Integral Indefinida

El problema que vamos a resolver es el siguiente: Dada una función y=f(x) ¿existe otra función y=F(x) cuya derivada coincida con la función de partida, F'(x)=f(x)? Y. En caso afirmativo, ¿esta función es única?

Ejemplos:

1. f(x) =cosx; F(x)=senx ya que F'(x)=cosx=f(x)
2. f(x)=3x^2; F(x)=x^3 ya que F'(x)=3x^2=f(x)

Definición:

Sea y=f(x) una función definida en un intervalo (a,b),llamaremos primitiva de f (x) a toda función y=F(x), definida y derivable en (a,b) y tal que F'(x)=f(x).

1. Así, la función F(x)=senx está definida y es derivable en todo R, dicha función es una primitiva de f(x)= cosx ya que F'(x)=f(x)$\forall x \in R$
2. La función y=Lx está definida y es derivable en (0,∞), siendo su derivada y'=1/x . Podemos entonces decir que y=Lx es una primitiva de y=1/x en el intervalo (0,∞) pero no que sea una primitiva en todo R

Existencia y unicidad de primitivas

Habíamos dicho al principio que debíamos resolver dos problemas: el de la existencia de primitivas y el de la unicidad.

La existencia o no de primitivas para una función dada es un problema complejo que no vamos a afrontar en este curso, llega con conocer que toda función continua en un intervalo (a,b) posee primitivas en dicho intervalo.

Sin embargo, el problema de la unicidad de primitivas tiene fácil respuesta. Dado que la derivada de la función costante y=C es y'=0, es evidente que si y=F(x) es una primitiva de la función y=f(x) también lo será la función y=F(x)+C $\forall C \in R$. En defintiva, si una función tiene una primitiva entonces tiene infinitas, las que se obtienen al sumarle a dicha primitiva cualquier número real.

Teorema

Dada una función y=f(x), si F y G son dos primitivas de f(x)⇒F y G se diferencian en una constante. Es decir F(x)=G(x)+K para alguna constante K∈ R

Definición

Llamaremos integral indefinida de la función y=f(x), y se denota por $\int f(x)dx$, al conjunto de todas sus primitivas. $\int f(x)dx = \{F(x)/F'(x) = f(x)\}$.

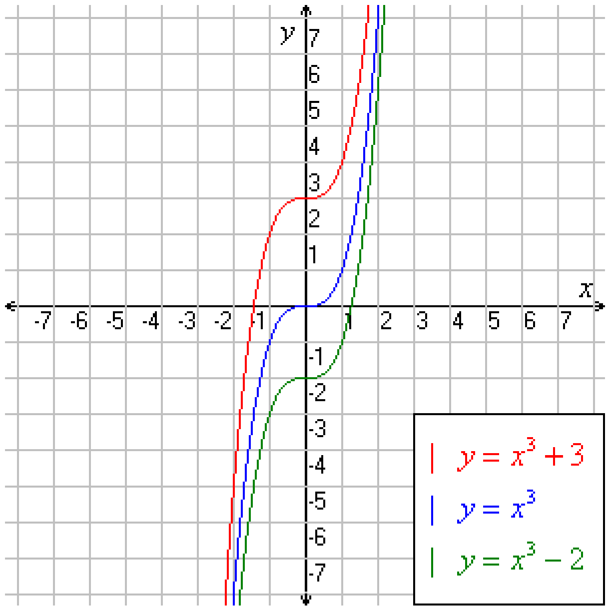
De lo dicho anteriormente se deduce que si F(x) es una primitiva de f(x) ⇒
$\int f(x)dx$=$\{F(x)+C/\in R\}$. *Lo denotaremos abreviadamente como* $\int f(x)dx$=*F(x)+C*

Ejemplos: 1. $\int \cos x.dx = senx + C$;

2. $\int \frac{1}{x}.dx = L$|x|+C (hemos visto antes que y=Lx solo es una primitiva y=1/x en el intervalo (0,∞), al no estar definida la función y=Lx en los restantes números reales. Sin embargo, si antes del logaritmo hacemos el valor absoluto de x conseguimos que el dominio de esta función y=L|x| sea R-$\{0\}$, coincidiendo con el de la función y=1/x y constituyendo una primitiva de esta función en todo su dominio.

La integral indefinida está constituida por una familia de funciones F(x)+C, por lo que todas sus gráficas pueden obtenerse a partir de una de ellas por traslación.

Para la determinación de una primitiva concreta es necesario conocer el valor de la constante de integración, esto se consigue mediante la aplicación de alguna propiedad conocida de esa primitiva concreta por ejemplo:



3. Calcular una primitiva de la función $y=3x^2$ que pase por el punto (0,1)

$\int 3x^2.dx = x^3 + C$ La integral definida de la función $y=3x^2$ la constituyen la familia de funciones del tipo $y=x^3+C$. Sus gráficas se obtienen a partir de una de ellas trasladando la función a lo largo del eje OY. Nos piden que calculemos aquella que pasa por el punto (0,1). Sustituimos por tanto en la familia de primitivas $y=x^3+C$ por ese punto y obtenemos $1=0^3+C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ la primitiva concreta que nos pedían es $y=x^3 + 1$

Propiedades de la integral indefinida

Las siguientes propiedades de la integral indefinida son consecuencia directa de las reglas de derivación:

1. $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$ ya que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función Ejemplo $\int 5\cos xdx = 5\int \cos xdx = 5.senx$+C

2$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. Dado que la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de sus derivadas

Ejemplo $\int (\cos x + \frac{1}{x})dx = \int \cos xdx + \int \frac{1}{x}dx$=senx+L|x|+C

Integrales inmediatas

La operación que permite calcular las primitivas de una función dada f(x) recibe el nombre de integración. Como proceso inverso de la derivación de cada una de las reglas para el cálculo de derivadas se deduce otra para el cálculo de las primitivas de una función. A tales integrales se le conoce con el nombre de integrales inmediatas y son las siguientes:

1.$\int k.dx = kx + C$; 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \forall n \neq -1$; 3. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = L|x| + C$

4.$\int senxdx = -\cos x + C$; 5 $\int \cos xdx = senx + C$;

6.$\int \sec^2 xdx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+tg^2 x)dx = tgx + C$

7. .$\int \cos ec^2 xdx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = \int (1+ctg^2 x)dx = -ctgx + C$

8.$\int a^x dx = a^x/La + C$; en particular $\int e^x dx = e^x$

9.$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$; 10.$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + C$

Ejemplos:

1. $\int (3x^4 + 2x^2 - 3x + 4)dx = 3\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x + C$

2.$\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 4}{x^2}dx = \int \frac{3x^4}{x^2}dx + \int \frac{2x^2}{x^2}dx - \int \frac{3x}{x^2}dx + \int \frac{4}{x^2}dx =$

-= $\int 3x^2dx + \int 2dx - 3\int \frac{1}{x}dx + 4\int x^{-2}dx$ ==x^3+2x-3L|x|+4.$\frac{x^{-1}}{-1} + C$

3.$\int \sqrt{x^5}\, dx = \int x^{5/2}dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} + C$

4. $\int \frac{2^x}{3^x}dx = \int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{(2/3)^x}{L(2/3)}$+C

5.$\int(1+x^2)^2dx = \int(1+2x^2+x^4)dx = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + C$

De cada una de las integrales inmediatas de la tabla anterior podría obtenerse otra utilizando la regla de la cadena. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Si $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ \forall n = -1; \Rightarrow \int f(x)^n.f'(x).dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C\ \forall n = -1;$

Así por ejemplo $\int sen^5 x \cos x.dx = \frac{sen^6}{6} + C$;

$\int(Lx)^3\frac{1}{x}dx = \frac{(Lx)^4}{4} + C$

$\int tg^7 x.\sec^2 x.dx = \frac{tg^8 x}{8} + C$

Ejemplo 2:

Si $\int senxdx = -\cos x + C; \Rightarrow \int sen(f(x)).f'(x)dx = -\cos f(x) + C;$

Así por ejemplo $\int sen(5x).5.dx = -\cos(5x) + C$

$\int sen(Lx).\frac{1}{x}dx = -\cos(Lx) + C$

$\int sen(x^3)3x^2dx = -\cos(x^3) + C$

Ejemplo 3:

Dado que $\int \frac{1}{x}dx = L|x| + C \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = L|f(x)| + C$

Así $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{senx}dx = L|senx| + C$

$\int \frac{4x^3}{x^4}dx = L|x^4| + C$

La tabla de integrales inmediatas añadiéndole las fórmulas correspondientes a la regla de la cadena sería entonces la siguiente:

1.$\int k.dx = kx + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ \forall n = -1;\ \Rightarrow\ \int f(x)^n.f'(x).dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C\ \forall n = -1;$

3. $\int \frac{1}{x}dx = L|x| + C\ \Rightarrow\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = L|f(x)| + C$

4.$\int senxdx = -\cos x + C; \Rightarrow \int sen(f(x)).f'(x)dx = -\cos f(x) + C$

5 $\int \cos xdx = senx + C; \Rightarrow \int \cos(f(x)).f'(x)dx = sen(f(x)) + C$

6.$\int \sec^2 xdx = tgx + C\ \Rightarrow\ .\int \sec^2(f(x)).f'(x)dx = tg(f(x)) + C$

7. .$\int \cos ec^2 xdx = -ctgx + C\ \Rightarrow\ .\int \cos ec^2(f(x)).f'(x)dx = -ctg(f(x)) + C$

8.$\int a^x dx = a^x/La + C; \Rightarrow \int a^{f(x)}.f'(x)\, dx = a^{f(x)}/La + C$

en particular $\int e^x dx = e^x\ \Rightarrow\ \int e^{f(x)}.f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

9.$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C; \Rightarrow .\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = arctg(f(x)) + C;$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + C \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = arcsen(f(x)) + C$

NOTA:
Si se entiende la regla de la cadena es totalmente innecesario memorizar esta segunda tabla

NOTA 2. Todas las fórmulas anteriores pueden utilizarse cuando nos falta dentro de la integral una constante multiplicativa sin más que multiplicar y dividir por dicha constante.

Ejemplo ¿Como podemos realizar de forma directa $\int sen(5x)dx$? esta integral sería inmediata si la función estuviese multiplicada por la derivada de 5x. Podemos hacer lo siguiente:
$\int sen(5x)dx = \int \frac{1}{5}.5.sen(5x)dx = \frac{1}{5}\int 5.sen(5x)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x) + C$

Ejemplos

1. $\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int 2.e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$
2. $\int \frac{x^2}{x^3+5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx = \frac{1}{3}L|x^3+5| + C$
3. $\int tgxdx = \int \frac{senx}{\cos x}dx = -\int \frac{-senx}{\cos x}dx = -L|\cos x| + C$
4. $\int x.e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+5)^{-1/2}dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+5)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3+5}}{3} + C$
6. $\int tg^2x.\sec^2x.dx = \frac{tg^3x}{3} + C$
7. $\int \frac{senx.\cos x}{1+sen^2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2senx.\cos x}{1+sen^2x}dx = \frac{1}{2}L|1+sen^2x| + C$
8. $\int \frac{\cos x}{1+sen^2x}dx = arctg(senx) + C$
9. $\int (tg^3x + tg^5x)dx = \int tg^3x(1+tg^2x)dx = \frac{tg^4x}{4} + C$
10. $\int e^{3\cos x}.senx.dx = -\frac{1}{3}\int -3senx.e^{3\cos x}dx = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$
11. $\int \frac{2x-1}{1+x^2} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = L|1+x^2| - arctgx + C$
12. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C$
13. $\int x.\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}sen(x^2+3) + C$
14. $\int \frac{\cos(Lx)}{x}dx = sen(Lx) + C$
15. $\int tg^2xdx = \int (tg^2x + 1 - 1)dx = \int (tg^2x+1)dx - \int dx = tgx - x + C$
16. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$
17 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}arcsen(x^2) + C$
18 $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = arcsen(e^x) + C$
19. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}dx = \frac{1}{3}arctg(x^3) + C$
20 $\int \frac{\cos x}{1+sen^2x}dx = arctg(senx) + C$
21 $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}arctg(3x) + C$

22 $\int \frac{1}{16+x^2}dx = \int \frac{1/16}{1+\frac{x^2}{16}}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{4})^2}dx = \frac{4}{16}\int \frac{1/4}{1+(\frac{x}{4})^2}dx = \frac{1}{4}arctg(x/4)+C$

23 $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^w}}dx = \int \frac{1/5}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}dx = \int \frac{1/5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}dx = arcsen(x/5)+C$

Integración por partes

Este método nos permitirá resolver algunas integrales que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra. Deduciremos la fórmula de la integración por partes a partir de la regla para derivar un producto de dos funciones.

Sean u=f(x) y v=g(x) dos funciones⇒ (u.v)’=u.v’+v.u’ y por lo tanto d(u.v) = udv+vdu. Integrando ambos miembros de esa igualdad tenemos: $\int d(u.v) = \int udv + \int vdu$. Dado que $\int d(u.v) = u.v$, se obtiene que $u.v = \int udv + \int vdu$ y despejando la primera integral:

$\int udv = u.v - \int vdu$ Fórmula de la integración por partes.

El método consiste en identificar *u* con una parte de la integral y *dv* con el resto. El mayor problema de este procedimiento es que no hay una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. Hemos de tener en cuenta que la parte a la que llamamos dv debe ser fácilmente integrable y también que la integral que obtengamos sea más sencilla que la de partida.

Debemos tener también presente que al hacer la identificación de dv, esta debe contener siempre a dx

Ejemplo1

$\int x.e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

u=x; du=dx

dv=e^xdx; v=e^x

NOTA: En este ejemplo, a la hora de hacer la identificación de las partes tenemos en cuenta que la función y=x se simplifica si se deriva y se complica si se integra, en cambio nos es indiferente derivar o integrar y=e^x

Ejemplo 2

$$\int Lxdx = \left[\begin{array}{c} \text{u=Lx; du=}\frac{1}{x}\text{dx} \\ \text{dv=dx; v=x} \end{array} \right] = xLx - \int x.\frac{1}{x}dx = xLx - \int dx = xLx - x + C$$

NOTA: En este ejemplo la identificación que hemos hecho es la única posible ya que el integrando solo se puede entender como un producto de esta forma.

Ejemplo 3

En algunas ocasiones hay que repetir la integración por partes varias veces

$$\int x^2 senxdx = \left[\begin{array}{c} \text{u=}x^2\text{ ; du=2xdx} \\ \text{dv=senxdx; v= -cosx} \end{array} \right] = -x^2\cos x - \int -2x\cos xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x \int dx =$$

$$\begin{bmatrix} \text{u=x; du=dx} \\ \text{dv=cosxdx; v=senx} \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2(x.senx - \int senxdx) = -x^2\cos x + 2(xsenx + \cos x) + C$$

Ejemplo 4

$$\int arctgx\,\text{dx}=\begin{bmatrix} \text{u=arctgx; du=}\dfrac{dx}{1+x^2} \\ \text{dv=dx ; v=x} \end{bmatrix} = x.arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x.arctgx - \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= x.arctgx - \tfrac{1}{2}L(1+x^2) + C$$

Ejemplo 5

Si al hacer integrales sucesivas se obtiene en el segundo miembro una integral igual a la de partida, se despeja esta integral para obtener una primitiva

$$\int e^x senxdx = \begin{bmatrix} \text{u=}e^x\text{; du=}e^x\text{dx} \\ \text{senxdx=dv; v=-cosx} \end{bmatrix} = -e^x\cos x + \int e^x \cos xdx = \begin{bmatrix} \text{u=}e^x\text{; du=}e^x\text{dx} \\ \text{cosxdx=dv; v=senx} \end{bmatrix} =$$

$$-e^x\cos x + e^x senx - \int e^x senxdx$$

Tomando la primera y última parte de esta igualdad hemos obtenido:

$$\int e^x senxdx = -e^x\cos x + e^x senx - \int e^x senxdx \Rightarrow 2\int e^x senxdx = -e^x\cos x + e^x senx \Rightarrow$$

$$\int e^x senxdx = \frac{-e^x\cos x + e^x senx}{2} + C$$

Ejemplo 6

$$\int sen^2xdx = \begin{bmatrix} \text{u=senx; du=cosxdx} \\ \text{dv=senxdx; v=-cosx} \end{bmatrix} = -senx.\cos x + \int \cos^2 xdx = -senx.\cos x + \int(1 - sen^2x)dx =$$

$$= -senx\cos x + x - \int sen^2xdx \Rightarrow 2\int sen^2xdx = -senx.\cos x + x \Rightarrow \int sen^2xdx = \frac{-senx.\cos x + x}{2} + C$$

Integración de funciones racionales

Llamamos función racional a cualquier función del tipo y=$\dfrac{\text{P(x)}}{\text{Q(x)}}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios. Para integrar las funciones de este tipo seguiremos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} \text{P(x)} & \text{Q(x)} \\ \hline \text{r(x)} & \text{C(x)} \end{array}$$

1) Si P(x) tiene grado mayor o igual que Q(x) realizamos la división, obteniendo un cociente C(x) y un resto r(x) cuyo grado es menor que el del denominador.

$$\int \frac{\text{P(x)}}{\text{Q(x)}}\text{dx}= \int \frac{\text{Q(x).C(x)+r(x)}}{\text{Q(x)}} = \int \frac{\text{Q(x).C(x)}}{\text{Q(x)}}\text{dx}+\int \frac{\text{r(x)}}{\text{Q(x)}}\text{dx}=\int\text{C(x)dx}+\int \frac{\text{r(x)}}{\text{Q(x)}}\text{dx}$$

Así pués la integral daría lugar a una integral polinómica más otra integral racional de grado del numerador menor que el del denominador, que constituye el 2º paso de este esquema

2) Si el grado de P(x) es menor que el de Q(x) descomponemos la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples. Esta descomposición depende del tipo de raíces de Q(x), hay tres casos:

A) Q(x) tiene únicamente raíces reales simples: $r_1, r_2, \ldots, r_n$. En este caso, sabemos que el polinomio puede factorizarse del siguiente modo: $Q(x)=a(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$, siendo a su coeficiente principal. Se verifica entonces que la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede descomponerse del siguiente modo: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_2)}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{(x-r_n)}$, fracciones todas ellas de integración inmediata pues $\int \frac{A}{(x-r)}dx = A.L|x-r|$. Veremos en un ejemplo como se determinan los números A_1, $A_2 \ldots\ldots A_n$.

B) Q(x) tiene alguna raíz real múltiple. En este caso, por cada raíz real r de orden de multiplicidad m apareceran m fracciones simples del tipo:

$\frac{A_1}{(x-r)}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{(x-r)^m}$. De nuevo veremos en un ejemplo como determinar los números A_1, $A_2 \ldots\ldots A_m$

C) Q(x) tiene raíces complejas: no veremos este método en este curso.

Ejemplo 1

$\int \frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}dx$ Dado que el numerador tiene grado mayor que el denominador, comenzamos dividiendo los polinomios

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & -4x & -3 & x^2-4 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +4x & & x+1 \\ \cline{1-4} & x^2 & & -3 & \\ & -x^2 & & +4 & \\ \cline{1-4} & & & 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}dx = \int \frac{(x^2-4)(x+1)+1}{x^2-4}dx =$$

$$= \int \frac{(x^2-4)(x+1)}{x^2-4}dx + \int \frac{1}{x^2-4}dx =$$

$$= \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{1}{x^2-4}dx$$

Realizamos ahora la integral que nos falta que sigue siendo racional pero con grado del numerador menor que el del denominador.

En primer lugar estudiamos las raíces del denominador $x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$ raíces reales simples $\Rightarrow$podemos descomponer la fracción del siguiente modo $\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$

Para determinar A y B procedemos a realizar la suma del segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Observamos que la primera y última fracciones son iguales y tienen el mismo denominador, por lo tanto sus numeradores han de ser también iguales para cualquier valor que de x.

De ello se deduce que si damos a x 2 valores cualesquiera e igualamos, obtendremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnita cuya solución son los valores de A y B.

La resolución del sistema resulta más fácil si damos a x los valores de las raíces en lugar de otros dos valores cualesquiera.

Así, para x=-2 se obtiene 1=-4B⇒B=-1/4; y para x=2 1=4A⇒A=1/4

Por tanto, $\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1/4}{x-2}dx + \int \frac{-1/4}{x+2}dx = 1/4L|x-2| - 1/4L|x+2| + C$

Sustituyendo el valor de la integral en la expresión obtenida al principio del ejemplo se obtiene: $\int \frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2-4}dx =$

$$\frac{x^2}{2} + x + \int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + x + 1/4L|x-2| - 1/4L|x+2| + C$$

	2	-2	-2	2
1		2	0	-2
	2	0	-2	0

Ejemplo 2

$\int \frac{3x+5}{2x^3-2x^2-2x+2}dx$ Dado que el grado del numerador es menor que el del denominador procedemos directamente a la descomposición de la fracción.

En primer lugar hallamos las raíces del denominador $2x^3-2x^2-2x+2=0$

Por Ruffini obtenemos que una raíz es x=1, las otras dos se obtienen al resolver la ecuación $2x^2-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Así pues tenemos: x=1, raíz doble y x=-1 raíz simple. Esto conduce a la siguiente descomposición:

$\frac{3x+5}{2x^3-2x^2-2x+2} = \frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$ (obsérvese que aparece un 2 en una de las fracciones simples al ser ese el coeficiente principal del denominador)

Para obtener los números A,B y C procedemos igual que en el ejemplo anterior: realizamos la suma e igualamos los numeradores para distintos valores de x.

$$\frac{3x+5}{2x^3-2x^2-2x+2} = \frac{A}{2(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} = \frac{A(x-1)(x+1)+2B(x+1)+2C(x-1)^2}{2(x-1)^2(x+1)}$$

(Al sumar tenemos que realizar el mínimo común multiplo para que los denominadores de la prímera y última fracción sean iguales)

Ya que son tres incógnitas necesitamos un sistema de tres ecuaciones. Damos a x los valores: x=1, x=-1 y x=0

Para x=1 8=4B⇒B=2; Para x=-1 2=8C⇒C=1/4 ; Para x=0 5=-A+2B+2C⇒A=-1/2

En consecuencia $\int \frac{3x+5}{2x^3-2x^2-2x+2}dx = \int \frac{-1/2}{2(x-1)}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1/4}{(x+1)}dx =$

$= -1/4L|x-1| - \frac{2}{x-1} + 1/4L|x+1| + C$

Obsérvese que $\int \frac{2}{(x-1)^2}dx = 2\int (x-1)^{-2}dx = 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-2}{x-1}$

Integración por cambio de variable

El cambio de variable es una técnica que nos permite transformar la integral de partida en una inmediata o en una racional que se resolverá por el método estudiado anteriormente.

La elección del cambio de variable es a veces un problema complicado, aunque los ejercicios que se ven en este curso se reducen a algunos cambios usuales que vamos a ver a continuación.

Una vez decidido el cambio debemos despejar dx y sustituir por completo la función integrando en función de la nueva variable. Una vez resuelta la integral desharemos el cambio dejando el resultado en función de la variable de partida.

A) Funciones exponenciales (cambio a^x=t)

Ejemplo 1 $\int \frac{2^x}{1+4^x}dx$ (cambio 2^x=t)

2^x=t

2^x.L2.dx=dt; dx=$\frac{dt}{L2.2^x} = \frac{1}{L2}.\frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \int \frac{t}{1+t^2}.\frac{1}{L2}.\frac{dt}{t} = \frac{1}{L2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$

$\frac{1}{L2}arctgt + C = \frac{1}{L2}arctg(2^x) + C$

Ejemplo 2 $\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$ (cambio e^x=t)

e^x=t

e^xdx=dt; dx=$\frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1-t}{1+t}.\frac{dt}{t} = \int \frac{1-t}{t^2+t}dt$ Integral racional con grado del numerador menor que el del denominador. Procedemos a descomponer la fracción.

Raíces del denominador t^2+t=0$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \end{cases}$ $\frac{1-t}{t^2+t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}$

Para t=0 queda 1=A; para t=-1 2=-B$\Rightarrow B = -2$

$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1-t}{t^2+t}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{-2}{t+1}dt = L|t| - 2L|t+1| + C = L|e^x| - 2L|e^x+1| + C$

B) Funciones que contienen expresiones del tipo $(ax+b)^n$ (cambio ax+b=t)

Ejemplo $\int x(x-1)^{30}dx$ (cambio x-1=t)

X-1=t; x=t+1; dx=dt $\Rightarrow \int x(x-1)^{30}dx = \int (t+1)t^{30}dt = \int (t^{31}+t^{30})dt = \frac{t^{32}}{32} + \frac{t^{31}}{31} + C =$

$= \frac{(x-1)^{32}}{32} + \frac{(x-1)^{31}}{31} + C$

Ejercicio propuesto:$\int (x-1)(x+1)^{15}dx$

C) Funciones irracionales. En estas funciones los cambios intentan eliminar las raíces y convertir la integral en una polinómica o en una racional

Ejemplo 1 $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$ (cambio $x=t^2$)

$x=t^2$; $dx=2tdt$; $t=\sqrt{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}2tdt = 2\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 2\int \frac{dt}{t+1} =$

$= 2L|t+1| + C = 2L|\sqrt{x}\ +1| + C$

Ejemplo 2 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (cambio $x^2+1=t^2$)

$x^2+1=t^2$; $2xdx=2tdt$; $xdx=tdt$; Para sustituir x^3dx tenemos en cuenta que $x^3.dx=x^2.x.dx$ y que $x^2=t^2-1$. Por tanto $x^3.dx=(t^2-1).t.dt$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(t^2-1).t.dt}{t} = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + C$$

Ejemplo 3 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$ (cambio $e^x-1=t^2$)

$e^x-1=t^2$; $e^x=t^2+1$; $e^xdx=2tdt$; $dx=\frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2+1}$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{t}\frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int (t^2+1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + C = 2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3} + \sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Ejemplo 4 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ (cambio $x=t^6$)

Nota: Este cambio permite que en la sustitución se eliminen los dos radicales al hacer x igual a t elevado al mínimo común múltiplo de los 2 índices

$x=t^6$; $dx=6t^5dt$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1}$ integral racional con grado del numerador mayor que el del denominador.

Realizamos la división de esos polinomios obteniendo: cociente= t^2-t+1 y resto=-1. Entonces $\int \frac{t^3dt}{t+1} = \int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}dt = \int (t^2-t+1)dt - \int \frac{1}{t+1}dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - L|t+1| + C$. En consecuencia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - L|t+1|\right) + C = 6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2}{2} + \sqrt[6]{x} - L|\sqrt[6]{x}+1|\right) + C$$

$=2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6L|\sqrt[6]{x}+1| + C$

D) Funciones trigonométricas.

Si la función es impar en senx se hace el cambio cosx=t; si la función es impar en cosx se hace el cambio senx=t

Ejemplo 1 $\int \frac{1}{\cos x}dx$ (cambio senx=t)

Senx=t; cosxdx=dt; $dx = \frac{dt}{\cos x}$; $\frac{dx}{\cos x} = \frac{dt}{\cos^2 x} = \frac{dt}{1-sen^2x} = \frac{dt}{1-t^2}$

$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{dt}{1-t^2}$ integral racional

Descomponemos la fracción. Las raíces del denominador son t=1 y t=-1, el coeficiente principal es -1, por tanto: $\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{-(t-1)} + \frac{B}{(t+1)} = \frac{A(t+1)-B(t-1)}{-(t-1)(t+1)}$

Para t=1 tenemos 1=2A⇒A=1/2; para t=-1 1=2B⇒t=1/2.
$\int \frac{1}{1-t^2}dt = \int \frac{1/2}{-(t-1)}dt + \int \frac{1/2}{(t+1)}dt = -1/2L|t-1| + 1/2L|t+1| + C$
$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{1-t^2}dt = -1/2L|t-1| + 1/2L|t+1| + C = -1/2L|senx-1| + 1/2L|senx+1| + C$

Ejemplo 2 $\int sen^3 xdx$ (cambio cosx=t)

cosx=t; -senxdx=dt; senxdx=-dt
$\int sen^3xdx = \int sen^2x.senx.dx = \int(1-\cos^2x)senx.dx = \int(1-t^2)(-dt) = -\int(1-t^2)dt = -t + \frac{t^3}{3} + C =$
=-cosx+$\frac{\cos^3 x}{3} + C$
Nota: no siempre es necesario hacer este cambio. En la anterior integral, por ejemplo, podríamos haber procedido del siguiente modo: $\int sen^3xdx = \int sen^2x.senx.dx = \int(1-\cos^2x)senx.dx =$
$= \int senxdx - \int \cos^2 x.senxdx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
Ejercicios propuestos: a)$\int \cos^3 xdx$ (cambio senx=t); b)$\int \frac{1}{senx}dx$ (cambio cosx=t)

EJERCICIOS INTEGRAL INDEFINIDA

Integrales inmediatas

1 $\int(x^3+3x-2)dx$ 2 $\int \frac{x^2+2x+1}{3x}dx$ 3 $\int \frac{\sqrt{x}+x+6}{x^3}dx$ 4 $\int \frac{(x+1)^2}{2x}dx$ 5 ∫ctgxdx

6 $\int \frac{2\cos x}{1+sen^2x}dx$ 7 $\int \frac{[L(x+1)]^2 dx}{x+1}$ 8 $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^6}}dx$ 9 $\int tg^2x\sec^2xdx$ 10 $\int \mathrm{sen}^5 x\cos xdx$

11 $\int sen^3xdx$ 12 $\int \frac{lx}{x}dx$ 13 $\int e^{3\cos 2x}sen2x\,dx$ 14 $\int \frac{dx}{2x+3}$ 15 $\int e^{2x+1}dx$ 16 $\int \frac{dx}{2^x}$ 17 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

18 $\int senx\cos xdx$ 19 $\int xe^{x^2}dx$ 20 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx$ 21 $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ 22 $\int x\cos(x^2+1)dx$

23$\int \frac{\cos(Lx)dx}{x}$ 24 $\int sen(5x)dx$ 25 $\int \frac{dx}{xLx}$ 26 $\int \sqrt{2x^4+x^2}\,dx$ 27 $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ 28 $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

29 $\int tg^2xdx$ 30 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 31 $\int \frac{2\cos xdx}{\sqrt{3senx+5}}$ 32$\int \frac{senxdx}{\cos^2 x}$ 33$\int \cos x.e^{-2senx+1}dx$ 34 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

35$\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$ 36 $\int \frac{dx}{(tgx+1)\cos^2 x}$ 37$\int \frac{dx}{1+2x^2}$ 38 $\int \frac{dx}{4+x^2}$ 39 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ 40 $\int \frac{dx}{x^2+5}$

41 $\int \frac{(arcsenx)^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 42 $\int \frac{x+3}{x+5}dx$ 43 $\int \frac{arctgxdx}{1+x^2}$ 44 $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ 45 $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx$

Integrales por partes

1.$\int arcctgxdx$ 2 $\int x\cos xdx$ 3 $\int x^2e^xdx$ 4 $\int x2^{-x}dx$ 5 $\int xsen(5x)dx$ 6 $\int xLxdx$ 7 $\int \cos^2 xdx$

8 $\int(x^2-2x+4)e^{-x}dx$ 9 $\int e^x\cos xdx$ 10 $\int \frac{Lx}{\sqrt{x}}dx$ 11 $\int sen(Lx)dx$ 12 $\int(Lx)^2dx$ 13. $\int x^2 3^x dx$

Integrales inmediatas o por partes

1.$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ 2 $\int \cos^3(5x)sen(5x)dx$ 3 $\int arcsenxdx$ 4 $\int \frac{arcsen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ 5 $\int x^2senxdx$

6 $\int \frac{4dx}{\cos^2(x/2)}$ 7 $\int x^3e^xdx$ 8 $\int x^3Lxdx$ 9 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 10 $\int \frac{e^{x+1}dx}{e^x+1}$ 11$\int \frac{senxdx}{1+\cos^2 x}$ 12 $\int \cos(Lx)dx$

13$\int e^xtg(e^x)dx$ 14 $\int \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 15 $\int e^xsenxdx$ 16 $\int e^x\cos(e^x)dx$ 17$\int \frac{2senx+2\cos x}{senx-\cos x}dx$

18 $\int \frac{3dx}{\cos^2(5x+1)}$ 19 $\int \frac{1+\cos x}{senx+x}dx$ 20 $\int \frac{3dx}{25+x^2}$ 21 $\int \sqrt{7x+3}\,dx$ 22 $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$ 23 $\int xL(x+1)dx$

24 $\int \frac{1-e^x}{e^{2x}}dx$ 25 $\int \frac{Lx}{x^3}dx$ 26 $\int \frac{(Lx)^2+1}{x}dx$ 27 $\int \frac{7dx}{\sqrt{49-x^2}}$ 28 $\int e^{2x}sen3xdx$ 29 $\int(x^2+x^3)e^xdx$

30 $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx$ 31 $\int \frac{x-3}{x^2+49}dx$ 32 $\int \frac{x^3dx}{1+x^8}$ 33 $\int \frac{\sec^2 x}{1+tg^2x}dx$ 34 $\int \frac{dx}{xLx}$ 35$\int(e^x-x^e)dx$

Integrales racionales

1.$\int \frac{dx}{x^3-7x+6}$ 2 $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+6}dx$ 3 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}dx$ 4 $\int \frac{x^2+x+3}{x^3-3x-2}dx$ 5 $\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3}dx$

6 $\int \frac{x^3-3x^2+5x-1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ 7$\int \frac{x^3-6x^2+7x+9}{(x-3^2(x+2)^2}dx$

Integrales por sustitución , trigonométricas y otras

1 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ 2 $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ 3. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 4 $\int x.(x-1)^{30}dx$ 5.$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 6$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

7 $\int \cos^2(3x)dx$ 8 $\int \cos^5 xdx$ 9 $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}}dx$ 10 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^3}}dx$ 11 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

12 $\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}dx$ 13 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ 14. $\int x.(x+1)^{20}dx$

15 $\int \frac{xdx}{x^4+9}$ 16 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$17 $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 18 $\int \frac{3dx}{1+2\sqrt{e^{-x}}}$ 19 $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$

20 $\int \frac{5.16^x+4^x}{16^x+1}dx$ 21 $\int \frac{dx}{\cos x}$ 22 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+3}dx$ 23 $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx$

24 Encontrar una primitiva de y=$\frac{e^x}{e^x+1}$que pase por el punto (0,2)

25 Hallar una función F(x) que verifique : $x^5F'(x)+x^3+2x=0$

26 Halla la ecuación de una función que pasa por los puntos P(0,3) y Q(-1,4), sabiendo que su derivada segunda es y’’= 6x-2

27 Si dos funciones diferentes tienen idénticas derivadas ¿en cuántos puntos se pueden cortar sus gráficas?

SOLUCIONES EJERCICIOS INTEGRAL INDEFINIDA

Integrales inmediatas

1.$\int(x^3+3x-2)dx = \frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}-2x+c;$

2.$\int \frac{x^2+2x+1}{3x}dx = \int \frac{1}{3}(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x})dx = \frac{1}{3}\int(x+2+\frac{1}{x})dx = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}+2x+L|x|)+c;$

3.$\int \frac{\sqrt{x}+x+6}{x^3}dx = \int\left(\frac{x^{1/2}}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{6}{x^3}\right)dx = \int(x^{-5/2}+x^{-2}+6.x^{-3})dx == \frac{x^{-3/2}}{-3/2}+\frac{x^{-1}}{-1}+6\frac{x^{-2}}{-2}+c =$

$= -\frac{2}{3\sqrt{x^3}}-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+c$

4.$\int \frac{(x+1)^2}{2x}dx = \int \frac{x^2+2x+1}{2x}dx == \frac{1}{2}\int(x+2+\frac{1}{x})dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}+2x+L|x|)+c$

5. $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{senx}dx = L|senx|+c;$ 6.$\int \frac{2\cos x}{1+sen^2x} = 2\int \frac{\cos x}{1+(senx)^2dx} = 2arctg(senx)+c$

; 7. $\int \frac{[L(x+1)]^2}{x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}[L(x+1)]^2dx = \frac{[L(x+1)]^3}{3}$ +c

8. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^6}}dx = \int\left(\frac{x^{1/2}}{x^{6/5}}+\frac{x^{2/3}}{x^{6/5}}\right)dx = \int(x^{-7/10}+x^{-8/15})dx = \frac{x^{3/10}}{3/10}+\frac{x^{7/15}}{7/15}+c = \frac{10}{3}\sqrt[10]{x^3}+\frac{15}{7}\sqrt[15]{x^7}+c$

9.$\int tg^2x\sec^2xdx = \frac{tg^3x}{3}+c;$ 10. $\int sen^5x.\cos x.dx = \frac{sen^6x}{6}+c$

11$\int sen^3xdx = \int senx.sen^2x.dx = \int senx.(1-\cos^2x)dx = \int senx.dx - \int senx.\cos^2xdx = -\cos x+\frac{\cos^3x}{3}+c$

12$\int \frac{Lx}{x}dx = \frac{(Lx)^2}{2}+c;$13. $\int e^{3\cos 2x}sen2xdx = -\frac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-3sen(2x).2)dx = -\frac{1}{6}e^{3\cos 2x}+C$

14. $\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}L|2x+3|+c$

15. $\int e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int 2.e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}+c;$ 16$\int \frac{dx}{2^x} = -\int -2^{-x}dx = -\frac{2^{-x}}{L2}+c$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}dx = \frac{x^{1/2}}{1/2}+c = 2\sqrt{x}+c$ 18. $\int senx.\cos x.dx = \frac{sen^2x}{2}+c$ o bien $\frac{-\cos^2x}{2}$

19.$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c;$

20.$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+5)^{-1/2}dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+5)^{1/2}}{1/2}+c = \frac{2\sqrt{(x^3+5)}}{3}+c$

21.$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2}+c = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+c$

22$\int x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}sen(x^2+1)+c$

23$\int \frac{\cos(Lx)}{x}dx = sen(Lx)+c;$ 24.$\int sen(5x)dx = \frac{1}{5}\int 5sen/(5x)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)+c$

25.$\int \frac{dx}{xLx} = \int \frac{1/x}{Lx}dx = L|Lx|+c$

26.$\int \sqrt{2x^4+x^2}\,dx = \int \sqrt{x^2(2x^2+1)}\,dx = \int x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/2}dx = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+1)^{3/2}}{3/2}+c =$

$= \frac{\sqrt{(2x^2+1)^3}}{6}+c$

27.$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = arctg(e^x)+c$ 28. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = L|1+e^x|+c$

29$\int tg^2xdx = \int(1+tg^2x-1)dx = \int(1+tg^2x)dx - \int dx = tgx-x+c$

30.$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}arcsen(x^2)+c$

31.$\int \frac{2\cos xdx}{\sqrt{3senx+5}}dx = \frac{2}{3}\int 3\cos x(3senx+5)^{-1/2}dx = \frac{2}{3}\frac{(3senx+5)^{1/2}}{1/2}+c = \frac{4}{3}\sqrt{3senx+5}+c$

32.$\int \frac{senx}{\cos^2x}dx = -\int -senx(\cos x)^{-2}dx = -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1}+c = \frac{1}{\cos x}+C$

33$\int \cos x.e^{-2senx+1}dx = \frac{-1}{2}\int -2\cos x.e^{-2senx+1}dx = -\frac{1}{2}e^{-2senx+1}+c$

34.$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = arcsen(e^x)+c$ 35.$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}dx = \frac{1}{3}arctg(x^3)+c$

36. $\int \frac{dx}{(tgx+1).\cos^2x} = \int \frac{1}{tgx+1}.\frac{1}{\cos^2x}dx = \int \frac{\sec^2x}{tgx+1}dx = L|tgx+1|+c$

37.$\int \frac{dx}{1+2x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}\,x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\,dx}{1+(\sqrt{2}\,x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}\,x)$+c

38$\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx/4}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4}.2 \int \frac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2} = 1/2arctg(x/2)+c$

39.$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{dx/4}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}} = \int \frac{dx/4}{\sqrt{1-(\frac{x}{4})^2}} = arcsen(x/4)+c$

40.$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx/5}{\frac{x^2}{5}+1} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{5}})^2+1} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \int \frac{dx/\sqrt{5}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{5} arctg(x/\sqrt{5}) + c$

41$\int \frac{(arcsenx)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(arcsenx)^3}{3} + c$

42$\int \frac{x+3}{x+5}dx = \int \frac{x+5-2}{x+5}dx = \int (1-\frac{2}{x+5})dx = x - 2L|x+5| + c$

43.$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \frac{(arctgx)^2}{2} + c$

44$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int e^{1/x}.\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx = -e^{1/x} + c$

45$\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{\sqrt[3]{x^2+6x}}dx = \frac{1}{2} \int (2x+6)(x^2+6x)^{-1/3} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+6x)^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}}{4} + c$

Integrales por partes

1.$\int arcctgxdx$=$xarcctgx - \int \frac{-x}{1+x^2}dx = xarcctgx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = xarcctgx + \frac{1}{2}L|1+x^2| + c$
 u=arcctgx; du=$\frac{-1}{1+x^2}dx$
 dv=dx; v=x

2. $\int x\cos xdx = x.senx - \int senxdx = xsenx + \cos x + c$
 u=x; du=dx
 cosxdx=dv; v=senx

3.$\int x^2e^xdx$ =x^2e^x-$\int 2xe^xdx$=x^2e^x-(2xe^x-$\int 2e^xdx) = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + c = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$
 u=x^2; du=2xdx|u=2x; du=2dx
 dv=e^xdx: v=e^x |dv=e^xdx; v=e^x

4.$\int x2^{-x}dx = -x\frac{2^{-x}}{L2} + \int \frac{2^{-x}}{L2}dx = -x\frac{2^{-x}}{L2} - \frac{2^{-x}}{(L2)^2} + c$
 u=x; du=dx
 dv=2^{-x}dx; v=$\int 2^{-x}dx = -\int -2^{-x}dx = -\frac{2^{-x}}{L2}$

5.$\int xsen(5x)dx = -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\frac{1}{5}\int 5\cos(5x)dx = -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}sen(5x) + c$
 u=x; du=dx
 dv=sen(5x)dx ; v=$\int sen(5x)dx = \frac{1}{5}\int 5sen(5x)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

6$\int xLxdx = \frac{x^2}{2}Lx - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2}Lx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}Lx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c$
 u=Lx; du=1/xdx
 dv=xdx; v=x^2/2

7.$\int \cos^2 xdx = senx.\cos x + \int sen^2 xdx = senx\cos x + \int (1-\cos^2 x)dx = senx\cos x + x - \int \cos^2 xdx \Rightarrow$
 u=cosx; du=-senxdx | pasando esa integral para el primer miembro quedaría
 dv=cosxdx; v=senx | 2 $\int \cos^2 xdx = senx\cos x + x \Rightarrow \int \cos^2 xdx = \frac{senx\cos x + x}{2}$ +C

8.$\int (x^2-2x+4)e^{-x}dx$=-(x^2-2x+4)e^{-x}+$\int (2x-2)e^{-x}dx$=-(x^2-2x+4)e^{-x}-(2x-2)e^{-x}-$-\int -2e^{-x}dx] =$
 u=(x^2-2x+4); du=(2x-2)dx |u=(2x-2); du=2dx |=-(x^2-2x+4)e^{-x}-(2x-2)e^{-x}-2e^{-x}+c=
 dv=e^{-x}dx; v=-e^{-x} |dv=e^{-x}dx; v=-e^{-x} | =(-x^2-4)e^{-x}+C

9.$\int e^x\cos xdx$ =e^xsenx-$\int e^xsenxdx = e^xsenx - (-e^x\cos x + \int e^x\cos xdx) = e^xsenx + e^x\cos x - \int e^x\cos xdx \Rightarrow$
u=e^x ; du=e^xdx |u=e^x; du=e^xdx |pasando la integral al otro miembro
dv=cosxdx; v=senx |dv=senxdx; v=-cosx |$\int e^x\cos xdx = \frac{e^xsenx + e^x\cos x}{2}$ +C

10.$\int \frac{Lx}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,Lx - \int 2\sqrt{x}\,.\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\,Lx - 2\int \frac{x^{1/2}}{x}dx = 2\sqrt{x}\,Lx - 2\int x^{-1/2}dx = 2\sqrt{x}\,Lx - 2\frac{x^{1/2}}{1/2} + c =$

u=Lx; du=1/xdx $=2\sqrt{x}\,Lx - 4\sqrt{x} + c$

dv=$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = x^{-1/2}dx; v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$

11.$\int sen(Lx)dx$ =xsen(Lx)--$\int \cos(Lx)dx$=xsen(Lx)-[xcos(Lx)+$\int sen(Lx)dx] = xsen(Lx) - x\cos(Lx)$ -$\int sen(Lx)dx$

u=sen(Lx); du=$\frac{1}{x}\cos(Lx)dx$| u=cos(Lx); du=$-\frac{1}{x}sen(Lx)$| pasando al primer miembro la integr

dv=dx; v=x | dv=dx; v=x | $\int sen(Lx)dx = \frac{xsen(Lx) - x\cos(Lx)}{2}$

12 . $\int (Lx)^2dx$=x(Lx)^2 - 2$\int Lxdx$=x(Lx)^2-2[xLx-$\int dx] = x(Lx)^2 - 2xLx + 2x + c$

u=(Lx)^2; du=2Lx.$\frac{1}{x}dx$|u=Lx; du=$\frac{1}{x}dx$

dv=dx; v=x |dv=dx; v=x

13 .$\int x^2 3^x dx = \frac{x^2 3^x}{L3} - \frac{2}{L3}\int x3^x dx = \frac{x^2 3^x}{L3} - \frac{2}{L3}\left(\frac{x3^x}{L3} - \frac{1}{L3}\int 3^x dx\right) = \frac{x^2 3^x}{L3} - \frac{2x3^x}{(L3)^2} + \frac{2.3^x}{(L3)^3}$+c

u=x^2; du=2xdx |u=x; du=dx

dv=3^x; v=$\frac{3^x}{L3}$ |dv=3^x; v=$\frac{3^x}{L3}$

Integrales inmediatas o por partes

1.$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{sen(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = -2\cos(\sqrt{x})$+c ; 2.$\int \cos^3(5x)sen(5x)dx = -\frac{1}{5}\frac{\cos^4(5x)}{4}$+c

3.$\int$arcsenx dx=x.arcsenx-$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ =x.arcsenx+ $\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-1/2}dx$ =x.arcsenx+ $\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2}$+c=

u=arcsenx; du=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ | =x.arcsenx+$\sqrt{1-x^2}$ +c

dv=dx; v=x |

4. $\int \frac{arcsen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,arcsen(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\sqrt{x}\,arcsen(\sqrt{x}) + \int -(1-x)^{-1/2}dx =$

u=arcsen$(\sqrt{x})$; du=$\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ | =2$\sqrt{x}$ arcsen($\sqrt{x}$) + $\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2}$ +c =

dv=$\frac{1}{\sqrt{x}}$; v=$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$ | =2$\sqrt{x}\,arcsen(\sqrt{x}) + 2\sqrt{1-x}$ +c

5.$\int x^2 senxdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx = -x^2\cos x + 2(xsenx - \int senxdx) = -x^2\cos x + 2xsenx + 2\cos x$+c

x^2=u; du=2xdx | u=x; du=dx

senxdx=dv; v=-cosx | cosxdx=dv; v=senx

6. $\int \frac{4dx}{\cos^2(x/2)} = 4\int \sec^2(x/2)dx = 8\int \frac{1}{2}\sec^2(x/2)dx = 8tg(x/2)$+c

7. $\int x^3e^xdx = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx = x^3e^x - 3(x^2e^x - 2\int xe^xdx) = x^3e^x - 3x^2e^x + 6(xe^x - \int e^xdx) =$

x^3=u; 3x^{2}dx=du |x^2=u; 2xdx=du |x=u; dx=du | =x^{3}e^x-3x^{2}e^x+6xe^x-6e^x+c

e^{x}dx=dv; v=e^x |e^{x}dx=dv; v=e^x |e^{x}dx=dv; v=e^x |

8.$\int x^3Lxdx = \frac{x^4.Lx}{4} - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4.Lx}{4} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}$ +c

Lx=u: du=1/xdx

x^{3}dx=dv; v=x^4/4

9.$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx$ =arcsen(x/2)+c

10.$\int \frac{e^{x+1}}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x.e}{e^x+1}dx = e\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = eL|e^x+1|$+c

11.$\int \frac{senxdx}{1+\cos^2 x} = -arctg(\cos x)$+c

12. $\int \cos(Lx)dx = x.\cos(Lx) + \int sen(Lx)dx = x\cos(Lx) + xsen(Lx) - \int \cos(Lx)dx \Rightarrow$

cos(Lx)dx=u;du=-sen(Lx).$\frac{1}{x}$dx|sen(Lx)=u; du=cos(Lx)$\frac{1}{x}$dx| $2\int \cos(Lx)dx = x\cos(Lx) + xsen(Lx) \Rightarrow$

dx=dv;v=x |dx=dv; v=x | $\Rightarrow \int \cos(Lx)dx = \frac{x\cos(Lx)+xsen(Lx)}{2}$ +c

13.$\int e^x tg(e^x)dx = -\int \frac{-e^x sen(e^x)}{\cos(e^x)}dx = -L|\cos(e^x)|$

14.$\int \frac{1+tg^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+tg^2(\sqrt{x}))dx = 2tg(\sqrt{x})$+c

15.$\int e^x senxdx = -e^x\cos x + \int e^x \cos xdx = -e^x\cos x + e^x senx - \int e^x senxdx \Rightarrow 2\int e^x senxdx = -e^x\cos x + e^x senx \Rightarrow$

e^x=u; e^xdx=du |e^x=u; e^xdx=du | $\int e^x senxdx = \frac{-e^x\cos x + e^x senx}{2}$ +c

sendx=dv; v=-cosx | cosxdx=dv; v=senx |

16. $\int e^x\cos(e^x)dx = sen(e^x)$+c; 17.$\int \frac{2senx+2\cos x}{senx-\cos x}dx = 2\int \frac{\cos x + senx}{senx - \cos x}dx = 2L|senx-\cos x|$+c

18$\int \frac{3dx}{\cos^2(5x+1)}dx = \frac{3}{5}\int 5\sec^2(5x+1)dx = \frac{3}{5}tg(5x+1)$+c

19.$\int \frac{1+\cos x}{senx+x}dx = L|senx+x|$+c; 20.$\int \frac{3dx}{25+x^2} = \int \frac{3/25}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}dx = \frac{3}{5}\int \frac{1/5}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}dx = \frac{3}{5}arctg(x/5)$+c

21.$\int \sqrt{7x+3}\,dx = \frac{1}{7}\int 7(7x+3)^{1/2}dx = \frac{1}{7}\frac{(7x+3)^{3/2}}{3/2}$+c = $\frac{2\sqrt{(7x+3)^3}}{21}$ +c

22. $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx = \int tgx.\sec^2 xdx = \frac{tg^2 x}{2}$+c

23

$\int xL(x+1)dx = \frac{x^2L(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{x^2L(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}dx = \frac{x^2L(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int(x-1)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx =$

=

$\frac{x^2L(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}L|x+1|$+c

----

u=L(x+1); du=$\frac{dx}{x+1}$|

xdx=dv; v=$x^2/2$ |

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

24$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}}dx = \int(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{e^x}{e^{2x}})dx = \int e^{-2x}dx - \int e^{-x}dx = -\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx + \int -e^{-x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x}$ +c

25$\int \frac{Lx}{x^3}dx = -\frac{Lx.}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{Lx}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$ +c $= \frac{-2Lx-1}{4x^2}$ +c

u=Lx; du=1/x dx

dv=$\frac{1}{x^3}dx = x^{-3}dx$; v=-$\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{2x^2}$

26. $\int \frac{(Lx)^2+1}{x}dx = \int \frac{(Lx)^2}{x}dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{(Lx)^3}{3} + L|x|$ +c

27$\int \frac{7dx}{\sqrt{49-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{7}\right)^2}} = 7\int \frac{1/7}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{7}\right)^2}} = 7arcsen(x/7)$+c

28.$\int e^{2x}sen(3x)dx = -\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)dx = -\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{e^{2x}sen(3x)}{3} - \frac{2}{3}\int e^{2x}sen(3x)dx\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int e^{2x}sen(3x)dx = -\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2e^{2x}sen(3x)}{9} - \frac{4}{9}\int e^{2x}sen(3x)dx \Rightarrow$

$\frac{13}{9}\int e^{2x}sen(3x)dx = -\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2e^{2x}sen(3x)}{9} \Rightarrow \int e^{2x}sen(3x)dx = \frac{-\frac{e^{2x}\cos(3x)}{3} + \frac{2e^{2x}sen(3x)}{9}}{13/9}$

u=e^{2x}; u=$2e^{2x}$ |=e^{2x}: du=$2e^{2x}$

dv=sen(3x)dx; v=$-\frac{\cos(3x}{3}$ |dv=cos(3x)dx; v=$\frac{sen(3x}{3}$

29. $\int(x^2+x^3)e^x dx=(x^2+x^3)e^x-\int(2x+3x^2)e^x dx=(x^2+x^3)e^x-[(2x+3x^2)e^x-\int(2+6x)e^x dx]=$
$=(x^2+x^3)e^x-(2x+3x^2)e^x+(2+6x)e^x-6\int e^x dx=(x^2+x^3)e^x-(2x+3x^2)e^x+(2+6x)e^x-6e^x$+c

partes: 1:u=(x^2+x^3); du=$(2x+3x^2)$dx |2:u=$(2x+3x^2)$dx; du=(2+6x)dx|3: u=(2+6x); du=6dx
dv=e^xdx; v=e^x | dv=e^xdx; v=e^x | dv=exdx; v=e^x

30. $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx=-\int e^{2x^2-x+3}(4x-1)dx=-e^{2x^2-x+3}$ +c

31. $\int \frac{x-3}{x^2+49}dx=\int \frac{x}{x^2+49}dx-3\int \frac{1}{x^2+49}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+49}dx-3\int \frac{1/49}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1}dx=$
$=\frac{1}{2}L|x^2+49|-\frac{3}{7}\int \frac{1/7}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}L|x^2+49|-\frac{3}{7}arctg(x/7)$+c

32 $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}=\frac{1}{4}arctg(x^4)$ +c

33. $\int \frac{\sec^2 x}{1+tg^2 x}dx=arctg(tgx)$ +c=x+c

34 $\int \frac{dx}{xLx}=L|Lx|$+c

35 $\int(e^x-x^e)dx=e^x-\frac{x^{e+1}}{e+1}$+c Nota: e=constante; x^e es una función potencia)

Integrales racionales

1. $\int \frac{dx}{x^3-7x+6}$ Es una integral racional con grado del denominador mayor que el del numerador. Buscamos por Ruffini las raíces del denominador x^3-7x+6=0⇒{x=1,x=2,x=-3}
Descomponemos la fracción:
$\frac{1}{x^3-7x+6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2)}{x^3-7x+6}$
para x=1 queda 1=-4A⇒A=-1/4; para x=2 1=5B ⇒B=1/5; para x=-3 1=20C⇒C=1/20

$\int \frac{dx}{x^3-7x+6}=\int \frac{-1/4}{x-1}dx+\int \frac{1/5}{x-2}dx+\int \frac{1/20}{x+3}dx=-\frac{1}{4}L|x-1|+\frac{1}{5}L|x-2|+\frac{1}{20}L|x+3|$ + c

2. $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+6}dx$ Se trata de una integral racional con el grado del numerador mayor que el del denominador. Tenemos que comenzar dividiendo esos polinomios, obteniéndose de cociente (x+5) y de resto(19x-29). Así pues $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{(x^2-5x+6)(x+5)+(19x-29)}{x^2-5x+6}dx=$
$=\int(x+5)dx+\int \frac{19x-29}{x^2-5x+6}dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int \frac{19x-29}{x^2-5x+6}dx$. Esta última integral es racional con mayor grado en el denominador, buscamos las raíces de este: x^2-5x+6=0⇒ $\{x=2, x=3\}$ y descomponemos la fracción $\frac{19x-29}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}$ Dando valores se obtiene: para x=3 28=B; para x=2 9=-A⇒ $A=-9$; Así
:$\int \frac{19x-29}{x^2-5x+6}=\int \frac{-9}{x-2}dx+\int \frac{28}{x-3}dx$ =-9L|x-2|+28 L|x-3|+c . Y la integral inicial queda
$\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+6}dx=\frac{x^2}{2}+5x$ -9L|x-2|+28 L|x-3|+c .

3. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$ Se trata de una integral racional con grado mayor en el denominador. Las raíces de este son x=1, raíz simple y x= -1, raíz doble. Por tanto
$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$ dando valores para x=1 4A=1; A=1/4; para x=-1 -2c=1; c=-1/2; para x=0 A-B-C=1⇒
B=-1+A-C=-1+1/4+1/2=-1/4; $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}=\int \frac{1/4}{x-1}dx+\int \frac{-1/4}{x+1}dx+\int \frac{-1/2}{(x+1)^2}dx=$
$=\frac{1}{4}L|-1|-\frac{1}{4}L|x+1|-\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}$+c

4.$\int \frac{x^2+x+3}{x^3-3x-2}dx = \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}dx = L|x-2| + (x+1)^{-1}$+c

La integral es racional con grado mayor grado en el denominador. Hallamos por Ruffini las raíces de x^3-3x-2=0 obteniendo x=2 raíz simple y x=-1 raíz doble. Descomponemos la fracción:$\frac{x^2+x+3}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}$

para x=2 9A=9; A=1; para x=-1 -3C=3; C=-1; para x=0 3= A-2B-2C luego B=0

5.$\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3}dx$ Integral racional con grado mayor en el denominador. Este tiene una única raíz x=1 que es raíz triple. Por tanto la descomposición quedaría:

$\frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$ dando valores

pra x=1 1=C; para x=0 2=A-B+C; para x=-1 7=4A-2B+C. Resolviendo ese sistema:

C=1; B=1; A=2, luego $\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3} = \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{(x-1)^3}dx =$

=2L|x-1|-$(x-1)^{-1}$- +$\frac{(x-1)^{-2}}{-2}$ +c

6.$\int \frac{x^3-3x^2+5x-1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ Comenzamos dividiendo el numerador entre el denominador ya que son del mismo grado.Obtenemos como cociente 1 y como resto x^2+1

$\int \frac{x^3-3x^2+5x-1}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \int \frac{(x^3-3x^2+5x-1)+x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \int dx + \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx = x + \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

Esta integral tiene ya menor el grado del numerador. Buscamos por ruffini las raíces del denominador que son:x=1 raíz dole y x=2 raiz simple. Descomponemos la fracción

$\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$

Dando valores A=-4, B=-2, C=5

$\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx = \int \frac{-4}{x-1}dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{5}{x-2}dx$= -4L|x-1|+2$(x-1)^{-1}$+5L|x-2|+c y la integral de partida será:$\int \frac{x^3-3x^2+5x-1}{x^3-4x^2+5x-2}dx = x-4$L|x-1|+2$(x-1)^{-1}$+5L|x-2|+c

7. $\int \frac{x^3-6x^2+7x+9}{(x-3)^2(x+2)^2}dx$ Integral racional con mayor grado en el denominador. Este tiene por raíces x=3, raíz doble y x=-2 también raíz doble. Procedemos a descomponer la fracción:

$\frac{x^3-6x^2+7x+9}{(x-3)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2} = \frac{A(x-3)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+2)(x-3)^2 + D(x-3)^2}{(x-3)^2(x+2)^2}$

Dando valores obtenemos: A=-16/125; B=3/25; C=141/125; D=-37/25. Por tanto

$\int \frac{x^3-6x^2+7x+9}{(x-3)^2(x+2)^2}dx = \int \frac{-16/125}{(x-3)}dx + \int \frac{3/25}{(x-3)^2}dx + \int \frac{141/125}{(x+2)}dx + \int \frac{-37/25}{(x+2)^2}dx =$

$= -\frac{16}{125}L|x-3| + \frac{3}{25}\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + \frac{141}{25}L|x+2| - \frac{37}{25}\frac{(x+2)^{-1}}{-1}$ +c

Integrales por sustitución, trigonométricas y otras

1.$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2L|t+1| + c = 2L|\sqrt{x}+1| + c$

(x=t^2; dx=2tdt; t$\sqrt{x}$)

2.$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1}{t}.2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2(\frac{t^3}{3}+t) + c = 2(\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3} + \sqrt{x-1}) + c$

(x-1=t^2; dx=2tdt; t=$\sqrt{x-1}$)

3. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{t}\cdot\frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int(t^2+1)dt = 2(\frac{t^3}{3}+t)+c = 2(\frac{\sqrt{(e^x-1)^3}}{3}+\sqrt{e^x-1})+c$

(t=$\sqrt{e^x-1}$; $t^2=e^x-1$; $e^x=t^2+1$; $e^x dx=2tdt$; $dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}$)

4. $\int x(x-1)^{30}dx = \int(t+1)t^{30}dt = \int(t^{31}+t^{30})dt = \frac{t^{32}}{32}+\frac{t^{31}}{31}+c = \frac{(x-1)^{32}}{32}+\frac{(x-1)^{31}}{31}+c$

(x-1=t; x=t+1; dx=dt)

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x^2.xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{(t^2-1)tdt}{t} = \int(t^2-1)dt = \frac{t^3}{3}-t+c = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}-\sqrt{x^2+1}+c$

(t=$\sqrt{x^2+1}$; $t^2=x^2+1$; $x^2=t^2-1$; 2xdx=2tdt; xdx=tdt)

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = (*) = 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1} = 6(\int(t^2-t+1)dt - \int \frac{1}{t+1}dt) =$

($x=t^6$; $dx=6t^5dt$; t= $\sqrt[6]{x}$) | $=6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t$-L|t+1|$=6(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3}-\frac{\sqrt[6]{x^2}}{2}+\sqrt[6]{x}-L|\sqrt[6]{x}|+c$

|

(*) (dividiendo el numerador entre el denominador y escribiendodividendo=divisorxcociente+ +resto)

7 $\int \cos^2(3x)dx = \int \frac{1+\cos(6x)}{2}dx = \frac{x}{2}+\frac{sen(6x)}{12}+c$ Hemos utilizado la fórmula del coseno del ángulo mitad. También podría haberse hecho por partes de forma similar al ejercicio 7 de integrales por partes

8 $\int \cos^5 xdx = \int \cos^4 x.\cos xdx = \int(1-sen^2x)^2\cos xdx = \int(1-t^2)^2dt = \int(1-2t^2+t^4)dt = t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c$

(senx=t; cosxdx=dt) |=senx$-\frac{2sen^3x}{3}+\frac{sen^5x}{5}+c$

9. $\int \frac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{3/5-1/2}dx + \int x^{5/4-1/2}dx = \int x^{1/10}dx + \int x^{3/4}dx =$

$=\frac{x^{11/10}}{11/10}+\frac{x^{7/4}}{7/4}+c = \frac{10}{11}\sqrt[10]{x^{11}}+\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+c$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x^3}}dx = \int \frac{t^2}{t^8-t^9}6t^5dt = 6\int \frac{dt}{t-t^2}$ Esta integral es racional, las raíces del

($x=t^6$; $dx=6t^5dt$; t=$\sqrt[6]{x}$) |denominador son t=0 y t=1, su coeficiente principal es -1

|Realizamos la descomposición de la fracción

$\frac{1}{t-t^2} = \frac{A}{t}+\frac{B}{(1-t)} = \frac{A(1-t)+Bt}{t-t^2}$ Para t=0 obtenemos B=1; para t=1 obtenemos A=1

luego: $\int \frac{1}{t-t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{(1-t)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{-1}{(1-t)}d = L|t|-L|1-t|$+c

Así pues la integral de partida dará $6(L|t|-L|1-t|)$+c=$6(L|\sqrt[6]{x}|-L|1-\sqrt[6]{x}|+c$

11. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = 1/2arcsen(x^2)+c$

12. $\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t-3t^2}{1+t}\frac{dt}{t} = \int \frac{1-3t}{1+t}dt = (*) = \int \frac{-3(1+t)+4}{1+t}dt = \int -3dt + \int \frac{4}{1+t}dt =$

($e^x=t$; $e^x dx=dt$; $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$) | =-3t+4L|1+t|+c=$-3e^x$+4L|1+$e^x$|+c

(*) dividiendo numerador entre denominador y poniendo dividendo = divisor.cociente + + resto.

13. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} \underset{(*)}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int 2dt - \int \frac{2dt}{1+t} = 2t-2L|1+t|+c = 2\sqrt{x+1}-2L|1+\sqrt{x+1}|+c$

($x=t^2-1$; dx=2tdt; $x+1=t^2$; t=$\sqrt{x+1}$) (*) haciendo la división de los polinomios

14. $\int x(x+1)^{20}dx = \int(t-1)t^{20}dt = \int(t^{21}-t^{20})dt = \frac{t^{22}}{22}-\frac{t^{21}}{21}+c = \frac{(x+1)^{22}}{22}-\frac{(x+1)^{21}}{21}+c$

(x+1)=t; dx=dt; x=t-1

15.$\int \frac{xdx}{x^4+9} = \int \frac{1/9xdx}{(\frac{x^2}{3})^2+1} = \frac{1}{9}\frac{3}{2}\int \frac{2x/3}{(\frac{x^2}{3})^2+1}dx = 1/6arctg(x^2/3)+c$

16$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2(\sqrt{x})dx = 2tg(\sqrt{x})+c$

17.$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dt/t}{t+1/t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t)+c = arctg(e^x)+c$

(e^x=t; e^{-x}=1/t; e^xdx=dt;dx=$\frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$)

18. $\int \frac{3dx}{1+2\sqrt{e^{-x}}} = 3\int \frac{-2dt/t}{1+2t} = -6\int \frac{dt}{t+2t^2} = (*) = -6(L|t|-L|t+1/2|+c = -6(L(\sqrt{e^{-x}})-L|\sqrt{e^{-x}}+1/2|+c$

(e^{-x}=t^2; -e^{-x}dx=2tdt; dx=-2tdt/t^2=-2dt/t)

(*)La integral es racional. Las raíces del denominador son t=0 y t=-1/2. El coeficiente principal es 2. Por tanto la descomposición de la fracción sería:

$\frac{1}{t+2t^2} = \frac{A}{2t} + \frac{B}{(t+1/2)} = \frac{A(t+1/2)+B.2t}{2t^2+t}$ dando valores obtenemos A=2, B=-1

Por tanto$\int \frac{1}{t+2t^2}dx = \int \frac{2}{2t}dt + \int \frac{-1}{(t+1/2)}dt = L|t| - L|t+1/2|+c$

19.$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx = \int \frac{t+1}{t-1}\frac{dt}{t} = \int \frac{t+1}{t(t-1)}dt$ (Integral racional)

20.$\int \frac{5.16^x+4^x}{16^x+1}dx = \int \frac{5t^2+t}{t^2+1}\frac{dt}{t.L4} = \frac{1}{L4}\int \frac{5t^2+t}{t(t^2+1)}dt = \frac{1}{L4}\int \frac{5t+1}{t^2+1}dt = \frac{1}{L4}\int\left(\frac{5t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$

$=\frac{1}{L4}(\frac{5}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt) = \frac{1}{L4}(\frac{5}{2}L|t^2+1| + arctg\ t) = \frac{1}{L4}(\frac{5}{2}L|16^x+1| + arctg4^x)+c$

(4^x=t; 4^x.L4dx=dt; dx=$\frac{dt}{4^x.L4} = \frac{dt}{t.L4}$)

21.$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-sen^2x} = \int \frac{dt}{1-t^2}$(integral racional)

(senx=t; cosxdx=dt; dx=dt/cosx)

22.$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+3}dx = \int \frac{t}{t+3}3t^2dt = 3\int \frac{t^3}{t+3}dt = (*) = 3\int \frac{(t+3)(t^2-3t+9)-27}{t+3}dt = 3(\int(t^2-3t+9)dt - 27\int \frac{dt}{t+3}) =$

$=3(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + 9t - 27L|t+3|) + c = x - 9/2\sqrt[3]{x^2} + 27\sqrt[3]{x} - 81L|\sqrt[3]{x}+3|+c$

($\sqrt[3]{x}=t$; x=t^3; dx=3t^2) (*) dividiendo el numerador entre el denominador

23.$\int \frac{\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^{1/3}-4x^{1/2}+x}{x^{1/2}}dx = \int(x^{-1/6}-4+x^{1/2})dx = \frac{x^{5/6}}{5/6} - 4x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c =$

$=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

24.$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = L|e^x+1|+c$=F(x) . Como F(x) pasa por el punto (0,2)

$\Rightarrow 2 = L|e^0+1|+c; 2=L2+c \Rightarrow c = 2-L2 \Rightarrow$ F(x)=L|e^x+1|+2-L2

25. x^5F'(x)+x^3+2x=0$\Rightarrow$F'(x)=$\frac{-x^3-2x}{x^5}$ $\Rightarrow$F(x)=$\int \frac{-x^3-2x}{x^5}dx = -\int x^{-2}dx - 2\int x^{-4}dx = -\frac{x^{-1}}{-1} - 2\frac{x^{-3}}{-3} + C \Rightarrow$

F(x)=$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x^3} + c$

26. y''=6x-2$\Rightarrow$ y'=$\int(6x-2)dx = 3x^2-2x+c \Rightarrow$ y=$\int(3x^2-2x+c)dx = x^3-x^2+cx+d$. Como la función f(x) pasa por (0,3) y(-1,4), se verifica que:$\begin{cases} 3 = d \\ 4 = -1-1-c+d \end{cases} \Rightarrow d = 3$; c=-3

Es decir, la función buscada es f(x)=x^3-x^2-3x+3

27. F'(x)=G'(x)$\Rightarrow$F(x)=G(x)+c. Si c=0 ambas funciones son iguales y se cortan en todos sus puntos. Si c$\neq$0 la gráfica de F(x) resulta al trasladar la de G(x) verticalmente c unidades hacia arriba o hacia abajo según c sea positivo o negativo y por tanto no se cortan.