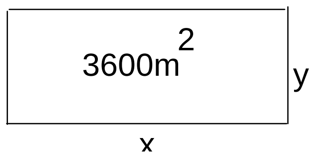
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los problemas de optimización de funciones son una de las aplicaciones más inmediatas e interesantes del cálculo de derivadas. Consisten en optimizar (máximiza o minimizar) una función sometida a una serie de condiciones. Los más usuales son minimizar costes o maximizar beneficios.

Por ejemplo: Un pastor quiere vallar un campo rectangular para pastar sus ovejas. Cúales han de ser las dimensiones si necesita tener 3600m^2 de hierba y quiere que el gasto sea mínimo



En primer lugar, del enunciado del problema debemos deducir cual es la expresión algebraica de la función que queremos optimizar. En nuestro ejemplo, el gasto mínimo se produce cuando el perímetro de la valla es mínimo, por tanto la función a optimizar será: P=2x+2y

En general, esta expresión algebraica dependerá de más de una variable, por lo que, a partir de las condiciones, debemos encontrar ecuaciones que nos permitan despejar todas las variables en función de una sola, de forma que al sustituirlas en la función a optimizar esta dependa de una única variable.

En nuestro ejemplo, nos dicen que el área ha de valer 3600m^2, por tanto x.y=3600$\Rightarrow$y=$\frac{3600}{x}$.
Sustituyendo, la función a optimizar queda P=2x+2$\frac{3600}{x}$
Ahora encontraremos el valor de x en la que esa fnción tiene un mínimo: P'=2-$\frac{7200}{x^2}$=0$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x^2-7200}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=3600 \Rightarrow \begin{cases} x=60 \\ x=-60 \end{cases}$ La solución x=-60 no sería válida para nuestro ejercicio, al ser x una longitud, veamos si en x=60 la función tiene un mínimo P''=$\frac{14400x}{x^4}$;
P''(60)>0$\Rightarrow$x=60 mínimo. Por último hallamos el valor de la otra variable:

$$y=\frac{3600}{x}=\frac{3600}{60}=60$$

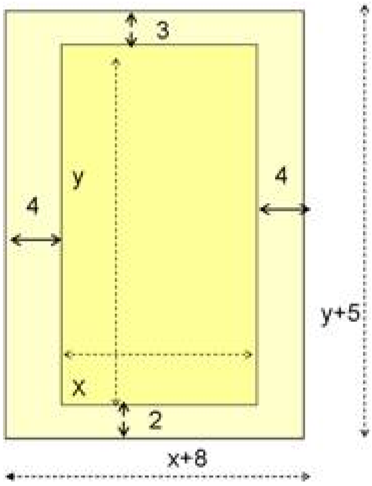
En resumen, los pasos que debemos dar para resolver un problema de optimización son los siguientes:

1. Determinar la expresión de la función que debe hacerse máxima o mínima
2. Si la expresión anterior depende de más de una variable, debemos buscar en las condiciones del problema las ecuaciones que nos permiten relacionarlas.
3. Despejar, a partir de esas ecuaciones, todas las variables en función de una sola y sustituirlas en la función a optimizar para que ésta quede expresada como una función de una única variable.
4. Buscar los máximos o mínimos relativos de dicha función. Para ello:
    A) Hallaremos los valores que hacen cero su primera derivada
    B) Sustituiremos dichos valores en la segunda derivada para decidir si corresponden a un máximo o un mínimo.
5. Comprobar que las soluciones obtenidas tienen sentido según el enunciado del problema

EJEMPLOS

1. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 1000 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los

márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.



Función a optimizar: S=(x+8).(y+5)

x.y=1000; y=1000/x

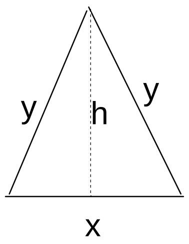
S=(x+8)($\frac{1000}{x}+5$)=$\frac{8000}{x}+5x+1040$

S'=$\frac{-8000}{x^2}+5=0 \Rightarrow \frac{-8000+5x^2}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=1600 \Rightarrow \begin{cases} x=40 \\ x=-40 \end{cases}$

S''=$\frac{10x.x^2-(-8000+5x^2).2x}{x^4}=\frac{16000}{x^3}$. S''(40)>0 luego en x=40 tiene un mínimo.

Las dimensiones serán x+8=48cm , y+5=$\frac{1000}{40}+5=$30 cm.

2. De todos los triángulos isósceles de 12 cm de perímetro hallar las dimensiones del que tenga área máxima.



S=$\frac{x.h}{2}$; Perímetro=2y+x=12⇒ $x=12-2y$

Además por el teorema de Pitágoras sabemos que h^2+$\left(\frac{x}{2}\right)^2=y^2$

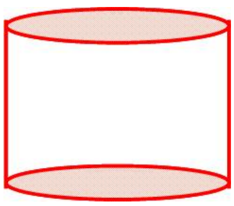
Por lo que h=$\sqrt{y^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{y^2-\left(\frac{12-2y}{2}\right)^2}=\sqrt{y^2-(6-y)^2}=\sqrt{12y-36}$

S=$\frac{1}{2}(12-2y)\sqrt{12y-36}$; S'=$\frac{1}{2}(-2\sqrt{12y-36}+(12-2y)\frac{12}{2\sqrt{12y-36}})$

operando S'=$\frac{144-36y}{\sqrt{12y-36}}=0 \Rightarrow y=4$ Sustituyendo en S''

comprobamos que en y=4 tiene un máximo. Por tanto la solución será: y=4, x=12-2.4=4. Es decir el triángulo debe ser equilátero de lado 4

3. Se quieren fabricar latas cilíndricas para envasar 500 cm^3 de refresco. ¿Cómo debemos hacerlo para que el coste de la lata sea mínimo?



S=2π r h+2πr^2 ; V=500=π r^{2}h⇒h=$\frac{500}{\pi r^2}$. Sustituyendo

S=$2\pi r\frac{500}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{1000}{r}+2\pi r^2$; S'=$\frac{-1000}{r^2}+4\pi r=0 \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$

S''=$\frac{2000}{r^3}+4\pi$; S''($\sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$) > 0 luego tiene un mínimo

PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. Descomponer 18 como suma de dos números positivos, de forma que el producto del cuadrado de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.
2. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del camino cuesta a 80 euros el metro y la de los otros lados 10 eros el metro, hallar el área del mayor campo que puede cercarse con 28.800 euros.
3.Con un alambre de un metro quermos construir el borde de un rectángulo de área máxima ¿Qué dimensiones tendría?
4.Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.
5. Una piedra preciosa pesa 12 gr y tiene un valor de 14.400 euros. Sabiendo que el valor de una pieda preciosa es proporcional al cuadrado de su peso, calcular cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos si la depreciación es máxima.
6. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3.600 m^2 de superficie para poder cercarlo mediante una valla de longitud mínima.
7. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Hallar las dimensiones del cilindro para que sus costes de fabricación sean mínimos
8.Dada la función $y=ax^3+bx^2+cx+d$, hallar los coeficientes a,b,c,d sbiendo que la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión (-1,0) es: $y =-3x+3$ y que la función presenta un extremo en $x=0$
9. Hallar los coeficientes a,b,c y d, sabiendo que la curva $y=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un máximo en el punto M(0,4) y un mínimo en m(2,0)
10. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm. ¿Cuál es el de área máxima?
11. Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima ¿cuál debe ser el radio de la base?
12. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.
13. De todos los rectángulos de área 100 dm^2 halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.
14. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m Encuentra un punto sobre esa altura tal que la suma de las distancias a los tres vértices sea mínima.
15. Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.
16. Dada la función f:`1,e]--------→R definida por $f(x)=\frac{1}{x}+Lx$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendiente máxima.
17. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.
18. Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.
19.Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja, sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo. Si la altura de la caja no puede pasar de 2 dm ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?

20. Dado r>0, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2+y^2=r$, la suma x+y es máxima cuando x=y
21. El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por: $f(t)=9-(t-2)^2$, $0\leq t\leq 4'5$. Deduce qué valor de t alcanzó la empresa su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.
22. De todas las rectas que pasan por el punto (1,2) encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.
23. Calcula la generatriz y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada, cuya área total (incluyendo las dos tapas) es de 150 cm^2, para que su volumen sea máximo.
24. Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo, entre los dos postes, con los extremos de estos. ¿Donde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?
25. Una pista de atletismo está formada por una región rectangular con un semicírculo en cada extremo. Si el perímetro es de 200 m., hallar las dimensiones de la pista para que el área de la zona rectangular sea máxima.

SOLUCIÓN PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

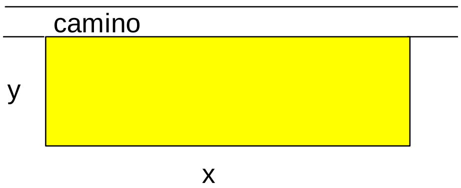
1. Si uno de los números es x el otro será 18-x

   La función a maximizar será la función : $P(x)=x^2.(18-x)^2$

   $$P'(x)=2x.(18-x)^2+x^2.2(18-x)(-1)=4x^3-108x^2+648x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=9 \\ x=18 \end{cases}$$

   : $P''(x)=12x^2-216x+648$; para x=0 $P''(0)=648>0$ luego se trata de un mínimo; para x=9 $P''(9)=-324<0$ luego se trata de un máximo; para x=18 $P''(18)=648>0$ luego se trata de un mínimo El máximo lo obtiene por tanto para x=9 y, en este caso, 18-x es también igual a 9. Por lo que los números buscados son: 9 y 9

2.

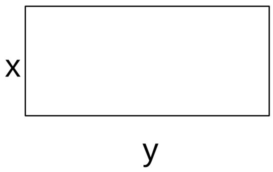


Siendo x e y las dimensiones del campo, la función a maximizar es: s(x)=xy
La relación entre las variables es $80x+10(x+2y)=28800$; por lo que despejando $y=\frac{28800-90x}{20}=\frac{2880-9x}{2}$. Sustituyendo en la función se obtiene:

$s(x)=xy=x\frac{2880-9x}{2}=\frac{2880x-9x^2}{2}$; $s'(x)=\frac{2880-18x}{2}=1440-9x=0 \Rightarrow x=1440/9=160$

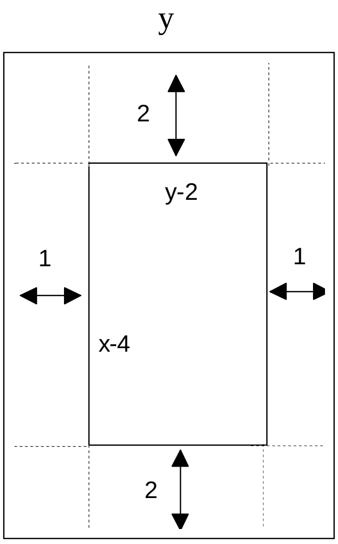
$S''(x)=-9$, por tanto $s''(160)<0$ luego tiene un máximo.Despejando en la expresión de y se obtiene que las dimensiones del campo son: x=160m y=720m, por lo que el área del campo será S=160.720=115200m^2

3.



Sean x e y las dimensiones del rectángulo. La función a maximizar es: s(x)=x.y. La relación entre las variables será $2x+2y=1$; $y=(1-2x)/2$. Sustituyendo $s(x)=x.(1-2x)/2=$
$=(x-2x^2)/2$;
$s'(x)=(1-4x)/2=0 \Rightarrow x=1/4$; $S''(x)=-4/2=-2$, $s''(1/4)<0$ En x=1/4 tiene un máximo; despejando y para x=1/4 y=1/4. Es decir se trata de un cuadrado de lado 1/4m=25 cm.

4.



Sean x e y las dimensiones del papel.
Las dimensiones del texto serán x-4 e y-2
La función a minimizar es: S(x)=x.y pero sabemos que: $(x-4).(y-2)=18$. Despejando $y=(10+2x)/(x-4)$ y sustituyendo en la función área $S(x)=(10x+2x^2)/(x-4)$

x

$$S'(x)=\frac{(10+4x)(x-4)-(10x+2x^2)}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2}=0$$

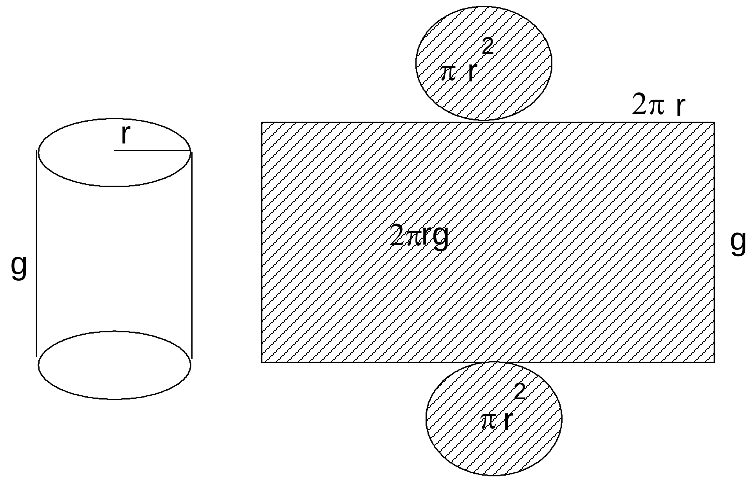
$\Rightarrow 2x^2-16x-40=0 \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$ La solución negativa hemos de rechazarla por no tener sentido.

$S''(x)=144/(x-4)^3$; $S''(10)>0$ luego tiene un mínimo. Las dimensiones de la hoja son: x=10 y=5

5.El valor de la piedra es proporcional al cuadrado de su peso, esto significa que $V=kp^2$, siendo V el valor de la piedra, p su peso y k una constante que desconocemos.
Por tanto $14.400=k.12^2=k.144\Rightarrow k=14400/144=100$.
Dividimos la piedra en dos partes. Si una de ellas pesa x la otra pesará 12-x y por tanto el valor total de los dos trozos será: $V(x)=100.x^2+100.(12-x)^2$. Para que la depreciación sea máxima ese valor ha de ser mínimo.
$V'(x)=200x+200(12-x)(-1)= 400x-2400=0 \Rightarrow x=2400/400=6$;
$V''(x)=400>0$ luego en x=6 tiene un mínimo. Por tanto, la depreciación máxima se obtiene al dividir la piedra en 2 partes iguales de 6 gr cada una.

6. $x.y=3600$; $L(x)=2x+2y$ mínimo. Espejamos $y=3600/x$; sustituyendo en la función queda:
$L(x)=2x+2(3600/x)=\frac{2x^2+7200}{x}$; $L'(x)=\frac{4x^2-(2x^2+7200)}{x^2}=\frac{2x^2-7200}{x^2}=0$ x=60 o x=-60; el valor negativo debemos rechazarlo por no tener sentido.
$L''(x)=14400/x^3$ Por lo que $L''(60)>0$, es decir tiene un mínimo. Las dimensiones del campo son: x=60m y=60m.

7.



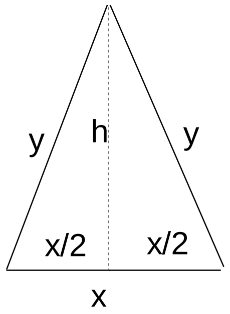
V=area base. Altura= $\pi r^2 g=160$; por lo que $g=160/\pi r^2$
Para que los costes de fabricación sean mínimos ha de serlo el área del cilindro. Como puede verse en el dibujo $S(x)=2\pi rg+2\pi r^2=2\pi r\frac{160}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{320}{r}+2\pi r^2$;
$S'(x)=\frac{-320}{r^2}+4\pi r=\frac{-320+4\pi r^3}{r^2}=0\Rightarrow -320+4\pi r^3=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{320}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}$
$S''(x)=\frac{640}{r^3}+4\pi \Rightarrow S''(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}})>0$ Por tanto es un mínimo. Las dimensiones son:

$$r=\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\ ;\ g=\frac{160}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\right)^2}$$

8. Que el punto (-1,0) sea de inflexión implica que el punto es de la curva, es decir que $f(-1)=0$, además por ser de inflexión la derivada segunda en dicho punto vale cero. Es decir, $f''(-1)=0$.
Nos dicen también que la recta tangente en ese punto es $y=-3x+3$. Esto equivale a decir que la derivada en ese punto vale -3, es decir $f'(-1)=-3$.
Por otra parte, al tener en x=0 un extremo la derivada debe valer cero: $f'(0)=0$
La función es $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Por tanto $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ y $f''(x)=6ax+2b$
Aplicando las condiciones que hemos señalado obtenemos un sistema de ecuaciones:
$f(-1)=0\Rightarrow -a+b-c+d=0$; $f'(-1)=-3\Rightarrow 3a-2b+c=-3$; $f''(-1)=0\Rightarrow -6a+2b=0$; $f'(0)=0\Rightarrow c=0$
Resolviendo dicho sistema obtenemos: a=1, b=3, c=0, d=-2

9. $y=ax^3+bx^2++cx+d$; $y'=3ax^2+2bx+c$; Dado que el punto M(0,4) es un mínimo sabemos que f(0)=4 y f '(0)=0; al ser m(2,0) un mínimo f(2)=0 y f '(2)=0. Sustituyendo estos valores en y e y' se obtiene el siguiente sistema: d=4; c=0; 8a+4b+2c+d=0; 12a+4b+c=0 y resolviéndola a=1, b=-3, c=0, d=4

10.



$S(x)=\frac{xh}{2}$ es la función a maximizar

Perímetro$=2y+x=30\Rightarrow y=\frac{30-x}{2}$ Además por el teorema de Pitágoras $y^2=h^2+(x/2)^2$. Es decir $h^2=y^2-(x/2)^2$ y sustituyendo el valor de y queda $h^2=\left(\frac{30-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{900+x^2-60x-x^2}{4}$

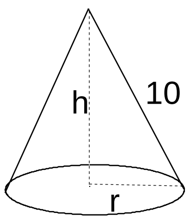
$h^2=\frac{900-60x}{4}=225-15x$; $h=\sqrt{225-15x}$. Por tanto la función a maximizar es: $s(x)=\frac{xh}{2}=\frac{x\sqrt{225-15x}}{2}$

$$S'(x)=\frac{\sqrt{225-15x}+x\frac{-15}{2\sqrt{225-15x}}}{2}=\frac{2.(225-15x)-15x}{4\sqrt{225-15x}}=\frac{450-45x}{4\sqrt{225-15x}}=0\Rightarrow x=10$$

$$S''(x)=\frac{-45.4\sqrt{225-15x}-(450-45x)4\frac{-15}{2\sqrt{225-15x}}}{16(225-15x)};\ S''(10)=\frac{-225}{8\sqrt{75}}<0 \text{ máximo}$$

Dimensiones x=10 y=(30-10)/2=10 triángulo equilátero

11



V=Area base. Altura/3= $\pi r^2h/3$ función a maximizar

Por el teorema de Pitágoras $h^2+r^2=100$ luego $r^2=100-h^2$

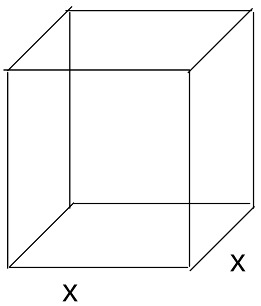
Sustituyendo $V=\pi(100-h^2).h/3=\frac{\pi(100h-h^3)}{3}$

$V'=\frac{\pi}{3}(100-3h^2)=0\Rightarrow h=\sqrt{\frac{100}{3}}$ Tomamos solo el valor positivo de la raíz porque el negativo no tiene sentido.

$V''=\frac{\pi}{3}(-6h)$; $V''(\sqrt{\frac{100}{3}})<0$ máximo

$h=\sqrt{\frac{100}{3}}$; $r^2=100-100/3=200/3$; $r=\sqrt{200/3}$

12



$S=4xy+2x^2$; $V=x^2y=8\Rightarrow y=\frac{8}{x^2}$

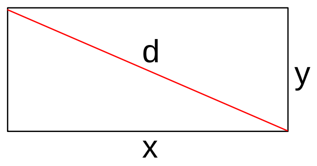
$S=4x\frac{8}{x^2}+2x^2=\frac{32}{x}+2x^2=\frac{32+2x^3}{x}$

$S'=\frac{4x^3-32}{x^2}=0\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2$

$S''=\frac{12x^4-(4x^3-32)2x}{x^4}=\frac{4x^4+64x}{x^4}$ $S''(2)>0$

x=2dm mínimo; y=8/4=2dm

13



Función a minimizar d=$\sqrt{x^2+y^2}$; S=xy=100⇒ y=100/x ⇒ d=$\sqrt{x^2+\left(\frac{100}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4+10000}{x^2}}=$ $=\frac{\sqrt{x^4+10000}}{x}$;

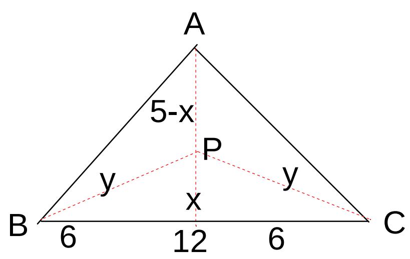
D'=$\frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+10000}}x-\sqrt{x^4+10000}}{x^2}=$

$=\frac{2x^4-(x^4+10000)}{x^2\sqrt{x^4+10000}}=\frac{x^4-10000}{x^2\sqrt{x^4+10000}}=0\Rightarrow x^4-10000=0\Rightarrow x=10$ No tomamos el valor negativo de la raíz por carecer de sentido.

D''(x)=$\frac{4x^5\sqrt{x^4+10000}-(x^4+10000)\left(2x\sqrt{x^4+10000}+x^2\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+10000}}\right)}{x^4(x^4+10000)}$; D''(10)>0;

x=10 mínimo, y=100/10=10

14



d(P,A)=5-x; d(P,B)=d(P,C)=y

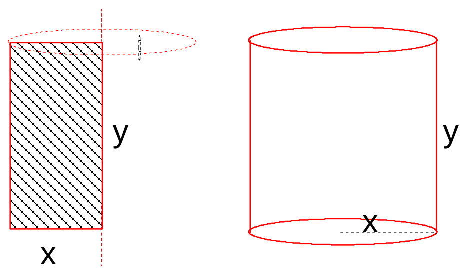
Tenemos que minimizar la función suma S=(5-x)+2y. Por el teorema de Pitágoras x^2+36=y^2 , por tanto y=$\sqrt{x^2+36}$, sustituyendo S=(5-x)+2$\sqrt{x^2+36}$

S'=-1+2.$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}}=\frac{-\sqrt{x^2+36}+2x}{\sqrt{x^2+36}}=0\Rightarrow$

2x=$\sqrt{x^2+36}$; $4x^2=x^2+36; 3x^2=36; x^2=12;$

x=$\sqrt{12}$; S''($\sqrt{12}$) > 0 luego es un mínimo

15.



El radio del cilindro coincide con x y la altura con y, por tanto:

Función a maximizar: V=$\pi r^2 h=\pi x^2$y

Perímetro=2x+2y=60⇒y=$\frac{60-2x}{2}$=30-x

Sustituyendo V=πx^2(30-x)=π($30x^2$-x^3)

V'=π(60x-3x^2)=0; x=0 ó x=20

V''=π(60-6x) V''(20)<0 máximo

x=20cm; y=30-20=10cm

16. f:[1,e]--------→R; f(x)=1/x+Lx; m=f '(x)= -1/x^2+1/x=$\frac{-1+x}{x^2}$ Esta es la función a maximizar. Por tanto m'=$\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3}=0\Rightarrow x=2$

m''=$\frac{-x^3-(-x+2)3x^2}{x^6}=\frac{2x^3-6x^2}{x^6}=\frac{2x-6}{x^4}$; m''(2)<0 máximo

Nos piden además la tangente en ese punto. x=2 ; f(x)=1/2+L2; m=$\frac{-1+2}{4}=1/4$

Recta 1/4(x-2)= y- (1/2+L2)

17 Volumen = π r^2 h, función a maximizar. Superficie total =54cm =$2\pi rh+2\pi r^2$ (ver dibujo ejercicio 7) Despejando h=$\frac{54-2\pi r^2}{2\pi r}$ y sustituyendo en el Volumen queda:

V=$\pi r^2\frac{54-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{54r-2\pi r^3}{2}=27r-\pi r^3$; V'=27-3$\pi r^2$=0; r=$\sqrt{9/\pi}$ =3/$\sqrt{\pi}$

V''=-6πr , V''(3/$\sqrt{\pi}$) < 0 máximo. H=$\dfrac{54-2\pi\frac{9}{\pi}}{2\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

18. (ver dibujo ejercicio 12)

Superficie de la caja Superficie lateral de la caja=4xy; tapa superior=x^2; tapa inferior=x^2

Si consideramos que el material barato cuesta 1 unidad de precio, el caro costará 1’5

Por tanto la función precio que queremos minimizar será P=4xy+x^2+1’5x^2

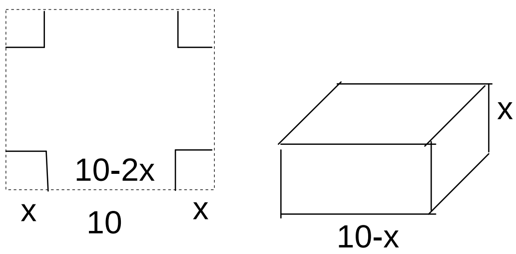
Dado que V=x^2y=80: y=80/x^2. Sustituyendo P=4x.$\frac{80}{x^2}+2'5x^2=\frac{320}{x}+2'5x^2$

P'=$\frac{-320}{x^2}+5x=\frac{-320+5x^3}{x^2}=0\Rightarrow -320+5x^3=0; x^3=64; x=\sqrt[3]{64}=4$

P''=$\frac{15x^4-(-320+5x^3)2x}{x^4}=\frac{5x'+640x}{x^4}=\frac{5x^3+640}{x^3}$ P''(4)>0 mínimo

x=4, y=80/16=5

19



V=$(10-2x)^2x=100x-40x^2+4x^3$

V'=$100-80x+12x^2=0$

x=5/3; x=5 no válido pues si recortamos 5 de cada lado no podríamos hacer la caja.

V''= -80+24x ; V''(5/3)<0 máximo

Luego x=5/3

Dado que la altura es x y se obtiene un máximo enx=5/3 que ya es menor que 2, la nueva condición dada en la segunda parte del problema no cambia los datos del problema y por tanto tampoco su solución

20. x^2+y^2=r siendo r un número>0 la función a maximizar es S=x+y; de la primera expresión se deduce que y=$\sqrt{r-x^2}$ y sustituyendo S=x+$\sqrt{r-x^2}$;

S'=1+$\frac{-2x}{2\sqrt{r-x^2}}=\frac{\sqrt{r-x^2}-x}{\sqrt{r-x^2}}$=0$\Rightarrow\sqrt{r-x^2}$ =x$\Rightarrow r-x^2=x^2\Rightarrow x=\sqrt{r/2}$;

Puede comprobarse que S''($\sqrt{r/2}$)<0 máximo. Y=$\sqrt{r-\frac{r}{2}}=\sqrt{\frac{r}{2}}$ luego x=y

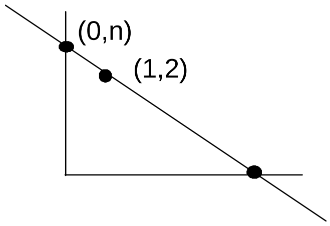
21. f(t)=9-$(t-2)^2$ $0\le t\le 4'5$

f ‘(t)= -2(t-2)=0 $\Rightarrow$ t=2; f ‘’(t)=-2<0 $\Rightarrow$ t=2 máximo relativo.

El problema nos pide los extremos absolutos. La función es continua y derivable en todo su dominio de definición [0, 4’5], si observamos el signo de la primera derivada vemos que f ‘es mayor que cero en el intervalo (0,2), de lo que se deduce que f es creciente en dicho intervalo. Además, f ‘ es negativa en (0, 4’5) por lo que en ese intervalo f es decreciente. Así pues el máximo relativo es también máximo absoluto y el mínimo absoluto se obtendrá en uno de los dos extremos del intervalo [0,4’5]. Calculamos los valores de f en dichos extremos: f(0)=5, f(4’5)=2’75. En consecuencia, la función alcanza su mínimo absoluto en t=4,5.

Máximo absoluto (0,9); Mínimo absoluto (4’5, 2’75)

22.



Recta y=mx+n

La altura del triángulo será la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje OY. por tanto, sustituimos en la recta x=0 obteniendo y=n $\Rightarrow$ h=n

La base del triángulo será la abscisa del punto de intersección e la recta con el eje OX, haciendo y =0 obtenemos x=-n/m. El área del triángulo que es la función a minimizar será por lo tanto:

$$S=\frac{b.h}{2}=\frac{\frac{-n}{m}n}{2}=\frac{-n^2}{2m}\ .$$

Tenemos que encontrar la relación que existe entre las variables n y m. Sabemos que la recta pasa por el punto (1,2) por lo que 2=m.1+n$\Rightarrow$ m=2-n. Sustituyendo en la función S quedaría $S=\frac{-n^2}{2(2-n)}=\frac{-n^2}{4-2n}$ Queremos hallar el mínimo de esta función. $S'=\frac{-2n(4-2n)+n^2(-2)}{(4-2n)^2}=$

$=\frac{2n^2-8n}{(4-2n)^2}=0\Rightarrow 2n^2-8n=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} n=0\\ n=4\end{array}\right.$; $S''=\frac{(4n-8)(4-2n)^2-(2n^2-8n)2(4-2n)(-2)}{(4-2n)^4}$

El valor n=0 no es válido ya que no se formaría un triángulo. S''(4)<0 luego en x=4 tiene un mínimo. Por tanto n=4, m=2-4=-2; recta y=-2x+4

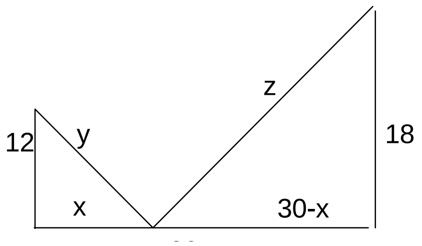
23. (Ver el dibujo del ejercicio 15)

Sea V el volumen del cilindro V=$\pi r^2 h$ siendo h la altura y r el radio del cilindro. Por otra parte, la superficie total del cilindro será S=$2\pi rh+2\pi r^2$=150 de donde h=$\frac{150-2\pi r^2}{2\pi r}$. Luego

V=$\pi r^2\frac{150-2\pi r^2}{2\pi r}=\frac{150r-2\pi r^3}{2}$; V'=$\frac{150-6\pi r^2}{2}=0\Rightarrow r=\sqrt{\frac{150}{6\pi}}=\sqrt{\frac{25}{\pi}}=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$

V''=$\frac{-12\pi r}{2}=-6\pi r$; V''($\frac{5}{\sqrt{\pi}}$)<0 Por tanto el máximo se alcanza cuando r=$\frac{5}{\sqrt{\pi}}$ y h=$\frac{10}{\sqrt{\pi}}$

24



L=y+z, función a minimizar. Teneos que encontrar la relación entre z e y.

$y^2=12^2+x^2\Rightarrow y=\sqrt{144+x^2}$

$z^2=18^2+(30-x)^2=324+900+x^2-60x=x^2-60x+1224\Rightarrow$

$\Rightarrow z=\sqrt{x^2-60x+1224}$

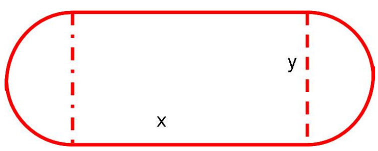
L=$\sqrt{144+x^2}+\sqrt{x^2-60x+1224}$ función a minimizar.

L'=$\frac{2x}{2\sqrt{144+x^2}}+\frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1224}}=$

$=\frac{x\sqrt{x^2-60x+1224}+(x-30)\sqrt{144+x^2}}{\sqrt{144+x^2}\sqrt{x^2-60x+1224}}$=0. $\Rightarrow x\sqrt{x^2-60x+1224}$ =- $(x-30)\sqrt{144+x^2}$

Elevando ambos miembros al cuadrado y resolviendo las operaciones se obtiene x=12; además si hacemos la derivada segunda resulta que L''(12)>0 por lo que para x=12 se obtiene un mínimo. En resumen el cable debe sujetase en un punto del suelo que diste 12 m del poste más bajo y (30-12)=18m del más alto.

25 . R=y/2; P=2x+πy= 200 $\Rightarrow y=\frac{200-2x}{\pi}$; Área rectángulo: S=x.y=x.$\frac{200-2x}{\pi}$



S'=$\frac{200-4x}{\pi}=0\Rightarrow x=50$; s''=$\frac{-4}{\pi}<0$ por lo tanto el máximo se obtiene para x=50 e y=$\frac{100}{\pi}$