CÁLCULO DE LÍMITES: INTRODUCCIÓN

Partimos en este tema de que el cálculo de límites determinados es conocido por los alumnos. Igualmente se supone que el alumnado es capaz de determinar el límite de un cociente de polinomios de forma directa.
Trataremos el cálculo de las indeterminaciones que pueden resolverse por la regla de L'Hôpital y algunos ejemplos de límites indeterminados para los que no se puede, o no es conveniente, utilizar dicha regla.

Límites indeterminados

Recordemos en primer lugar los límites que al trabajar con operaciones entre funciones son indeterminados, es decir pueden dar resultados distintos dependiendo de las funciones con las que trabajamos.
Son indeterminados aquellos límites que en su cálculo directo conduzcan a alguna de las siguientes situaciones: $\infty-\infty$; $\infty.0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞} ; 0^0 ; ∞^0

Regla de L´Hôpital

Sean f y g dos funciones continuas continuas en el intervalo [a,b] y derivables en (a,b).
Sea c∈ (a,b) tal que f(c)=g(c)=0 ⇒ Si $\exists \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ también $\exists \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales.
Por tanto: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejemplo 1:
Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\text{senx}}{x}$. Este límite es del tipo $\frac{0}{0}$ y las funciones cumplen las condiciones de la regla de L'Hôpital, aplicándola obtenemos: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{senx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{cosx}}{1}=1$.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{Lx}\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{1/x}=\frac{0}{1}=0$$

(*) 0/0

NOTA 1
L'Hôpital puede aplicarse también a las derivadas si estan satisfacen las condiones

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\underset{(2)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}\underset{(3)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

(Los límites 1,2 y 3 son del tipo 0/0)

NOTA 2
L´Hôpital es también válido cuando la variable tiende a infinito

Ejemplo 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sen(1/x)}{tg(1/x)}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{-1}{x^2}\right).\cos(1/x)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right).\sec^2(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos /1/x)}{\sec^2(1/x)}=\frac{1}{1}=1$$

(El límite (1) es del tipo 0/0)

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{0} = \infty$$

(1) límite tipo 0/0

Ejemplo 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 0} 2\sqrt{1-x} = 2$$

(1) límite del tipo 0/0

NOTA 3

L'Hôpital es aplicable para la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, tanto cuando la varible tiende a c como cuando la variable tiende a ∞

Ejemplo 7.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{L(x^2-1)}{L(x-1)} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{1}{x-1}} \underset{(2)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-2x}{x^2-1} \underset{(3)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{4x-2}{2x} = \frac{2}{2} = 1$$

(El límite (1) es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; La igualdad (2) se obtiene operando, podría haberse simplificado la fracción y ya se determinaría el límite; el límite (3) es del tipo 0/0)

Ejemplo 8

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x} \underset{(2)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

(los límites 1 y 2 son del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

Ejemplo 9

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$. El límite es del tipo 0/0, aplicamos L'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2ax+b-2e^{2x}}{2x.\cos(x^2)}$ El cálculo directo de este límite da $\frac{b-2}{0}$ que sería ∞ excepto en el caso de que el númerador fuese cero. Como muestro límite da de resultado 1 hemos de concluir que $b-2=0 \Rightarrow b=2$. Continuamos entonces aplicando L'Hôpital ya que para b=2 el límite es del tipo 0/0

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax+b-2e^{2x}}{2x.\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2a-4e^{2x}}{2.\cos(x^2)-4x^2 sen(x^2)} = \frac{2a-4}{2} = 1 \Rightarrow 2a-4=2 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

NOTA 4

Los límites del tipo $0.\infty$ son facilmente reducibles al tipo 0/0 o bien a ∞/∞ . En efecto, supongamos que $\lim_{x\to c}$ f(x)=0 y $\lim_{x\to c}$ g(x)=∞ En este caso $\lim_{x\to c}$ f(x).g(x)=$0.\infty$, este límite podría escribirse, según nos convenga, de una de las dos formas siguientes:

$\lim_{x\to c} \frac{\mathrm{f(x)}}{1/\mathrm{g(x)}}$, del tipo $\frac{0}{0}$, o bien $\lim_{x\to c} \frac{\mathrm{g(x)}}{1/\mathrm{f(x)}}$, del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ (obsérvese que f.g=$\frac{\mathrm{f}}{1/\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{g}}{1/\mathrm{f}}$)

La decisión de escoger una u otra expresión dependerá de cual de las dos es más fácil de determinar.

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to 0^+} x^3.Lx \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{Lx}{x^{-3}} \underset{(2)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-3x^{-4}} \underset{(3)}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0$$

(El límite (1) es del tipo $0.\infty$; el (2) del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; la igualdad 3 se obtiene al operar)

Ejemplo 11
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underset{(3)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0$
(El límite (1) es del tipo 0.∞; los límites (2) y (3) son del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)
Obsérvese que si nos hubiesen pedido $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^x$ tendíamos que haberlo hecho en +∞ y en -∞ por separado, el segundo ya lo hemos resuelto y el primero no es indeterminado:
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = \infty.\infty = \infty$

Ejemplo 12
Calcular $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$
En este caso tenemos que hallar el límite por la izquierda y por la derecha ya que pueden dar distinto.
$\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = 0.e^{+\infty} = 0.\infty$ indeterminado, lo calculamos
$\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}.\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = \infty$ (El límite (1) es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

NOTA 5
Los límites del tipo 1^∞ , 0^0 e ∞^0 se reducen al tipo 0.∞ al aplicar logarítmos.

Ejemplo 13
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 0^0$ Para calcularlo llamemos A=$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ y apliquemos logaritmos en ambos miembros :
LA=$\lim\limits_{x\to 0^+} x.Lx \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Lx}{1/x} \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-(1/x^2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$; si LA=0⇒A=$e^0$=1
(El límite 1 es del tipo 0.∞; El límite 2 del tipo ∞/∞; la última igualdad se obtiene operando)
Ejemplo 14
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$ Este límite es del tipo 1^∞ Procedemos como en el ejercicio anterior:
Sea A =$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$ Tomamos logarítmos en ambos miembros:
LA==$\lim\limits_{x\to\infty} 2xL\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{L\left(\frac{x+1}{x}\right)}{1/2x} \underset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x+1}.\frac{x-(x+1)}{x^2}}{\frac{-2}{4x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^3}{-2(x+1)x^2} = 2$
LA=2⇒A=e^2
(El límite (1) es del tipo ∞.0; El límite (2) es del tipo $\frac{0}{0}$; la tercera igualdad se obtiene al operar)
Ejemplo15
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ Este límite es del tipo ∞^0. Sea A=$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$ Tomando logarítmos obtenemos:
LA=$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}L(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Lx}{x} \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$ Entonces, LA=0⇒A=e^0=1
(el límite (1) es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

NOTA 6
La regla de L'Hôpital no sirve para resolver todas las indeterminaciones, ni siquiera las del tipo 0/0 ó ∞/∞, ya que puede suceder que los sucesivos cocientes de derivadas sigan siendo indeterminados. Esto ocurre en muchas ocasiones en los cocientes cuando hay radicales o funciones exponenciales. Por otra parte, el curso pasado se había visto como resolver algunas indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$, por ejemplo para restas de funciones con radicales. Veamos

a continuación algunos ejemplos de límites indeterminados en los que no vamos a utilizar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 16 (indeterminación del tipo ∞/∞ con radicales)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-3x^2}}{2x^2+\sqrt{x^4-6x}}$ Dividimos el numerador y el denominador por x elevado a la mayor potencia, en este caso por x^2 (téngase en cuenta que el grado de los términos que están dentro del radicando hay que dividirlos por dos ya que $\sqrt{x^n}$ $=x^{n/2}$ y, por tanto, al introducir x^2 en el signo radical quedaría x^4

Entonces, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-3x^2}}{2x^2+\sqrt{x^4-6x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}}}{\frac{2x^2}{x^2}+\sqrt{\frac{x^4}{x4}-\frac{6x}{x^4}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{2+\sqrt{1-\frac{6}{x^3}}} = \frac{\sqrt{1}}{2+\sqrt{1}} = \frac{1}{3}$

Nota: Podríamos haber hecho el ejercicio de forma similar a como lo hacemos con cocientes de polinomios: al ser del mismo grado tiende al cociente de los coeficientes principales.

Podemos pensar qué ocurriría si nos hubiesen pedido el límite cuando x tiende a -∞. En este ejemplo, al tener todos los términos de mayor grado exponente par, el comportamiento de la función es el mismo en los números positivos que en sus opuestos y, por lo tanto, el límite en el menos infinito se haría de la misma forma. Sin embargo, no siempre ocurre así como veremos a continuación.

Ejemplo 17 (indeterminación del tipo ∞/∞ con radicales)

Calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$. Vamos a hacerlo por ambos lados por separado

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = \frac{1}{2}$ (De forma similar a como lo hicimos en el ejercicio anterior dividimos numerador y denominador por x, por lo que dentro de la raíz tenemos que dividir por x^2. Obsérvese de nuevo que podríamos haberlo hecho directamente atendiendo a los grados del numerador y denominador)

Veamos ahora que ocurre con $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$ Si dividimos numerador y denominador por x, esa x es ahora negativa, pero al introducirla dentro de la raíz tenemos que elevarla al cuadrado con lo que estamos cambiándola de signo. Por lo tanto estaríamos dividiendo numerador y denominador por números diferentes: arriba por un número positivo y abajo por su opuesto. Es decir, estamos cambiando de signo el límite. Por ello, debemos proceder del siguiente modo: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = \frac{-1}{2}$

Otra manera de plantear el problema es el siguiente:Dado que el signo de la raíz cuadrada no varía si hacemos el límite en +∞ o en -∞ y, sin embargo el signo de 2x es positivo en +∞ y negativo en -∞, se verifica que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = -\frac{1}{2}$

(De lo visto anteriormente se deduce que si el grado del numerador y del denominador es el mismo, el cociente tiende **en valor absoluto** al cociente de los coeficientes, pero debemos pensar el signo según el que tengan el numerador y el denominador por el lado que estemos haciendo el límite)

Ejemplo 18: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{5x} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ pero $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{5x} = \frac{-\sqrt{3}}{5}$

Ejemplo 19 (indeterminación del tipo $\infty - \infty$ con radicales)
Calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} - x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} - x) = \infty - (-\infty) = \infty + \infty = \infty$ No es indeterminado
$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} - x) = \infty - \infty$ Indeterminado, se multiplica y divide por el conjugado
$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+2x+1}+x} = \lim\limits_{z\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}+x} = \frac{2}{1+1} = 1$

Ejemplo 20 (indeterminación del tipo $\infty - \infty$ con radicales)

Calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} + x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} + x) = \infty + \infty = \infty$ No es indeterminado
$\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} + x) = \infty - \infty$ Indeterminado, se multiplica y divide por el conjugado
$\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x+1} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2+2x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+2x+1}-x} = \lim\limits_{z\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}-x} =$
$= -\lim\limits_{z\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}-x} = -\frac{2}{1+1} = -1$

Ejemplo 21 (Indetermincíón del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ con exponenciales)

Si queremos calcular por ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{3x^2}$ que es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podríamos aplicar la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty$. Sin embargo, si tenemos una exponencial en ambos términos de la fracción y el límite es indeterminado, la regla no nos serviría. Ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{2e^x-5e^{-2x}} = \frac{\infty}{\infty}$. Dado que la derivada de e^x es e^x esa indeterminación se mantendrá por muchas veces que apliquemos L'Hôpital. La forma de proceder es dividir ambos miembros por la exponencial que provoca la indeterminación elevada a la potencia que sea mayor en valor absoluto.
En el ejemplo que nos ocupa, e^{-x} y e^{-2x} tienden a cero cuando x tiende a infinito, no influyen por lo tanto en la indeterminación. Ésta se produce por la existencia de e^x en el numerador y denominador, dividimos entonces por este término: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{2e^x-5e^{-2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+e^{-2x}}{2-5e^{-3x}} = \frac{3}{2}$

Si quisiésemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{2e^x-5e^{-2x}}$ también es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ pero esa indeterminación está provocada por la existencia del término e^{-x} en el numerador, y de e^{-2x} en el denominador. De entre ellos, el que está elevado a mayor potencia en valor absoluto es e^{-2x}, dividimos por ese término: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{2e^x-5e^{-2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^{3x}+e^x}{2e^{3x}-5} = \frac{0}{-5} = 0$

Ejemplo 22 (Indetermincíón del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ con exponenciales)
Calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{L(e^x+e^{-x})}{x}$ Lo realizamos por cada lado de forma independiente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L(e^x+e^{-x})}{x}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\underset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}=1$$

(El límite (1) es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ aplicamos L'Hôpital, el (2) es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ dividimos por e^x numerador y denominador)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{L(e^x+e^{-x})}{x}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\underset{(2)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$ (1) y (2) razonamientos análogos.

Ejemplo 23 (Indetermintión del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ con exponenciales)

Calcula $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}}+6}{\frac{1}{e^{2x}}+2}=\frac{\frac{1}{\infty}+6}{\frac{1}{\infty}+2}=\frac{0+6}{0+2}=3$$

Ejemplo 24 (Indeterminaciones con otros tipos de funciones)

Calcular $\lim_{x\to+\infty}(x.e^{1/x}-x)\underset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}x.(e^{1/x}-1)\underset{(2)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{1/x}-1)}{1/x}\underset{(3)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$

(El límite (1) es del tipo $\infty-\infty$, sacamos factor común. (2) es del tipo $\infty.0$; (3) $\frac{0}{0}$ se aplica l'Hôpital)

Ejemplo 25 (Indeterminaciones con otros tipos de funciones)

Calcular $\lim_{x\to+\infty}[L(e^x+e^{-x})-x]$ Es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, vamos a convertir esa resta en el logaritmo de un cociente. Para ello utilizaremos, en primer lugar, que x=Le^x y, en segundo lugar, que la resta de 2 logarítmos es igual al logarítmo del cociente.

$$\lim_{x\to+\infty}[L(e^x+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}[L(e^x+e^{-x})-Le^x]=\lim_{x\to+\infty}L(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x})\underset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}L(\frac{1+e^{-2x}}{1})=L1=0$$

(1) dividimos por e^x

Ejemplo 26 (Indeterminaciones con otros tipos de funciones)

$$\lim_{x\to-\infty}[L(e^x+e^{-x})+x]=\lim_{x\to-\infty}[L(e^x+e^{-x})+Le^x]=\lim_{x\to-\infty}L[(e^x+e^{-x})e^x]=\lim_{x\to-\infty}L[(e^{2x}+e^0)]=L1=0$$

EJERCICIOS DE CÁLCULO DE LÍMITES. REGLA DE L'HÔPITAL

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{Lx}{x}$; 2. $\lim_{x\to0}\frac{x-senx}{x^3}$; 3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{xsenx}-\frac{2}{x^2}\right)$; 4. $\lim_{x\to0}x.Lx$; 5. $\lim_{x\to0}(senx)^x$; 6. $\lim_{x\to\pi/2}(tgx)^{\cos x}$

7. $\lim_{x\to1}x^{1/(1-x)}$; 8. $\lim_{x\to0}\frac{senx-x\cos x}{1-\cos x}$; 9. $\lim_{x\to0}\frac{senx-x}{x-tgx}$; 10. $\lim_{x\to\infty}x.L\left(\frac{1+x}{x}\right)$; 11. $\lim_{x\to0}(\cos x+senx)^{1/x}$

12. $\lim_{x\to0}(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x})$; 13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3x}$; 14. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg(2x)}{tgx}$; 15. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5}$; 16. $\lim_{x\to0^+}(1/senx)^x$

17. $\lim_{x\to+\infty}(L(e^x-e^{-x})-x)$; 18. $\lim_{x\to+\infty}\frac{L(e^x-e^{-x})}{x}$; 19. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x).tg(x/2)$; 20. $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+senx}$;

21. $\lim_{x\to\infty}x.sen(a/x)$; 22 $\lim_{x\to\infty}\frac{x.(Lx)^2}{1+Lx}$; 23. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)$; 24 $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{Lx}\right)$;

25. $\lim_{x\to0}(1+sen2x)^{\pi/x}$; 26. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$; 27. $\lim_{x\to\pi}[ctg(x-\pi)]^{sen(x-\pi)}$ 28. $\lim_{x\to1}(x-1).L(x-1)$

29. $\lim_{x\to0^+}\frac{L(\cos 3x)}{L(\cos 2x)}$; 30. $\lim_{x\to\infty}\frac{sen(1/x)}{arctg(1/x)}$; 31. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}\right)$; 32. $\lim_{x\to0}\frac{tgx-senx}{sen^2x}$;

33. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$; 34. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\text{senx})^{tgx}$; 35. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\text{1-cosx})^{tgx}$

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$;37. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ 38. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ 39. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$

40. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$; 41. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$ 42. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+3x}-3x)$; 43. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{1+4x})$

44. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$; 45. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$ 46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)$; 47. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$;

48. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$; 49. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 50. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

51. Sea f(x)= $\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$ Hallar: dominio de f, valor que hay que asignar a f(0) para que la función sea continua en el intervalo [-1/2,1/2]

52. Estudia la continuidad de la función y= $\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lx} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$

53. Determinar los valores de a y b y el valor de f(0) para que la siguiente función pueda ser continua f(x)= $\begin{cases}\frac{sen^2x}{ax^2} & \text{si } x<0\\ b.x^x & \text{si } 0<x\leq 1\\ \frac{x^2+x-1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$ en $[-\pi,\pi]$

54. Se considera la función y= $\frac{e^{1/|x|}}{1+e^{1/|x|}}$ calcular el valor que hay que asignar a f(0) para que f sea continua

55. Se considera la función y= $\begin{cases}\frac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$ a) ¿Hay algún valor de a para el cual la función es continua?

SOLUCIONES EJERCICIOS LÍMITES

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{Lx}{x}$=0; 2. .$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^3}$=1/6; 3. .$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{xsenx}-\frac{2}{x^2}\right)=\infty$; 4. .$\lim_{x\to 0}x.Lx$=0; 5. .$\lim_{x\to 0}(senx)^x$=1

6. $\lim_{x\to\pi/2}(tgx)^{\cos x}=1$; 7. $\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$ =e^{-1}; 8. $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{1-\cos x}$=0; 9. $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{x-tgx}$=1/2

10. $\lim_{x\to\infty}x.L\left(\frac{1+x}{x}\right)$=1; 11. $\lim_{x\to 0}(\cos x+senx)^{1/x}$=e; 12. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x})$=0; 13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3x}=1$

14. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg(2x)}{tgx}$=0; 15. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}=\infty$; 16. $\lim_{x\to 0^+}(1/senx)^x$=1; 17. $\lim_{x\to+\infty}(L(e^x-e^{-x})-x)$=0

18. $\lim_{x\to+\infty}\frac{L(e^x-e^{-x})}{x}$=1; 19. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x).tg(x/2)$=2; 20. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+senx}$=1/2; 21. $\lim_{x\to\infty}x.sen(a/x)$=a

22 $\lim_{x\to\infty}\frac{x.(Lx)^2}{1+Lx}$=∞; 23. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)$=0; 24 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{Lx}\right)=1/2$

25. $\lim_{x\to 0}(1+sen2x)^{\pi/x}=e^{2\pi}$; 26. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$; 27. $\lim_{x\to\pi}[ctg(x-\pi)]^{sen(x-\pi)}=1$

28.$\lim_{x\to 1}(x-1).L(x-1)$=0; 29. $\lim_{x\to 0^+}\frac{L(\cos 3x)}{L(\cos 2x)}$=9/4; 30. $\lim_{x\to\infty}\frac{sen(1/x)}{arctg(1/x)}$=1;

31. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{e^{x-1}-1}\right)$=1/2; 32. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{sen^2x}$=0; 33. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$=e^2

34. $\lim_{x\to\pi/2}(\text{senx})^{tgx}$=1; 35. $\lim_{x\to\pi/2}(\text{1-cosx})^{tgx}$=1/e

36: 1/2; 37:-1/2; 38 +∞; 39: +∞; 40: 1; 41: 1/6; 42:1/2 ; 43:∞; 44: −∞; 45: 2; 46: -1/2; 47:∞; 48: 0; 49:1; 50:-1

51. Dominio (f): 1+x>0⇒ x>-1⇒ D(f)=(-1,∞); $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}=\frac{0}{0}$ aplicando l'hôpital

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\sqrt{(1+x)^3}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)=-\frac{1}{2}$ para que f sea continua en x=0; Por tanto f(x)=

$\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ -1/2 & \text{si } x=0\end{cases}$ continua en (-1,∞) y por lo tanto en [-1/2,1/2]

52.$y=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lx} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$ El dominio de la función es (0,∞) El único punto problemático en cuanto a continuidad es x=1

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lx}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{Lx-x+1}{(x-1)Lx}=\frac{0}{0}$ aplicando L'hôpital tenemos:

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{Lx}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{Lx-x+1}{(x-1)Lx}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{Lx+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1/x^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+(x-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{-1}{2}$ Por lo tanto en x=1 hay una discontinuidad de salto finito, la función es continua en (0,∞)-{1}

53. f(x)=$\begin{cases} \frac{sen^2x}{ax^2} \text{ si } x<0 \\ b.x^x \text{ si } 0<x\leq 1 \\ \frac{x^2+x-1}{x} \text{ si } x>1 \end{cases}$ continua en [-π, π] los únicos puntos que pueden presentar discontinuidad en ese intervalo son x=0 y x=1

Continuidad en x=0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen^2x}{ax^2} = \lim_{x\to o^-} \frac{2senx.\cos x}{2ax} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\cos^2x - 2sen^2x}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx^x = b.0^0$ Indeterminado$\Rightarrow$ Calculamos $\lim_{x\to 0^+} x^x$ y después lo multiplicamos por b

A=$\lim_{x\to 0^+} x^x \Rightarrow LA = \lim_{x\to 0^+} xLx = \lim_{x\to 0^+} \frac{Lx}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$; LA=0$\Rightarrow A = e^0 = 1$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0^+} bx^x$=b.1=b Dado que ambos límites deben ser iguales $\frac{1}{a}$=b=f(0) para que sea continua en x=0.

Continuidad en x=1: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx^x$=b.1=b; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-1}{x} = 1 \Rightarrow b = 1; f(1) = b = 1$

y dado que $\frac{1}{a}$=b=f(0)=1 se sigue que para que la función sea continua es necesario que a=b=1=f(0)

54. Y=$\frac{e^{1/|x|}}{1+e^{1/|x|}}$ y=$\begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}} \text{ si } x<0 \\ \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} \text{ si } x>0 \end{cases}$ El único punto en que esa función puede tener problemas de continuidad es en x=0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}} = \frac{\infty}{\infty}$; dividimos por $e^{-1/x}$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{1}{e^{-1/x}}+1} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{\infty}{\infty}$; dividimos por $e^{1/x}$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}}+1} = 1$

Por lo tanto si f(0)=1 la función es continua en R

55. Se considera la función y=$\begin{cases} \frac{x}{e^x-1} \text{ si } x\neq 0 \\ a \text{ si } x=0 \end{cases}$ a) ¿hay algún valor de a para el que f es continua? La función y=$\frac{x}{e^x-1}$ es continua en R-{0} ya que en x=0 se anula el denominador. La función que nos dan está definida en x=0 ya que f(0)=a, veamos que valor debe tener esa imagen para que coincida con el límite: $\lim_{x-0} \frac{x}{e^x-1} = \frac{0}{0}$ Aplicamos L'Hôpital

$\lim_{x-0} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x-0} \frac{1}{e^x} = 1$; Luego si a=1 f es continua en x=0 y por lo tanto lo es en R.