqrt{12}$. $\sqrt{12}$) $-\{-1,1\}$ En x=$-\sqrt{12}$ máximo y en x=$\sqrt{12}$ mínimo

10.y=$\begin{cases} \frac{x}{Lx} \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$ La única diferencia entre esta función e y=x/Lx es la imagen del cero.

Esto no influye en la concavidad y convexidad por lo que estudiamos esta en la función y=$\frac{x}{Lx}$; Para que exista el Lx ha de ser x positiva, pero ademas el denominador no puede ser cero Lx=0⇒ x=1. Por tanto D=[0,∞)$-\{1\}$

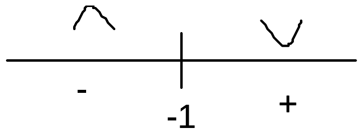
y'=$\frac{Lx-x\frac{1}{x}}{(Lx)^2}$ = $\frac{Lx-1}{(Lx)^2}$; y''=$\frac{\frac{1}{x}(Lx)^2-(Lx-1)2Lx\frac{1}{x}}{(Lx)^4}$ = $\frac{\frac{1}{x}Lx(Lx-2Lx+2)}{(Lx)^4}$ = $\frac{-Lx+2}{x.(Lx)^3}$ Dado que x es positiva en el deminio de esta función el signo de y'' depende de los factores Lx y -Lx+2; Lx=0⇒ $x=1$; -Lx+2=0⇒ $Lx=2\Rightarrow x=e^2$ Dando valores en los intervalos en los que dividen al dominio estas dos raíces tenemos:

f es cóncava (0,1)$\cup(e^2,\infty)$ y convexa en (1,e^2)
En x=e^2 hay un punto de inflexión

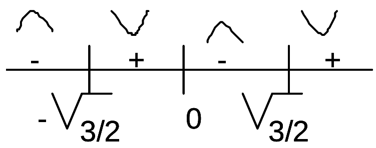


En cuanto al crecimiento y'>0 si Lx-1>0;
Lx=1⇒ $x=e$. Dando valores decrece (0,1), crece (1∞). No tiene extremos

11. Y=e^x(x-1); D=R; y'=e^x(x-1)+e^x=e^xx; y''=e^xx+e^x=e^x(x+1). Dado que e^x es positivo el signo depende de (x+1); x+1=0⇒ x=-1
Cóncava $(-\infty,-1)$, convexa (-1,∞)
x=-1 punto de inflexión.
Si queremos estudiar el crecimiento el signo de y' depende del signo de x por lo que :
f creciente (0,∞) y decreciente (-∞,0); en x=0 hay un mínimo.

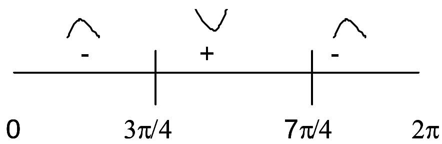


12. y=xe^{-x^2} D=R ; y'=$e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$; y''=$e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2)+e^{-x^2}(-4x)=$
$=e^{-x^2}(-6x+4x^3)$ Como e^{-x^2} es positivo el signo depende del otro factor.4x^3-6x=0⇒
{x=0,x=$-\sqrt{3/2}$, $x=\sqrt{3/2}$ } y dando valores a los intervalos en que estas raíces dividen a la recta real obtenemos:
F es cóncava en $-\infty,-\sqrt{3/2}$)∪(0, $\sqrt{3/2}$)
F es convexa ($-\sqrt{3/2}$,0)∪($\sqrt{3/2}$,∞)
X=0, x=$-\sqrt{3/2}$ y x=$\sqrt{3/2}$ puntos de inflexión.



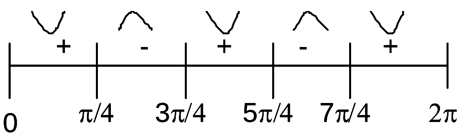
13y=$\frac{e^x}{x}$ D=R-{0}; $y'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$; y''=$\frac{[e^x(x-1)+e^x]x^2-e^x(x-1)2x}{x^4}=$
$=\frac{[e^x(x-1)+e^x]x-e^x(x-1).2}{x^3}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$ El signo depende de x y de x^2-2x+2;
X^2-2x+2=0 no tiene solución , dando un v alor cualquiera se ve que es positiva. Por tanto el signo de y'' depende únicamente de x y por tanto f es cóncava $(-\infty,0)$ y convexa (0,∞). No tiene puntos de inflexión.

14. y=senx+cosx. Restringimos el estudio al intervalo [0,2π) ya que la función es períodica de períodoπ. y'=cosx-senx; y''=-senx-cosx=0⇒senx=-cosx⇒ $\{x=3\pi/4, x=7\pi/4\}$



F cóncava (0,3π/4)∪(7π/4, 2π)
F convexa)(3π/4, 7π/4)
X=3π/4 y x=7π/4 puntos de inflexión
En x=0 la función es cóncava por serlo antes y después de este punto.

15 y=sen^2x Restringimos su estudio al intervalo [0,2π)
y'=2senx.cosx; y''=2cos^2x-2sen^2x=0⇒ $sen^2x=\cos^2x \Rightarrow \{x=\pi/4, x=3\pi/4, x=5\pi/4, x=7\pi/4\}$



f convexa $(0,\pi/4)\cup(3\pi/4,5\pi/4)\cup(7\pi/4,2\pi)$
f cóncava $(\pi/4,3\pi/4)\cup(5\pi/4,7\pi/4)$
$x=\pi/4, x=3\pi/4, x=5\pi/4, x=7\pi/4$ puntos inflexión.

En x=0 la función es convexa por serlo antes y después de este punto

16. Si f ’(a)=f ‘’(a)=0 la función puede presentar en x=a tanto un extremo relativo como un punto de inflexión
Ejemplo 1: $y=x^3$; $y'=3x^2$; $y''=6x$; $y'''=6$
f ‘(0)=f ‘’(0)=0 , f’’’(0)=6≠0⇒ en x=0 la función posee un punto de inflexión
Ejemplo 2: $y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{iv}=24$
f ’(0)=f ‘’(0)=f ’’’(0)=0; $f^{iv}(0)=24>0$⇒ en x=0 la función tiene un mínimo relativo.

17. Una función polinómica de 2º grado es de la forma $y=ax^2+bx+c$ con a≠0
Hallamos su derivada segunda para estudiar su concavidad y convexidad: y’=2ax+b; y’’=2a
Si a>0 y’’>0$\forall x \in R$ luego la función es convexa en todo R
Si a<0 y’’<0$\forall x \in R$ luego la función es cóncava en todo R

18 Una función polinómica de tercer grado es de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ Para garantizar que tiene un punto de inflexión debemos encontrar un punto que anule la derivada segunda y ver que en dicho punto la derivada tercera es distinta de cero.
$y'=3ax^2+2bx+c$; y’’=6ax+2b=0⇒ $x=\frac{-2b}{6a}$ Esta ecuación tiene solución para cualquier valor de a y b excepto para a=0 pero a es distinto de cero al ser la función de tercer grado. Para ese valor de x hay un punto de inflexión ya que f ‘’’(x)=6a≠0
En una función polinómica de 4º grado no ocurre lo mismo ya que $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$; $y'=4ax^3+3bx^2+2cx+d$; $y''=12ax^2+6bx+2c$ que, al ser una ecuación de 2º grado, no siempre tiene solución. Por lo que no se puede garantizar la existencia de puntos de inflexión.

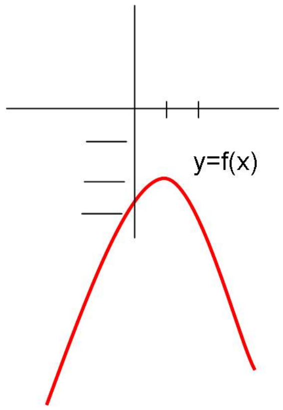
19. La función y=senx tiene un punto de inflexión en x=π ya que f ‘’(π) = 0 y f ”’(π)≠ 0. Al ser una función periódica de período 2π su gráfica se repite indefinidamente y los puntos x=π+2kπ Son puntos de inflexión $\forall k \in\in Z$

20. $y=x^3-6x^2+16x-11$. Calculamos su punto de inflexión: $y'=3x^2-12x+16$; y’’=6x-12=0⇒ x=2. y’’’=6⇒f ”’(2)≠ 0 ⇒ x=2 es un punto de inflexión.
Calculamos ahora la recta tangente a la función en x=2: $x_0=2$; $y_0=f(2)=5$; m=f ‘(2)=4
Recta tangente 4(x-2)=y-5 o, lo que es lo mismo, 4x-y-3=0

21. $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$. Que x=1 sea un punto de inflexión⇒f ‘’(1)=0. Que la recta tangente en x=1 sea horizontal⇒f ‘(1)=0.
f ‘(x)=$3x^2$+2ax+b; f ‘(1)=3+2a+b⇒3+2a+b=0
f ‘’(x)=6x+2a; f ‘’(1)=6+2a⇒6+2a=0⇒a=-3. Sustituyendo en la ecuación de arriba b=3

22. En x=1 la derivada vale cero. De ello no podemos deducir nada acerca del comportamiento de la función, por lo tanto estudiamos la derivada en un entorno de x=1. Si x<1 f ‘(x)>0⇒f es creciente; si x>1 f ‘(x)<0⇒ f es decreciente, por lo tanto en x=1 la función tiene un máximo.
En x=2 f ‘(2)<0 lo que significa que f es creciente en ese punto y, por lo tanto, no posee extremos relativos en x=2. Estudiando la función derivada en un entorno de x=2 observamos que la función derivada tiene un emínimo en x=2, es decir pasa de ser decreciente a ser creciente en dicho punto, Esto significa que la función f pasa de ser cóncava a ser convexa, es decir f posee en x=2 un punto de inflexión.

23. $y=ax^2+bx+c$; $y'=2ax+b$
Pasa por (0,-3)$\Rightarrow f(0)=-3 \Rightarrow c=-3$
La tangente en x=0 es paralela a la recta y=2x$\Rightarrow f'(0)=2 \Rightarrow b=2$
Tiene un máximo en x=1$\Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow a=-1$.
En consecuencia la función es $y=-x^2+2x-3$
Para representar el valor absoluto de f(x) vamos a representar en primer lugar f(x)
Es una parábola de vértice (1,-2)   (x=-b/2a=-1; y=f(-1)=-2)
No tiene raíces ya que la ecuación $-x^2+2x-3=0$ no tiene solución. Pasa por (0,-3) y por (2,-3). Por tanto su gráfica será la siguiente:



A partir de ella hacemos la de su valor absoluto que será