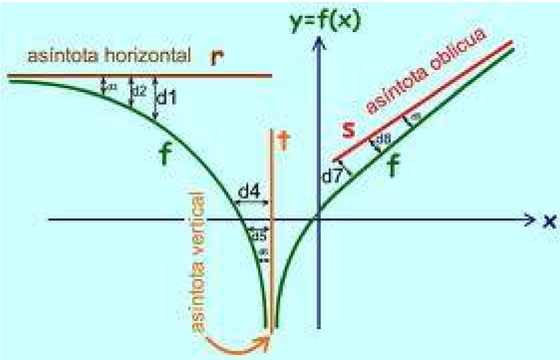
ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Diremos que una recta r es asíntota de una función y=f(x) **si la distancia** entre r y la gráfica de f(x) **tiende a cero** cuando al menos una de las variables (x o y) tienden a infinito.

En la imagen puede observarse que las asíntotas de una función pueden ser de tres tipos:



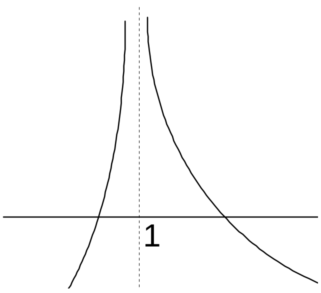
Verticales: la recta t es una asíntota de la función porque cuando x tiende a -1 la gráfica se acerca cada vez más a la recta t. Obsérvese que en este caso la variable x tiende a un número, pero la variable y (las imágenes) tiende ∞

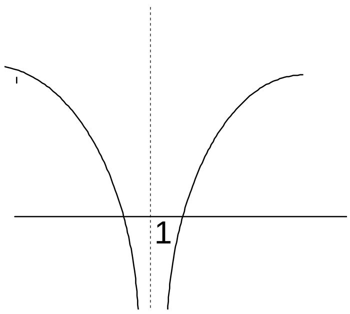
Horizontales: La recta r es una asíntota horizontal de la función porque cuando x tiende a $-\infty$ la gráfica se acerca cada vez más a la recta r. En este caso la variable x tiende a $-\infty$ y en cambio la variable y tiende a un número.

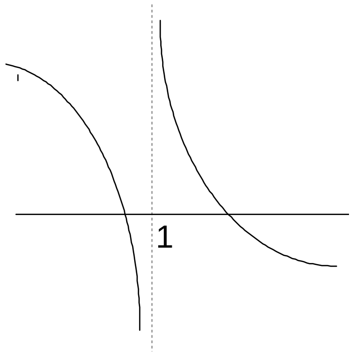
Oblicuas: la recta s es una asíntota oblicua ya que, cuando x tiende a $+\infty$, la gráfica se acerca cada vez más a la recta s. Obsérvese que en este caso ambas variables (x e y) tienden a ∞

ASÍNTOTAS VERTICALES

Observemos las siguientes gráficas::







En todas ellas se verifica que la recta x=1 es una asíntota vertical. Si estudiamos el $\lim_{x\to 1} f(x)$ la vemos que en la primera gráfica es $+\infty$; en la segunda $-\infty$ y en la tercera es$-\infty$ por la izd y $+\infty$ por la dcha.

Definición: **la recta x=a es una asíntota vertical de y=f(x) si** $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

(Por lo tanto para buscar las **posibles asíntotas verticales** de una función debemos encontrar los puntos en los que el límite puede ser infinito.

En la práctica, esos puntos solo pueden estar entre los que anulan el denominador o entre aquellos que al sustituir quede logaritmo de cero)

Ejemplo 1: Calcular las asíntotas verticales de la función y=$\frac{x}{x-2}$ D=R-{2};

$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow$ la recta x=2 es A.V.

Ejemplo 2: Calcular las asíntotas verticales de la función y=$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ D=R-{-2,2}

$\lim_{x\to +2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$; aplicamos L'Hôpital: $\lim_{x\to +2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to +2} \frac{2x-3}{2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

La recta x= 2 no es A.V.

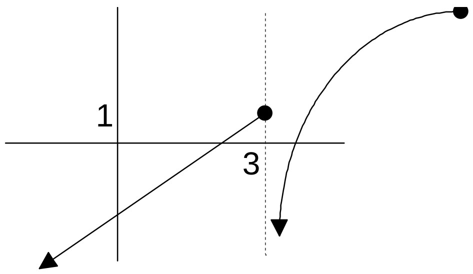
$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{12}{0} = \infty \Rightarrow$ la recta x= -2 es A.V.

Ejemplo 3: Calcular las asíntotas verticales de la función y=L[$(x-4)^2$]; D=R-{4} (ya que $(x-4)^2$ es siempre positivo excepto en x=4 que se hace cero)

$\lim_{x\to 4} L[(x-4)^2] = L0 = -\infty \Rightarrow$ la recta x=4 es A.V.

Asíntotas por la derecha o por la izquierda

Observemos ahora la siguiente gráfica



La recta recta x=3 cumple la definición de asíntota si miramos la gráfica a la derecha del 3 pero no si la miramos a la izd. Calculando los límites vemos que:

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ diremos que x=3 es una asíntota vertical por la derecha.

***Definición*: Diremos que la recta x=a es una asíntota vertical por la derecha de y=f(x) si** $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$.**Diremos que la recta x=a es una asíntota vertical por la izquierda de y=f(x) si** $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

Ejemplo 1: Calcular las asíntotas verticales de la función y=$e^{1/x}$ D=R-{0}

$\lim_{x\to 0} e^{1/x} = e^{\infty}$

Dado que $e^{+\infty} = \infty$ y $e^{-\infty} = 0$ tenemos que calcular los límites laterales:

$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to 0} e^{1/x} = e^{+\infty} = \infty \Rightarrow$La recta x=0 es A.V. Por la derecha

Ejemplo 2: Calcular las asíntotas verticales de y= $e^{\frac{1}{x^2-1}}$ D=R-{-1,1}

Los puntos cuyo límite puede dar infinito son: x=1 y x=-1. Por las mismas razones que en el ejercicio anterior, para calcularlos tenemos que hallar los límites laterales.

$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{+\infty} = \infty$; $\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{-\infty} = 0$ Por lo tanto x=-1 es AV por la izd

(Si tomamos puntos próximos a -1 a la izd el denominador es positivo, por ejemplo si el punto es -1'1 quedaría: $(-1'1)^2-1=0'21$. En cambio si tomamos puntos próximos a -1 pero por la dcha el denominador queda negativo, por ejemplo si el punto es -0'9 tenemos $(-0'9)^2-1=-0'19$)

$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{+\infty} = \infty$ Por lo tanto x=1 es AV por la dcha.

Ejemplo 3: Calcular las asíntotas verticales de $y=e^{\frac{2x}{x^2-4}}$

.$y=e^{\frac{2x}{x^2-4}}$ D=R-{-2, 2 }

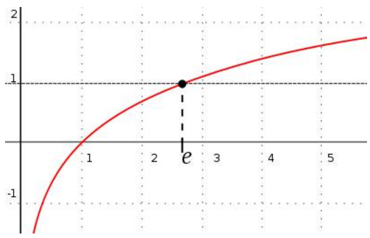
$\lim_{x\to -2^-} e^{\frac{2x}{x^2-4}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to -2+} e^{\frac{2x}{x^2-4}} = e^{+\infty} = \infty$ x=-2 AV Dcha

$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{2x}{x^2-4}} = e^{-\infty} = 0$; $\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{2x}{x^2-4}} = e^{+\infty} = \infty$ x=2 AV Dcha

(El razonamiento es el mismo del ejercicio anterior pero en este caso hay que tener en cuenta también el signo del numerador 2x)

Ejemplo 4: Calcular las asíntotas verticales de la función y=Lx; D=(0,∞)
La gráfica de esta función es conocida

$\lim_{x\to 0^+} Lx = -\infty$. No tiene sentido hallar el límite por la izd ya que no hay función. Por lo tanto, x=0 es A.V. Por la dcha



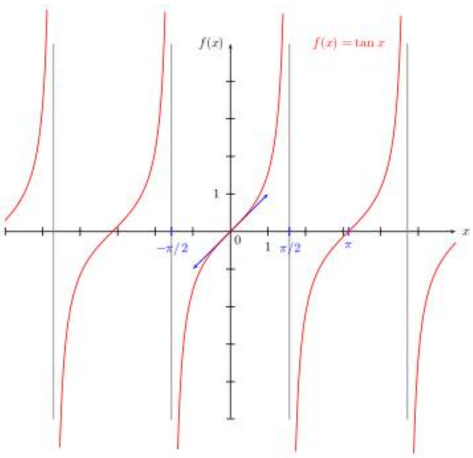
Ejemplo 5: Calcular las asíntotas verticales de la función $y=L(x^2-9)$; $D=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$ (puntos en los que x^2-9 es positivo)

Los puntos en que el límite puede dar infinito son aquellos en los que al sustituir queda logaritmo de cero, esto es x=-3 y x=3 pero, teniendo en cuenta el dominio de la función, cuando $x\to 3$ solo tiene sentido hallar el límite por la dcha (ya que a la izd no hay función) y cuando $x\to -3$ solo tiene sentido hallar el límite por la izd. Calculamos esos límites:

$\lim_{x\to -3^-} L(x^2-9) = -\infty \Rightarrow$ x=-3 es A.V. izd

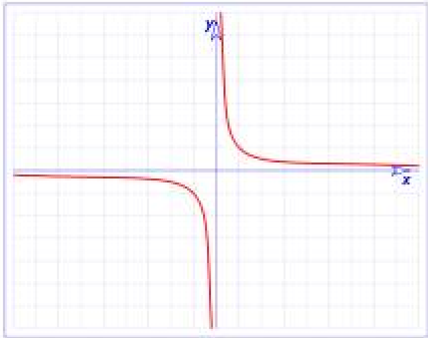
$\lim_{x\to 3^+} L(x^2-9) = -\infty \Rightarrow$ x=3 es A.V. dcha

NOTA: Una función puede tener infinitas asíntotas verticales
Por ejemplo la función y=tgx cuya gráfica es



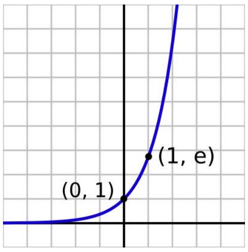
ASÍNTOTAS HORIZONTALES

En la gráfica de la derecha, la recta y=0 es una asíntota horizontal. Vemos que la función se acerca cada vez más al eje OX (y=0) a medida que x tiende a ∞. De esta observación podemos deducir la definición de asíntota horizontal de una función:

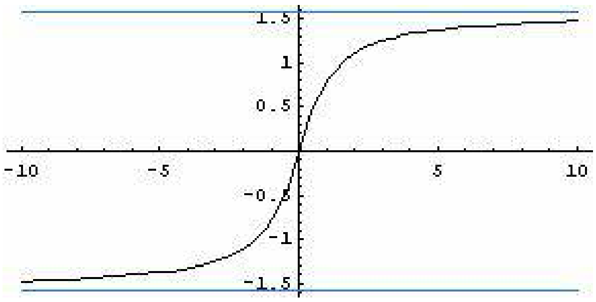


Definición: **La recta y=a es una asíntota horizontal de la función y=f(x) si** $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$ **y** $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$**.**
Si solo el $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$ **decimos que y=a es asíntota horizontal por la derecha. De igual forma definiríamos la asíntota horizontal por la izd.**

(De la anterior definición, se sigue que para calcular las asíntotas horizontales de una función hemos de hallar los límites cuando x tiende a +∞ y a -∞. La función tendrá asíntota horizontal si esos límites tienden a un número.)



Ejemplo: La gráfica de la función y=e^x tiene una asíntota horizontal en y=0 por la izd ya que $\lim_{x\to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$. Sin embargo no tiene asíntota horizontal por la derecha ya que $\lim_{x\to +\infty} e^x = e^{+\infty} = \infty$.



Ejemplo: la gráfica de la izd corresponde a la función y=arctgx.
La recta y=1 es una asíntota horizontal por la derecha y la recta y=-1 es una asíntota horizontal por la izd de esa función.

Ejemplo 1: Calcular las asíntotas horizontales de la función y= x^2-3x+1

$\lim_{x\to +\infty} x^2 - 3x + 1 = \infty$; $\lim_{x\to -\infty} x^2 - 3x + 1 = \infty \Rightarrow$ la función no tiene asíntota horizontal

NOTA: Lo mismo ocurriría con cualquier función polinómica

Ejemplo2: Hallar las asíntotas horizontales de las siguientes funciones racionales:
a)y= $= \frac{3x^2-2x+4}{2x^3-8}$; b) y=$\frac{2x^3+5x+4}{3x^3+7x-2}$; c) y=$\frac{x^2+6x-2}{3x+9}$

NOTA: En las funciones racionales no es necesario hallar los límites en ±∞ por separado ya que si el límite es finito da lo mismo en ±∞.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+4}{2x^3-8} = 0 \Rightarrow$ la recta y=0 es asíntota horizontal

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x+4}{3x^3+7x-2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ la recta y=$\frac{2}{3}$ Es asíntota horizontal

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+6x-2}{3x+9} = \infty \Rightarrow$ la función no tiene asíntotas horizontales

Ejemplo 3: Hallar las asíntotas horizontales de la función y= $e^{\frac{3x^2-4}{2x^2+8}}$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{3x^2-4}{2x^2+8}} = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$ la recta y=$e^{3/2}$ es asíntota horizontal de la función

Ejemplo 4: Hallar las asíntotas horizontales de la función y= $e^{\frac{2x^2+3}{3x-5}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x^2+3}{3x-5}} = e^{+\infty} = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x^2+3}{3x-5}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ y=0 es AH izd, no hay AH Dcha (tengase en cuenta el signo del numerador y del denominador del exponente cuando x tiende a $\pm\infty$)

Ejemplo 5 Hallar las asíntotas horizontales de y=$e^{\frac{-x^2-2}{2x-1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{-x^2-2}{2x-1}} = e^{+\infty} = \infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x^2-2}{2x-1}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ y=0 es AH dcha, no hay AH izd

Ejemplo 6: Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la función y=$e^{L(x-2)}$

D=$(2,\infty)$ (puntos en los que x-2 es positivo)

AV: El único punto en que el límite puede dar ∞ es x=2. El límite en este punto solo puede hacerse por la drecha ya que por la izd no existe la función.

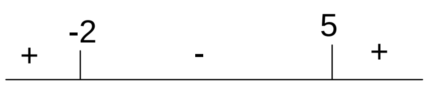
$\lim\limits_{x\to2^+} e^{L(x-2)} = e^{L0} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales

AH: Solo podemos calcular el límite en $+\infty$ ya que cuando x tiende a $-\infty$ no existe la función

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{L(x-2)} = e^{L\infty} = e^{+\infty} = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales

Ejemplo 7: Hallar las asíntotas horizontales y verticales de y=$L\left(\frac{2x+4}{x-5}\right)$

Para hallar el dominio miramos los puntos donde se anula el numerador y el denominador; 2x+4=0⇒x=-2; x-5=0⇒ $x=5$. Ahora damos valores en los intervalos determinados por esos puntos, obteniendo::



Por lo tanto D=$(-\infty,-2)\cup(5,\infty)$

AV: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = L0 = -\infty \Rightarrow$ x=-2 AV izd; $\lim\limits_{x\to5^+}$ f(x)=L∞=∞⇒ x=5 AV dcha

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ f(x)=L2⇒y=L2 es Asíntota horizontal

Ejemplo 8: Hallar las asíntotas horizontales y verticales de la función y=$\frac{\sqrt{4x^2-2}}{x+1}$.

D=$(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}]\cup[\sqrt{\frac{1}{2}},\infty)$-{-1}

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2}}{x+1} = \sqrt{4} = 2$ (Al ser del mismo grado el límite, en valor absoluto, es el cociente de los coeficientes principales y el signo es positivo por serlo el numerador y el denominador en $+\infty$);

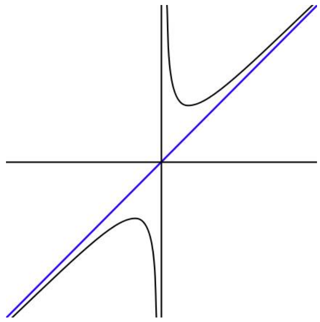
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2}}{x+1}=-2$ (signo negativo ya que en $-\infty$ el numerador es positivo y el denominador negativo)
En consecuencia, y=2 es AH dcha e y=-2 AH izd
L$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{4x^2-2}}{x+1}=\frac{\sqrt{2}}{0}=\infty$ AV x=-1

Ejemplo 9: Hallar las asíntotas horizontales de la función y=$\left(\sqrt{x^2-9x}-x\right)$

Primero debemos hallar el dominio: $x^2-9x\geq 0 \Rightarrow D=(-\infty,0]\cup[9,\infty)$ En consecuencia podemos hallar tanto $\lim_{x\to+\infty}$ como $\lim_{x\to-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9x}-x\right)=\infty-\infty$; Multiplicamos y dividimos por el conjugado
$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9x}-x\right).\left(\sqrt{x^2-9x}+x\right)}{(\sqrt{x^2-9x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9x-x^2}{(\sqrt{x^2-9x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-9x}{(\sqrt{x^2-9}+x)}$
=-9/2 Por lo tanto y=-9/2 AH dcha;
$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9\,x}-x\right)=\infty+\infty=\infty$. No hay AH izd

ASÍNTOTAS OBLICUAS



La función representada a la derecha tiene una asíntota oblicua en la recta y=x ya que la gráfica de la función se aproxima cada vez más a dicha recta cuando x tiende a ∞ y cuando x tiende a $-\infty$. Que la recta y la función se acerquen cuando x tiende a infinito es equivalente a decir que la diferencia entre sus respectivas alturas tiende a cero.

La ecuación explícita de una recta cualquiera es y=mx+n, siendo m≠0 si la recta no es horizontal, dado que la función es y=f(x) , la diferencia de sus alturas viene dada por la resta f(x)-(mx+n). Por lo tanto podemos dar la siguiente definición de asíntota oblicua
Definición: La recta y=mx+n es una asíntota oblicua de la función y=f(x) si $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=0$ **Si eso ocurre solo en +∞ decimos que y=mx+n es asíntota oblicua por la derecha. Del mismo modo definiriamos la AO por la izd.**

Para que el cálculo sea posible tenemos que despejar, a partir de la definición, los valores de m y n. Si y=mx+n es AO, se verifica que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=0$, dividiendo ambos mienbros de la ecuación por x obtenemos: $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{x}=\frac{0}{\infty}=0$; Dado que $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{n}{x}=\frac{n}{\infty}=0$ la expresión queda reducida a $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{f(x)}{x}-m)$=0; de donde deducimos que m=$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$. Volviendo a la definición de la AO y despejando ahora la n tenemos $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n))=0\Rightarrow$ $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=n$
Hemos obtnido por tanto que si y=mx+n es AO de y=f(x) se verifica que:
m=$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ y n=$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

Existirá AO si m es un número distinto de cero y n es cualquier número.

Ejemplo 1: Calcular las asíntotas oblicuas de la función y=$\frac{3x^2-4x+2}{x-4}$

Nota: Como es una función racional no hay que diferenciar los límites en $\pm\infty$ ya que dan lo mismo

$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{3x^2-4x+2}{x-4}}{x}=\frac{3x^2-4x+2}{x^2-4x}=3;$

n=$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2-4x+2}{x-4}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-4x+2-3x^2+12x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x+2}{x-4}=8$

Por lo tanto la recta y=3x+8 es asíntota oblicua de la función

Nota: las funciones racionales tienen AO siempre que el grado del numerador sea superior en una unidad al grado del denominador

Ejemplo 2: Hallar las asíntotas oblicuas de la función y=x-$\frac{1}{\sqrt{x}}$ D= (0,∞). Por tanto, si existe AO solo lo será por la dcha ya que por la izd no existe la función.

M=$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x\sqrt{x}})=1$; n=$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{\sqrt{x}}-x)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

Es decir, la recta y=x es AO de la función por la derecha.

Ejemplo 3: Hallar las asíntotas oblicuas de la función y= x+e^{-x}. D=R

AO dcha: m= $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1}=\frac{1-0}{1}=1$. Hallemos ahora n:

n=$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(x+e^{-x}-x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=e^{-\infty}=0$ Así pues y=x es una AO por la Dcha.

AO izd: m= $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}$ En esta fracción el numerador es del tipo $\infty-\infty$, por lo que no podemos aplicar L'hôpital. Procedemos del siguiente modo: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=$ $=1+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=1-\infty=-\infty$. Por tanto, no hay AO izd al dar m=-∞

Ejemplo 4. Hallar las asíntotas oblicuas de la función y=$\sqrt{x^2-4x}$

D=$(-\infty,0]\cup[4,\infty)$

AO Derecha:

m=$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}=1$; n=$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\frac{-4}{2}=-2$

AO derecha y=x-2

AO Izquierda

M=$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}=-1$; n=$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\frac{4}{2}=2$

AO izquierda y=-x+2

NOTAS: 1. Una función puede tener al mismo tiempo asíntotas verticales y horizontales
2. Una función puede tener al mismo tiempo asíntotas verticales y oblicuas
3. Una función no puede tener al mismo tiempo y por el mismo lado una asíntota horizontal y otra oblicua

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Los pasos para representar gráficamente una función son los siguientes:

1. Dominio
2. Reducción del dominio (periodicidad en caso de funciones trigonométricas y simetría en las restantes funciones)
3. Puntos de corte con los ejes
4. Intervalos de crecimiento y decrecimento
5. Extremos relativos con sus dos coordenadas
6. Intervalos de concavidad y convexidad
7. Puntos de inflexión con sus dos coordenadas
8. Asíntotas

En el caso de funciones a trozos debemos también estudiar su continuidad y derivabilidad.

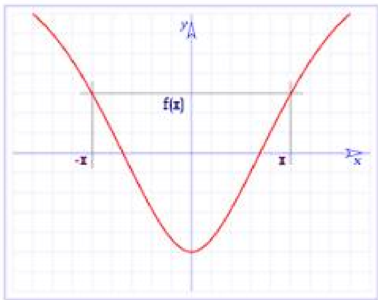
Veamos a continuación como se estudia la simetría y los puntos de corte con los ejes, únicos elementos no tratados con anterioridad.

SIMETRÍAS

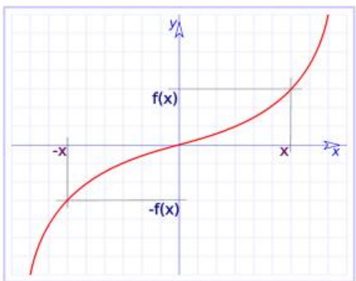
Definición

Decimos que una función es par o simétrica respecto al eje OY si $\forall x \in$D se verifica que f(x)=f(-x)

Por ejemplo la función de la gráfca de la derecha es par y, en consecuencia simétrica respecto al eje OX



Definición



Decimos que una función es impar o simétrica respecto al origen de coordenadas si $\forall x \in$D se verifica que f(x)=-f(-x)

Por ejemplo la función de la gráfca de la izquierda es impar o simétrica respecto al origen de coordenadas

Ejemplos de funciones pares: y=x^4-3x^2+2; y=$\frac{x^2+1}{x^4+3x^2}$; y=$\frac{2x^5-3x^3}{x^3+5x}$
Ejemplos de funciones impares: y= x^3+7x; y=$\frac{2x^2+4}{x^5-5x^3+2x}$
Ejemplos de funciones que no son simétricas: y=3x^2-5x+4; y=2x^5-3x^3+1; y=$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-3x}$

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Los puntos de corte con el eje OX serán los resultantes de resolver el sistema$\left\{\begin{array}{c} y=f(x) \\ y=0 \end{array}\right.$.

El punto de corte con el eje OY sera el sesultado de resolver el sistema$\left\{\begin{array}{c} y=f(x) \\ x=0 \end{array}\right.$

La función puede cortar al eje OX en distintos puntos, sin embargo al eje OY lo puede cortar como máximo una vez (en el punto (0,f(0))

Ejemplo: Puntos de corte de la función y=x^2-4 con los ejes coordenados:

Corte eje OX: $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos de corte: (2,0) y (-2,0)

Corte eje OY$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ y= -4. Punto de corte: (0,-4)

Ejemplos de representación gráfica

Ejemplo 1. Estudio y gráfica de la función y=x^4-3x^2+2

D=R; f(x)=f(-x) por lo tanto es par

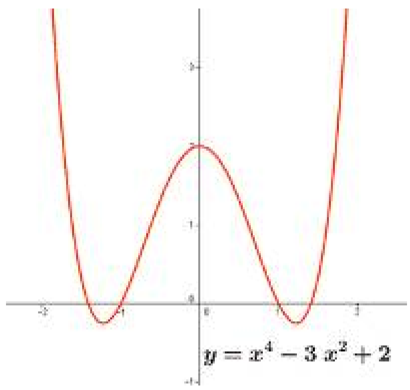
Cortes ejes: eje OX $\begin{cases} y = \lim\limits_{x\to\infty} \lim \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm 1 \\ \pm\sqrt{2} \end{cases}$ Puntos(1,0),(-1,0),($\sqrt{2}$,0), (-$\sqrt{2}$.0)

Eje OY: $\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases}$ ⇒Punto (0,2)

y'=4x^3-6x=0⇒ $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ dando valores se obtiene que f es decre$(-\infty, \frac{-\sqrt{6}}{4}) \cup (0, \frac{\sqrt{6}}{4})$

creciente $(\frac{-\sqrt{6}}{4}, 0) \cup (\frac{\sqrt{6}}{4}, \infty)$; los puntos $(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{4})$ y $(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{4})$ son mínimos y (0,2) máximo

y''=12x^2-6=0⇒$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; dando valores



f es convexa en$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ cóncava en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ puntos de inflexión.

Es continua en R y por tanto no tiene AV; $\lim\limits_{x\to\infty}$

$x^4 - 3x^2 + 2 = \infty$ luego no tiene AH;

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x} = \infty$por tanto no tiene AO

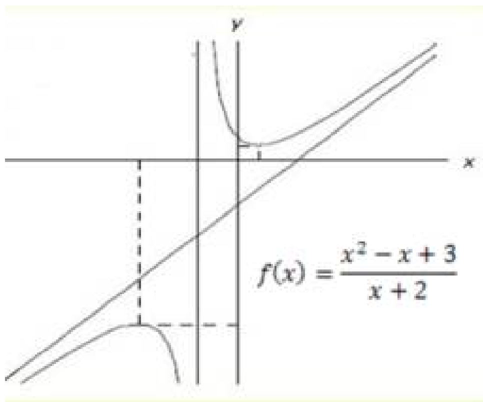
Ejemplo 2: Estudio y gráfica de la función y=$\frac{x^2 - x + 3}{x + 2}$

D=R-{2};

f(x)≠f(-x) y f(x)≠-f(-x) por tanto no es simétrica

Cortes ejes: Eje OX $\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow$ no corta al eje OX

Eje OY$\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} \\ x = 0 \end{cases}$ ⇒punto (0,3/2)



Y'=$\frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$ dando valores

Es crec $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$; decrec (-5,-2)∪(-2,1)

(-5,-11) máximo; (1,1) mínimo

y''=$\frac{18}{(x + 2)^3}$Y''=, dando valores antes y despues de x=-2 se obtiene que f es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa (-2,∞)

No tiene puntos de inflexión

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \frac{5}{0} = \infty$ AV x=-2

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x + 2} = \infty$ No tiene AH. Veamos si tiene oblicua

m=$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 2x} = 1$;

n=$\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2 - x + 3}{x + 2} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x + 3}{x + 2} = -3$.

AO y=x-3

Ejemplo 3: Estudio y gráfica de la función y=$\frac{x}{Lx}$

D=(0,∞)-{1}. Debido al dominio, no se puede estudiar la simetría. Cortes ejes:

Eje OX $\left\{\begin{array}{l} y=\frac{x}{Lx} \\ y=0 \end{array}\right.$ ⇒x=0$\notin D$⇒No corta al eje OX; tampoco al eje OY dado que x=0 no tiene imagen. y'=$\frac{Lx-1}{(Lx)^2}=0 \Rightarrow$ x=e dando valores obtenemos decrece (0,1)∪ (1,e), crece (e,∞). (e,e) mínimo

y''=$\frac{-Lx+2}{x(Lx)^3}=0 \Rightarrow Lx=2 \Rightarrow x=e^2$

Dando valores es cónca (0,1)$\cup(e^2,\infty)$

Convexa (1,e^2); pto inflexión (e^2,e^2/2)

AV $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{Lx}=\frac{0}{\infty}=0$ No hay AV en x=0

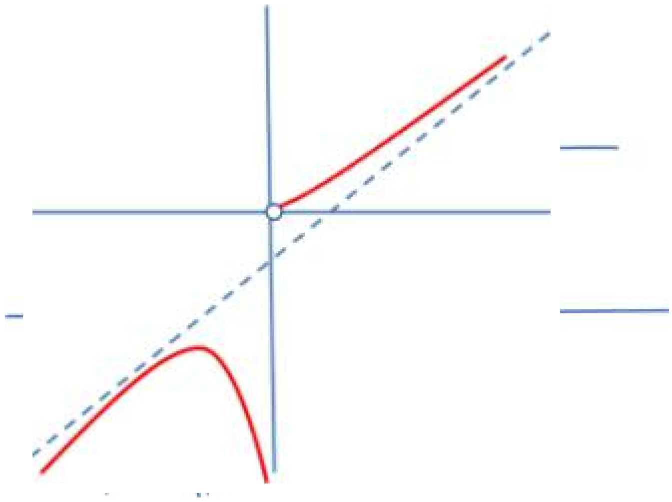
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{Lx}=\frac{1}{0}=\infty$ x=1 AV

AH Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{Lx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$

No hay AH

AO Dcha : m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{xLx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{Lx}=\frac{1}{\infty}=0$

No hay AO.



Ejemplo 4: Estudio y gráfica de y=(x-1)e^{-x}

D=R; No es simétrica . Cortes ejes

Eje OX $\left\{\begin{array}{l} y=(x-1)e^{-x} \\ y=0 \end{array}\right.$ ⇒x=1. Punto (1,0); Eje OY Eje OX $\left\{\begin{array}{l} y=(x-1)e^{-x} \\ x=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow y=-1$Pto (0,-1)

y'=e^{-x}(-x+2)=0, x=2; dando valores: Crece $(-\infty,2)$ decrece $(2,\infty)$; Maximo (2,e^{-2})

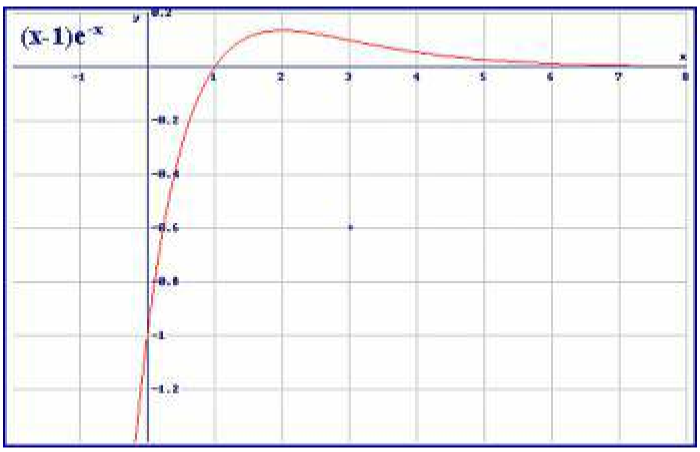
y''=e^{-x}(x-3)=0, x=3; dando valores Cóncava $(-\infty,3)$, convexa$(3,\infty)$; pto inflexión (3,e^{-3}).

No tiene AV al ser continua en R

AH Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{0}=\infty$; y=0 AH Dcha

AH Izd $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}=-\infty.\infty=-\infty$ No tiene AH izd podría tener AO

AO Izd m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-(x-1)e^{-x}}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}(-x+2)=\infty$ No tiene AO Izd



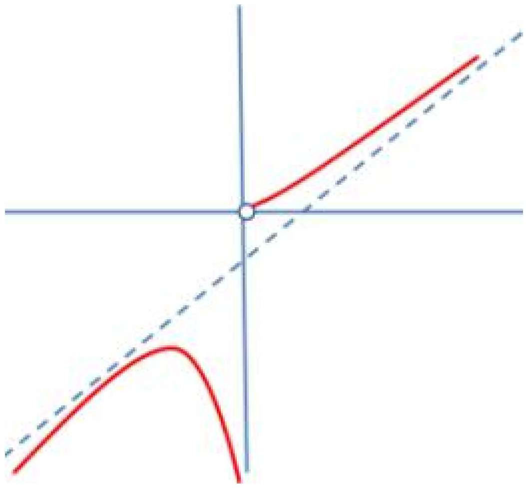
Ejemplo 5: estudio y gráfica de y=x.e$^{-1/x}$

D=R-{0}; No es simétrica. Cortes con los ejes: Eje OX $\left\{ \begin{array}{l} y = xe^{-1/x} \\ y = 0 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$x=0$\notin D \Rightarrow$No corta al eje OX; tampoco al eje OY dado que x=0 no tiene imagen.

y'=e$^{-1/x}$.$\frac{x+1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1$y'=e-1/x., como además x=0$\notin$D hay que dar valores tenoendo en cuenta esos dos puntos y obtenemos: Crec $(-\infty,-1) \cup (0,\infty)$; decrex(-1,0); máximo(-1,-e)

y''=$\frac{1}{x^3} e^{-1/x}$ Cóncava $(-\infty, 0)$, convexa $(0,\infty)$; no tiene punto de inflexión. AV Dcha: $\lim_{x\to 0^+} x.e^{-1/x} = 0.e^{-\infty} = 0$

No tiene AV dcha.



AV izd $\lim_{x\to 0-} x.e^{-1/x} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{-1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{-1/x}(1/x^2)}{-1/x^2} =$

$= \lim_{x\to 0-} -e^{-1/x} = \infty \Rightarrow$ x=0 AV Izd

AH $\lim_{x\to\infty} x.e^{-1/x} = \infty.e^0 = \infty.1 = \infty$. No tiene AH

AO m=$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$

N=$\lim_{x\to\infty}(x.e^{-1/x} - x) = \lim_{x\to\infty} x.(e^{-1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-1/x}(1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} -e^{-1/x}$=-e^0=-1

AO y=x-1

Ejemplo 6: Estudio y gráfica de y=$\sqrt{x^2 - 2x}$

x^2-2x=0$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$ Dando valores D=$(-\infty,0]\cup[2\infty)$. No es simétrica

Cortes Ejes (0,0) y (2,0)

y'=$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ El denominador es positivo, x-1=0$\Rightarrow$x=1; dando valores y teniendo en cuenta el dominio obtenemos decrece $(-\infty,0)$ y crece $(2,\infty)$. No tiene extremos relativos.

y''=$\frac{-1}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}}$ El denominador es positivo, debido a su dominio, el numerador es negativo, por tanto f es cóncava en todo su dominio. No tiene puntos de inflexión.

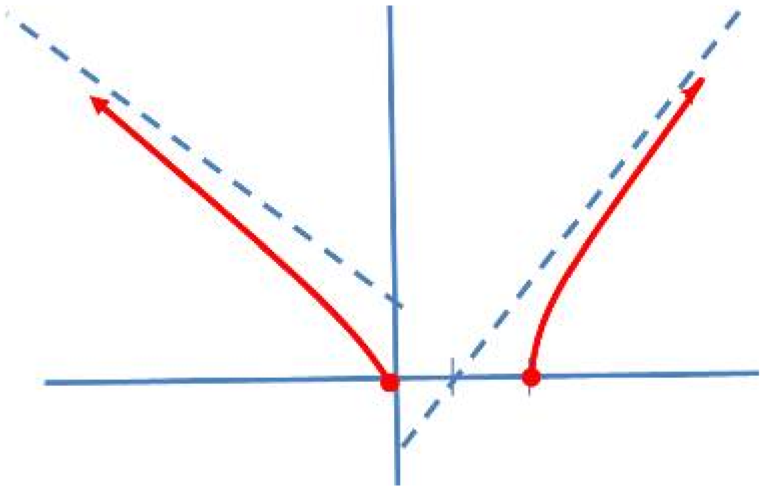
AV no tiene al ser continua en su dominio.

AH $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-2x} = \infty$. No tiene AH

AO Dcha: m=$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = 1$; n=$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x} = -1$

AO Izd: m=$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = -1$; n=$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = 1$

Por tanto y=x-1 AO Dcha,
Y=-x+1 AO Izd



ASÍNTOTAS Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES: EJERCICIOS

A) Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

1. y=$\frac{3x-1}{2x+1}$; 2. y=$\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$; 3. y=L(x-3); 4. y=$e^{5/(x+1)}$; 5. y=$e^{\frac{3x}{x^2-4}}$; 6. y=$e^{\frac{2x^2-1}{3x}}$

7. y= $L\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$; 8. y=$e^{1/x}$; 9. y=L(-x+2); 10. y=$L\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$; 11. y=$L\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; 12. y=$e^{L(x+1)}$

13. y=x^2-6x+1; 14. Y=$\frac{x^3-3x^2+2}{2x^2-3x+2}$; 15. y=$e^{\frac{3x}{x^2-9}}$; 16. y=$\sqrt{\frac{3x-2}{x+1}}$

17. y=$L\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)$; 18. y=$\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x-2}$; 19 y=$\frac{3x^2-5}{2x+1}$; 20 y=$\frac{x^3}{x^2-1}$; 21. y=x.$e^{1/x}$;

22. y=$\sqrt{x^2-1}$; 23. y=$\frac{x}{e^x-1}$; 24. y=$\frac{2x^3+4}{3x^2-5}$; 25. y=$\sqrt{3x^2+2}$; 26. y=$\sqrt{2x+4}$

27. y=$\sqrt{x^2-9}$; 28. y=$\sqrt{4-x^2}$; 29. y=Lx; 30. y=x.Lx; 31. y=$\frac{x}{Lx}$; 32. y=$\frac{Lx}{x}$

B)Representa graficamente las siguientes funciones:

1. y=x^4-2x^2; 2. y=x.Lx; 3. y=x.$e^{1/x}$; 4. y=e^{-x^2}; 5. y=$|Lx|$; 6. y=$\frac{x^2+3}{x-1}$; 7. y=$\frac{4x}{x^2+4}$

8. y=$\sqrt{x^2-1}$; 9. y=$\frac{x^2}{|x+1|}$; 10. y=x+$\left|\frac{1}{x-2}\right|$; 11. y=$\frac{x}{|x|}$; 12. y=$e^x.\sqrt{x}$; 13. y= $|x-3|+|x-7|$

14. y=$e^x(x-2)$; 15. y=senx+cosx; 16. y=$\frac{x^2}{9-x^2}$; 17.y= $\frac{x^2-x-2}{x+2}$; 18. y=$\sqrt{x^2-4x+5}$

19. y=$L\left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)$; 20. y=$\frac{3}{x^3-3x}$; 21. y=$e^{\frac{1}{x^2-1}}$; 22. y= tg^2x; 23. y=$\frac{x}{e^x}$; 24. y=$\frac{Lx}{x}$

25. y=(x-1)e^x; 26. y=e^{-x^2}; 27. y=x^2e^{-x}; 28. y=$\frac{x^3}{Lx}$No estudiar su concavidad; 29. y=L(x^2-1);
30. ;y=$\sqrt{x^2-x}$; 31. y=$\frac{1}{1+|x|}$; 32. y=$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

Soluciones ejercicios asíntotas

1. $y=\dfrac{3x-1}{2x+1}$; D=R-{-1/2}; AV: $\lim\limits_{x\to -1/2}$ f(x)= $\frac{-2'5}{0}=\infty \Rightarrow x=-1/2$ AV

AH: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3/2 \Rightarrow$ y=3/2 AH. Como tiene AH no tiene AO

2. $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$; $x^2-x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\frac{-5}{0}=\infty \Rightarrow x=-2$ AV

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{0}{0}$; L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{2x-1}=\frac{6}{5}$; no hayAVenx=3

AH:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$ =1 $\Rightarrow$ y=1 AH. No hay AO

3. y=L(x-3); D(3,∞); $AV:\ \lim\limits_{x\to 3^+} L(x-3)=L0=\infty$. x=3 AV Dch. $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x-3)=L\infty=\infty \Rightarrow$ No hay A.H. AO: m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(x-3)}{x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(x-3)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/(x-3)}{1}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow$ no hay AO

4. y=$e^{\frac{5}{x+1}}$; D=R−{-1}; AV: $\lim\limits_{x\to -1} e^{\frac{5}{x+1}}=e^{\infty}$ por tanto hay que hacer los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} e^{\frac{5}{x+1}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to -1+} e^{\frac{5}{x+1}}=e^{+\infty}=\infty \Rightarrow$ x=-1 AV dcha.

AH:$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{5}{x+1}}=e^0=1 \Rightarrow$ y=1 AH.

5. Y=$e^{\frac{3x}{x^2-4}}$; D=R-{-2,2}; AV: $\lim\limits_{x\to -2^-} e^{\frac{3x}{x^2-4}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to -2^+} e^{\frac{3x}{x^2-4}}=e^{+\infty}=\infty \Rightarrow$

x=-2 AV dcha ; $\lim\limits_{x\to 2^-} e^{\frac{3x}{x^2-4}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{\frac{3x}{x^2-4}}=e^{+\infty}=\infty$ x=2 AV Dcha

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{3x}{x^2-4}}=e^0=1$; y=1 AH

6. y=$e^{\frac{2x^2-1}{3x}}$; D=R-{0}; AV $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{2x^2-1}{3x}}=e^{+\infty}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2x^2-1}{3x}}=e^{-\infty}=0 \Rightarrow$

x=0 AV Izd. AH $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{2x^2-1}{3x}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2x^2-1}{3x}}=e^{+\infty}=\infty \Rightarrow$ y=0 AH izd

Como por la dcha no hay AH puede haber AO. M=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2x^2-1}{3x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{2xz^2-1}{3x}}\,\frac{12x^2-(2x^2-1).3}{9x^2}}{1}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2xz^2-1}{3x}}\dfrac{6x^2+3}{9x^2}=e^{+\infty}.\frac{6}{9}=\infty$ No hay AO

7. $y=L\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$

D=$(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$

+		-		+
	-3		2	

AV: $\lim\limits_{x\to -3^-} L\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)=L0=\infty \Rightarrow$ x=-3 AV Izd. $\lim\limits_{x\to 2^+} L\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)=L\infty=\infty \Rightarrow$ x=2 AV Dcha

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty} L\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)=L1=0 \Rightarrow$ y=0 AH

8. y=$e^{1/x}$ D=R-{0}; AV $\lim\limits_{x\to o^-} e^{1/x}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to o^+} e^{1/x}=e^{+\infty}=\infty \Rightarrow$ x=0 AV Dcha

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=e^0=1 \Rightarrow$ y=1 AH

9. y=L(-x+2) ; -x+2>0; x<2⇒ $D=(-\infty,2)$; AV: $\lim\limits_{x\to 2^-}$L(-x+2)=L0=∞⇒X=2 AV izd
   AH Izd: $\lim\limits_{x\to-\infty}$L(-x+2)=L∞=∞ No tiene AH.
   AO Izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{L(-x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-1}{-x+2}}{1}=\frac{-1}{\infty}=0$ No hay AO.

10.y=$L\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$;
   D=(-1,1). No tiene sentido hallar las AH ni las AO

-	-1	+	1	-

   AV: $\lim\limits_{x\to-1^+}L(\frac{x+1}{1-x})=L0=\infty$; $\lim\limits_{x\to1-}L(\frac{x+1}{1-x})=L\infty=\infty\Rightarrow$ x=-1 AV Dcha, x=1 AV Izd.

11. y=$L\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$;
   D=$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

+	-1	-	1	+

   AV: $\lim\limits_{x\to-1-}L(\frac{x+1}{x-1})=L0=\infty$; $\lim\limits_{x\to1+}L(\frac{x+1}{1-x})=L\infty=\infty\Rightarrow$ x=-1 AV Izd, x=1 AV Dcha
   AH: . AV: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}L(\frac{x+1}{x-1})=L1=0;\Rightarrow$ y=0 AH

12. y=$e^{L(x+1)}$ x+1>0⇒ $x>-1\Rightarrow$ D=(-1,∞)
   AV: $\lim\limits_{x\to-1^+}e^{L(x+1)}=e^{L0}=e^{-\infty}=0$ No tiene AV
   AH: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{L(x+1)}=e^{L\infty}=e^{+\infty}=\infty$ No tiene AH
   AO: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{L(x+1)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{L(x+1)}\frac{1}{x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{L(x+1)}}{x+1}$. Al aplicar L´Hôpital este límite no se determina. Sin embargo al ser el numerador una función exponencial y el denominador un polinomio sabemos que este límite tiende a infinito. Por tanto no tiene AO

13.y=x^2-6x+1; D=R. No tiene AV; $\lim\limits_{x\to\infty}$f(x)=∞ ⇒ No ti ene AH.
   AO $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+1}{x}=\infty$ No tiene AO

14.y=$\dfrac{x^3-3x^2+2}{2x^2-3x+2}$; $2x^2$-3x+2=0 No tiene solución, por lo tanto D=R. No tiene AV
   $\lim\limits_{x\to\infty}$f(x)=∞. No tiene AH.

   $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{2x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{2}$; n=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{2x^2-3x+2}-\frac{1}{2}x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^3+2-x^3+3/2x^2-x}{2x^2-3x+2}=$
   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3/2x^2-x+2}{2x^2-3x+2}=\frac{-3/2}{2}=\frac{-3}{4}\Rightarrow$ y=$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ AO

15.y=$e^{\frac{3x}{x^2-9}}$ D=R-{-3,3}. AV $\lim\limits_{x\to-3^-}e^{\frac{3x}{x^2-9}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to-3+}e^{\frac{3x}{x^2-9}}=e^{+\infty}=\infty$ x=-3 AV Dcha
   $\lim\limits_{x\to3^-}e^{\frac{3x}{x^2-9}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to3^+}e^{\frac{3x}{x^2-9}}=e^{+\infty}=\infty$ x=3 AV Dcha
   AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{3x}{x^2-9}}=e^0=1$ y=1 AH

16. y=$\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$; 3x-2=0⇒ x=2/3, x+1=0⇒ x=-1
   D=$(-\infty,-1)\cup[2/3,\infty)$

+	-1	-	2/3	+

   AV $\lim\limits_{x\to-1^-}$f(x)=∞⇒ x=-1 AV Izd.; $\lim\limits_{x\to2/3^+}$f(x)=0 AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}=\sqrt{3}\Rightarrow$ y=$\sqrt{3}$ AH

17. y=L$\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)$; x^2-4=0⇒ x=±2; x^2-1=0⇒ x=±1.

+ | - | + | - | +
-2 -1 1 2

D=$(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$

AV $\lim_{x\to-2^-}$ f(x)=L0=∞; $\lim_{x\to2^+}$f(x)=L0=∞; $\lim_{x\to-1^+}$f(x)=L∞=∞; $\lim_{x\to1^-}$f(x)=L∞=∞ ⇒
x=-2 AV Izd, x=2 AV Dcha, x=-1 AV Dcha, x=1 AV Izd
AH $\lim_{x\to\pm\infty}$f(x)=L1=0 ⇒ y=0 AH

18 y=$\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x-2}$; x^2+2x+1=0 ⇒ $x=-1$. Dando valores antes y después de ese valor observamos que x^2+2x+1≥ 0$\forall x\in R$, por tanto la raiz existe siempre⇒D=R-{2}
AV$\lim_{x\to2}$f(x)=$\frac{3}{0}=\infty\Rightarrow$ x=2 AV
AH : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x-2}=1$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x-2}=-1$ Por tanto y=1 AH Dcha, y=-1 AH Izd

19. y=$\frac{3x^2-5}{2x+1}$; 2x+1=0⇒ $x=-1/2$; D=R-{−1/2}; $\lim_{x\to-1/2}\frac{3x^2-5}{2x+1}=\frac{-17/4}{0}=\infty\Rightarrow$ x=-1/2 AV
AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5}{2x+1}=\infty$. No tiene AH.
AO: m= $\lim_{x\to-1/2}\frac{3x^2-5}{2x^2+x}=\frac{3}{2}$; n=$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{2x+1}-\frac{3}{2}x\right)$ =$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5-3x^2-3/2x}{2x+1}$ =$\lim_{x\to\infty}\frac{-3/2x-5}{2x+1}=\frac{-3}{4}$
; x=$\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$ AO

20.y=$\frac{x^3}{x^2-1}$; $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$; D=R-{-1,1}; $\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=\infty$; $\lim_{x\to1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$
x=-1 y x=1 AV.
AH. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty$ No tiene AH.
AO: m=$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$; n= $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ y=x AO

21. y=x.$e^{1/x}$; D=R-{0}; $\lim_{x\to0^-}xe^{1/x}=0.e^{-\infty}=0.0=0$ No hay AV en x=0 por la izd.
$\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}=0.e^{+\infty}=0.\infty$ Indeterminado. $\lim_{x\to0^+}xe^{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to0^+}e^{1/x}=$
=$e^{+\infty}=\infty$; x=0 AV Dcha
AH: $\lim_{x\to\pm\infty}xe^{1/x}=\infty.e^0=\infty.1=\infty$ No tiene AH
AO: m=$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{1/x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1$; n=$\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{1/x}-x)$ =$\lim_{x\to\pm\infty}x(e^{1/x}-1)=\infty.0$
$\lim_{x\to\pm\infty}x(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1$ y=x+1 AO

22. y=$\sqrt{x^2-1}$; x^2-1=0⇒ $x=\pm1$

+ | - | +
-1 1

D=$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
No tiene AV ya que $\lim_{x\to-1}$f(x)=0 y $\lim_{x\to1}$f(x)=0
AH: $\lim_{x\to\pm\infty}$f(x)=∞ No tiene AH
AO dcha: m=$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1$;
n=$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\,x-x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado
n= $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right).\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$ =0
y=x AO dcha

AO izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=-1$;
n=$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\,x+x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado
n= $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right).\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-x^2}{(\sqrt{x^2-1}-x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x^2-1}-x)}=\frac{-1}{\infty+\infty}$=0
y=-x AO Izd

23. y=$\dfrac{x}{e^x-1}$; $e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$ D=R-{0}
AV:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=\frac{0}{0}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x}=1$. No hay AV
AH Dcha : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{\infty}{e^{+\infty}-1}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminado; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$
y=0 AH dcha. AH Izd: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\frac{\infty}{e^{-\infty}-1}=\frac{\infty}{0-1}=\infty$ No hay AH Izd.
AO Izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{1}{e^{-\infty}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$;
n=$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^x-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+xe^x-x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=(*)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-e^{-x}}=(**)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{\infty}=0$
(*)Dividiendo numerador y denominador por e^x
(**) Ese límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L´Hôpital

Por tanto y=-x AO izd

24.y=$\dfrac{2x^3+4}{3x^2-5}$; $3x^2-5=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{5/3}$; D=R-{-$\sqrt{5/3}$, $\sqrt{5/3}$ }
$\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{5/3}}$ f(x)=∞; x= -$\sqrt{5/3}$ y x=$\sqrt{5/3}$ AV
AH $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{3x^2-5}=\infty$ No hay AH
AO m=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4}{3x^3-5x}=\dfrac{2}{3}$;
n=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+4}{3x^2-5}-\frac{2}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4-2x^3+10/3x}{3x^2-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10/3x+4}{3x^2-5}=0$
y=2/3x AO

25. y=$\sqrt{3x^2+2}$. D=R ya que e radicando es siempre positivo. No tiene AV
AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{3x‘+2}=\infty$ No tiene AH
AO Dcha: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{x}=\sqrt{3}$; n=$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{3}\,x)=(*)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2-3x^2}{\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{3}\,x}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{3}\,x}=\dfrac{2}{\infty}=0$; y=$\sqrt{3}$ x AO Dcha
La AO izd se haría de forma similar pero tenindo en cuenta que cuando x tiende a menos infinito el signo de x es negativo y el de la raíz es positivo por lo que m=- $\sqrt{3}$; n=0.
AO izd y=- $\sqrt{3}$ x

26. y=$\sqrt{2x+4}$; 2x+4=0⇒ $x=-2$; dando valores vemos que 2x+4≥0 en el intervalo $[-2,\infty)$ que constituye por lo gtanto el dominio de la función.
$\lim\limits_{x\to-2^+}$ f(x)=0. No tiene AV
AH Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+4}=\infty$ No tiene AH Dcha.
AO Dcha m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x}=0$ Por tanto no tiene AO Dcha
Teniendo en cuenta el dominio de la función no tiene sentido hallar el límite cuando x tiende a menos infinito, por tanto las AH u AO por la izd.

27. y=$\sqrt{x^2-9}$; x^2-9=0⇒ $x=\pm 3$

+ | - | +

-3 3

D=$(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

No tiene AV ya que $\lim\limits_{x\to -3}$f(x)=0 y $\lim\limits_{x\to 3}$f(x)=0

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$f(x)=∞ No tiene AH

AO dcha: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1$;

n=$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}\,x-x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado

n= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right).\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right)}{\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9}{\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right)}$=0

y=x AO dcha

AO izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}=-1$;

n=$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}\,x+x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado

n= $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-9}\ +x\right).\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right)}{\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-9}{\left(\sqrt{x^2-9}\ -x\right)}=\frac{-9}{\infty+\infty}$=0

y=-x AO Izd

28. y=$\sqrt{4-x^2}$ 4-x^2=0⇒ $x=\pm 2$

- | + | -

-2 2

D=[-2,2]; $\lim\limits_{x\to\pm 2}$ f(x)=0⇒ No tiene AV

No tiene sentido hallar $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ f(x), por lo que no tiene AH ni AO

29. y=Lx; D=(0,∞); $\lim\limits_{x\to 0^+}Lx=\infty\Rightarrow$ x=0 AV Dcha

$\lim\limits_{x\to+\infty}Lx=\infty\Rightarrow$ no tiene AH; AO: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Lx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=0\Rightarrow$ No tiene AO

30. y=xLx; D=(0,∞); $\lim\limits_{x\to 0^+}xLx=0.\infty$ Indeterminado. $\lim\limits_{x\to 0^+}xLx=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Lx}{1/x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0$ No tiene AV

$\lim\limits_{x\to+\infty}xLx=\infty.\infty=\infty$ No tiene AH

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xLx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}Lx=\infty$ No tiene AO

31. y=$\dfrac{x}{Lx}$ Lx solo existe si x>0, además no puede ser Lx=0 por estar este término en el denominador. Lx=0⇒x=1. Así pues, D=(0,∞)-{1}

AV $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{Lx}=\frac{0}{\infty}=0$ no AV en x=0

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{Lx}=\frac{1}{0}=\infty$ x=1 AV

AH Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{Lx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=\infty$

AO Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{xLx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{Lx}=\frac{1}{\infty}=0$ No tiene AO dcha.

Por la izd no tiene sentido hallar los límites dado el dominio de la función.

32. **y=**$\dfrac{Lx}{x}$ D=$(0,\infty)$

AV: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{Lx}{x}=\dfrac{\infty}{0}=\infty$ x=0 AV Dcha. Teniendo en cuenta el dominio no tiene sentido hallar el límite por la izd.

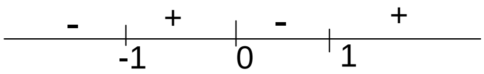
AH dcha $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Lx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=\dfrac{1}{\infty}=0$; y=0 AH dcha. No tiene sentido hallar el límite cuando x tiende a menos infinito.

SOLUCIÓN EJERCICIOS REPRESENTACIÓN GRÁFICA FUNCIONES

1. **$y=x^4-2x^2$**

D=R; cortes (0,0); ($\sqrt{2}$ 0), ($-\sqrt{2}$, 0). Función par, simétrica respecto al eje OY,

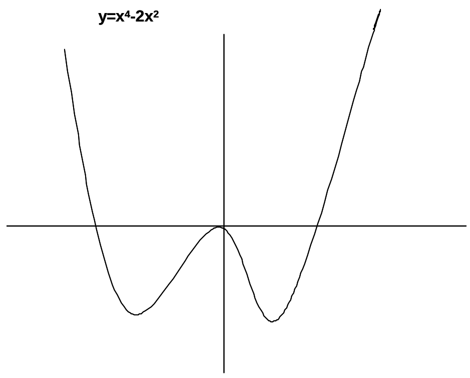
$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$



Crecient$(-1,0)\cup(1,\infty)$; decreciente $(-\infty,-1)\cup(0,1)$; máximo en (0,0); Mínimos en (-1,-1) y en (1,-1).

$y''=12x^2-4=0 \Rightarrow x=-1/\sqrt{3}$; $x=1/\sqrt{3}$ y dando valores en los intervalos correspondientes se obtiene: convexa $(-\infty,-1/\sqrt{3})\cup(1/\sqrt{3},\infty)$; cóncava $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

Asíntotas: no tiene



2. **y=xLx**

D=$(0,\infty)$; cortes (1,0); $y'=Lx+1=0 \Rightarrow Lx=-1 \Rightarrow x=e^{-1}$ y dando valores en los intervalos correspondientes obtenemos:

Creciente $(1/e,\infty)$; decreciente (0,1/e); (1/e,-1/e)mínimo

$y''=1/x>0$ en todo el dominio. Por tanto es convexa en $(0,\infty)$

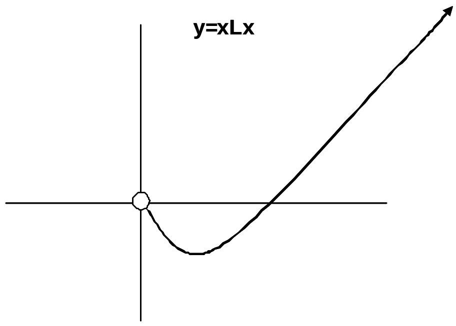
AV: $\lim\limits_{x\to0^+} xLx = 0.\infty$ indeterminado

$\lim\limits_{x\to0^+} xLx = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{Lx}{1/x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} -x = 0$

Por tanto no tiene AV

AH: $\lim\limits_{x\to+\infty} xLx = \infty.\infty = \infty$ No tiene AH

AO: m=$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xLx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} Lx = \infty$ No tiene AO



3. **$y=xe^{1/x}$**

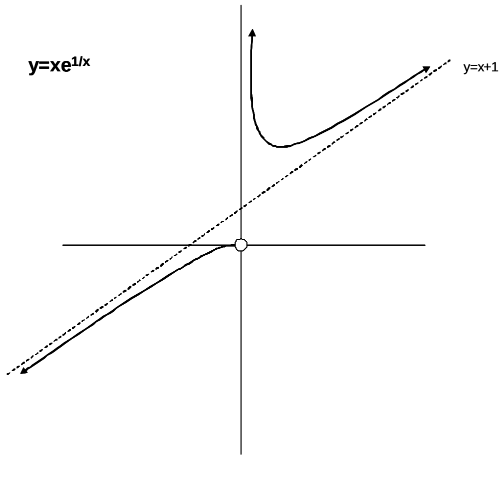
D=R-{0}; cortes no tiene;

$y'=e^{1/x}(1-\dfrac{1}{x}) = e^{1/x}(\dfrac{x-1}{x})$; $\begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$ y dando valores en los intervalos correspondiente obtenemos: Creciente $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ decreciente (0,1). Mínimo en (1,e)

$y''=\dfrac{1}{x^3}e^{1/x}$; dando valores antes y después del cero se obtiene cóncava $(-\infty,0)$; convexa $(0,\infty)$

AVlim $\lim\limits_{x\to0^-} xe^{1/x} = 0.e^{-\infty} = 0.0 = 0$;

$\lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x} = 0.e^{\infty} = 0.\infty$ indeterminado



$\lim\limits_{x\to0^+} xe^{1/x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{1/x}}{1/x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-1/x^2.e^{1/x}}{-1/x^2} =$

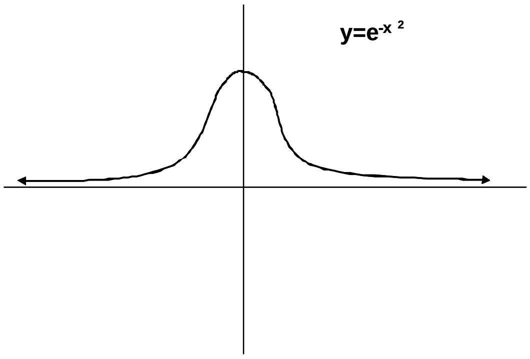
$=\lim\limits_{x\to0^+} e^{1/x} = \infty \Rightarrow$ x=0 AV dcha. AH $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{1/x} = \infty e^0 = \infty$. No tiene AH;

AO m=$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$; n=$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{1/x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{1/x} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = e^0 = 1 \Rightarrow$ y=x+1 AO

4. **y=e**$^{-x^2}$

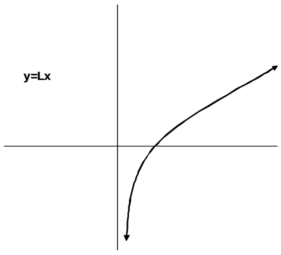
D=R; no corta al eje OX, corte eje OY (0,1);
Es par, simétrica respecto al eje OY

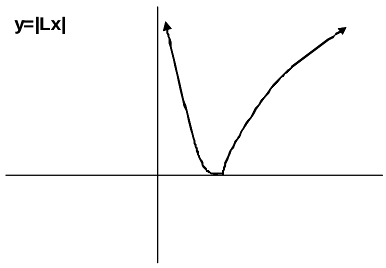


y'=$-2xe^{-x^2}$ decreciente $(0,\infty)$, crec.$(-\infty,0)$
Máximo en (0,1) .
y''=$e^{-x^2}(4x^2-2)$ cóncava $(-1/\sqrt{2}\,,1/\sqrt{2}\,)$
convexa $((-\infty,-1/\sqrt{2}\,)\cup(1/\sqrt{2}\,,\infty)$.
X=$-1/\sqrt{2}$ y x=$1/\sqrt{2}$ puntos de inflexión
AV no tiene. AH: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}=e^{-\infty}=0\Rightarrow$ y=0 AH

5. **y=|Lx|**

La gráfica puede hacerse a partir de la de la función y=Lx que es conocida



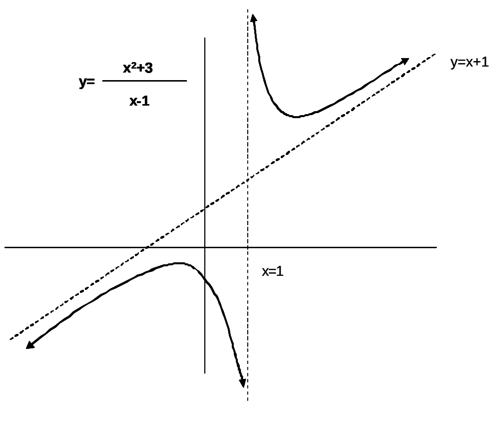


No obstante, si queremos estudiar sus características lo haremos a partir de la función definida a trozos. y=Lx=$\begin{cases} -Lx \text{ si } 0<x<1 \\ Lx \text{ si } x\geq 1\end{cases}$ D=$(0,\infty)$; cortes (1,0)

y'=$\begin{cases} -1/x \text{ si } 0<x<1 \\ 1/x \text{ si } x>1\end{cases}$ No es derivable en x=1. En (0,1) y'<0 luego f es decreciente. En $(1,\infty)$ y'>0 luego f es creciente. y''=$\begin{cases} 1/x^2 \text{ si } 0<x<1 \\ -1/x^2 \text{ si } x>1\end{cases}$ convexa (0,1), cóncava $(1,\infty)$;
(1,0) es un punto de inflexión
AV $\lim\limits_{x\to0^+}|Lx|=\infty\Rightarrow$ x=0 AV Dcha; AH $\lim\limits_{x\to+\infty}|Lx|=L\infty=\infty$ No tiene AH por la dcha. Por la izd no tiene sentido mirarla dado cual es su dominio
AO: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|Lx|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Lx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{1}{\infty}=0$ Luego no tiene AO

6. **y=**$\frac{x^2+3}{x-1}$

D=R-{1},No es par ni impar Ptos corte:(0,-3)

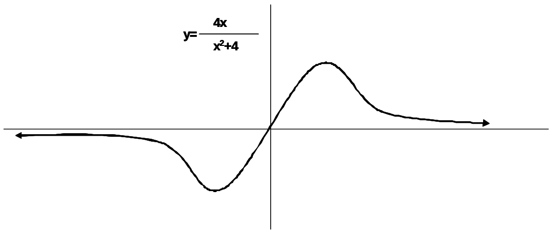


y'=$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; creciente $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$
decreciente (-1,3)-{1}. Máximo:(-1,-2),
Mínimo(3,6); y''=$\frac{8x-8}{(x-1)^4}$ convexa$(1,\infty)$,
cóncava $(-\infty,1)$. No tiene puntos de inflexión
AV: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{4}{0}=\infty$ x=1 AV
AH:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ No tiene AH;
AO m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-x}=1$;
n=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$ Luego y=x+1 AO

7. **y=**$\dfrac{4x}{x^2+4}$

D=R. Cortes ejes (0,0)

Es impar, simétrica respecto al origen



y'=$\dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$; decreciente en $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

creciente en (-2,2). Máximo (2,1),

Mínimo(-2,-1); y''=$\dfrac{8x^3-96x}{(x^2+4)^3} = \dfrac{x(8x^2-96)}{(x^2+4)^3}$

Convexa $(-\sqrt{12}\,,0)\cup(\sqrt{12}\,,\infty)$;

cóncava en $(-\infty,-\sqrt{12}\,)\cup(0,\sqrt{12}\,)$; pts inflexión x=-$\sqrt{12}$, $x=\sqrt{12}$, x=0

No tiene AV, AH y=0

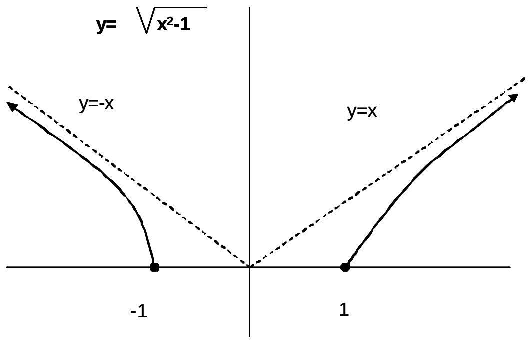
8. **y=**$\sqrt{x^2-1}$

D=$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$; cortes (1,0),(-1,0)

y'=$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ Y'=. Creciente $(1,\infty)$; dec $(-\infty,-1)$

No tiene extremos relativos.

$y''=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)}$; y''<0 en todo el dominio, por tanto y=f(x) cóncava en su D



AV no tiene; AH no tiene

AO dcha: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1$;

n=$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\;-x\right)=\infty-\infty$ Multiplicamos y dividimos por el conjugado

n= $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\;-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\;-x\right).\left(\sqrt{x^2-1}\;+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\;+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}\;+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\;+x\right)}$ =0

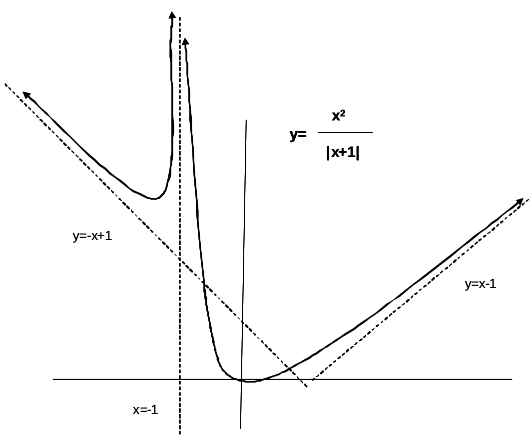
y=x AO dcha

AO izd: m=-1 (se hace de igual forma pero la raíz que aparece en el numerador mantiene el signo positivo mientras que a x que aparece en el denominador es negativa, por tanto el límite será -1 en vez de 1); n=0 (se hace de forma similar al límite por la dcha pero teniendo emn cuenta que al ser x negativa el $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\;x-x\right)=\infty+\infty$ y en cambio $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}\;x+x\right)=\infty-\infty$). Así pues y=-x AO izd.

9. **y=**$\dfrac{x^2}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{-x-1} & \text{si x<-1}\\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si x>-1}\end{cases}$

D=R-{-1} ; cortes ejes (0,0)

$y'=\begin{cases}\dfrac{-x^2-2x}{(-x-1)^2} & \text{si x<-1}\\ \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} & \text{si x>-1}\end{cases}$



De los resultados obtenidos a través del signo de y' obtenemos que la función Decrece $(-\infty,-2)$, crece (-2,-1), decrece (-1,0), crece $(0,\infty)$.

NOTA: $-x^2-2x=0 \Rightarrow$ x=-2, pues la otra raíz x=0 no es menor que -1. Por tanto, para saber el signo de la derivada damos por tanto valores en $(-\infty,-2)$ y en (-2 , 1). Lo mismo ocurre con x^2+2x, su única raíz posterior a -1 es x=0, por lo que hay que dar valores en (-1,0) y en $(0,\infty)$.

$y'' = \begin{cases} \frac{2}{(-x-1)^3} \text{ si x<-1} \\ \frac{2}{(x+1)^3} \text{ si x>-1} \end{cases}$ De lo que se sigue que la función es convexa en su dominio.

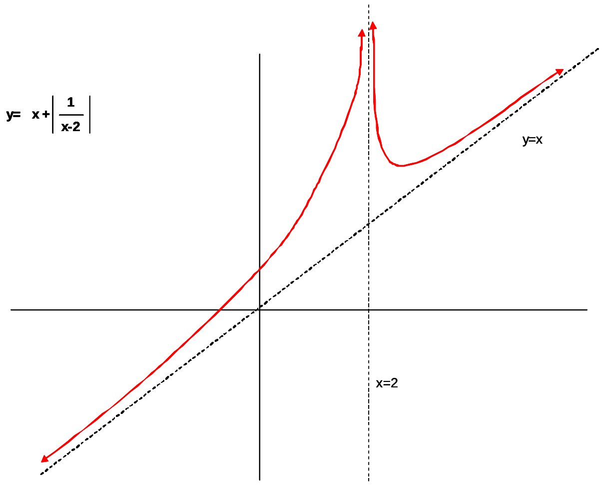
AV: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2}{|x+1|} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ x=-1 AV

AH: $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{-x-1} = \infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$ por tanto no hay AH

AO Dcha m=$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1$; n=$\lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2}{x+1} - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$ Luego y=x-1 AO Dcha

AO Izd m=$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{-x^2-x} = -1$; n=$\lim_{x\to -\infty}(\frac{x^2}{-x-1} + x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{-x-1} = 1$ Luego y=-x+1 AO Izd

10. y=x+$\left|\frac{1}{x-2}\right| = \begin{cases} x + \frac{-1}{x-2} \text{ si x<2} \\ x + \frac{1}{x-2} \text{ si x>2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-2x-1}{x-2} \text{si x<2} \\ \frac{x^2-2x+1}{x-2} \text{ si x>2} \end{cases}$



D=R-{2}. Cortes: eje OY (0, 1/2); Eje OX: x^2 -2x-1=0

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{2} \ <2 \\ x = 1+\sqrt{2} \ >2 \text{ no válido} \end{cases}$

x^2-2x+1=0⇒x=1 pero no pertenece al dominio. Luego solo hay un corte con el eje OX corte (1-$\sqrt{2}$,0)

$y' = \begin{cases} \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2} \text{ si x<2} \\ \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \text{ si x>2} \end{cases}$; x^2-4x+5=0 no tiene solución.Dando valores y' es positiva en (–∞, 2), por lo que f crece en dicho intervalo. Por otra parte,

x^2-4x+3=0$\begin{cases} x = 3 > 2 \\ x = 1 < 2, \text{ no válida} \end{cases}$

Dando valores a y' en (2,3) y en (3,∞) obtenemos que en el 1º y'es negativa y en el 2º positiva por lo que f es decreciente en (2,3) y creciente en (3,∞). Tienen un mínimo en el punto (3,4).

$y'' = \begin{cases} \frac{-2}{(x-2)3} \text{ si x<2} \\ \frac{2}{(x-2)^3} \text{ si x>2} \end{cases}$ En ambos casos ese cociente es positivo: en el primer trozo por ser negativos el numeraor y el denominador y en el segundo por ser ambos positivos. Por tanto la función es convexa en todo su dominio

AV: $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 + \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ x=2 AV; AH $\lim_{x\to\infty} x + \left|\frac{1}{x-2}\right| 2 + \frac{1}{0} = \infty$ No hay AH

AO: Por la izd y porla dcha la función tiene distintas fórmulas por lo que tendremos que calcular las AO por ambos lados. AO Dcha: m=$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x} = 1$

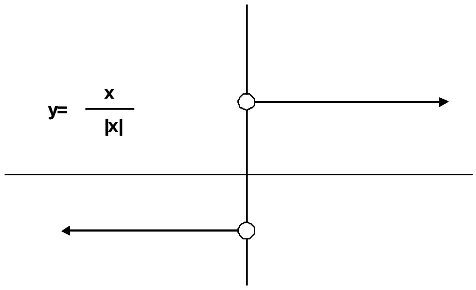
n=$\lim_{x\to +\infty}(\frac{x^2-2x+1}{x-2} - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+1-x2+2x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$ y=x AO dcha

AO Izd: m=$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x-11}{x^2-2x} = 1$;

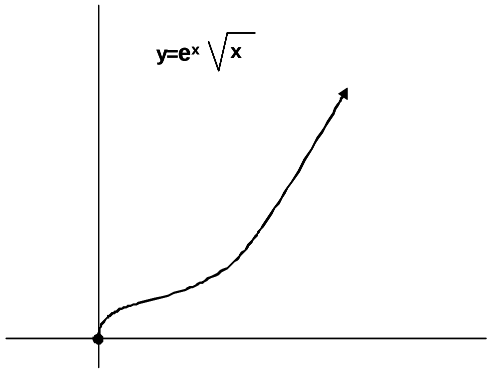
n=$\lim_{x\to -\infty}(\frac{x^2-2x-1}{x-2} - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x-1-x2+2x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{\infty} = 0$ y=x AO izd

En consecuencia y=x AO

11. **y=**$\frac{x}{|x|}$Y=Y==$\begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}$



D=R-{0} Función definida a trozos y compuesta por dos semirrectas, es innecesario hacer su estudio. Su gráfica es:



12. **y=**$e^x\sqrt{x}$ D[0,∞), cortes (0,0)

$y' = e^x\sqrt{x} + e^x\frac{1}{2\sqrt{x}} = e^x(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})$ dado que x>0 y' es positiva y por tanto f es creciente en su dominio.

$y'' = e^x(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{\ }}) + e^x(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{-2}{2\sqrt{x}}}{4x})=$

$e^x(\sqrt{x} + \frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}) = e^x(\frac{4x^2+4x-1}{4x\sqrt{x}})$ e^x y el denominador son positivos por lo que el signo

depende del numerador. $4x^2+4x-1$ =0$\begin{cases} x = \frac{-4+\sqrt{32}}{8} \\ x = \frac{-4-\sqrt{32}}{8} \notin D, \text{no válida} \end{cases}$

Dadndo valores en (0, $\frac{-4+\sqrt{32}}{8}$) y en ($\frac{-4+\sqrt{32}}{8}$, ∞), y'' es negativa en el primero y positiva en el segundo. Así pues en (0, $\frac{-4+\sqrt{32}}{8}$) la función es cóncava y en ($\frac{-4+\sqrt{32}}{8}$, ∞) convexa

Enx=$\frac{-4+\sqrt{32}}{8} \approx 0'2$ hay un punto de inflexión.

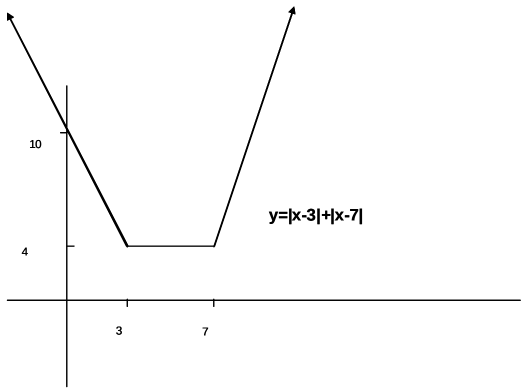
Asíntotas: Fijándonos en el dominio no hay AV y las horizontales u oblicuas solo pueden calcularse a la dcha. AH $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty.\infty = \infty$

AO m=$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^x 2\sqrt{x} = \infty.\infty = \infty$ No hay AO

Nota: en la 1ª igualdad simplificamos x y $\sqrt{x}$, en la segunda aplicamos L´Hôpital al ser del tipo ∞/∞ y en la tercera operamos.

13. $y = |x-3| + |x-7| = \begin{cases} -2x+10 \text{ si } x<3 \\ 4 \text{ si } 3 \le x \le 7 \\ 2x-10 \text{ si } x>7 \end{cases}$

Función definida a trozos, siendo una recta en cada uno de ellos. Es innecesario realizar el estudio. Su gráfica es:



14. **y=e^x (x-2)**

D=R. Cortes ejes: (0,-2); (2,0)

y'=e^x(x-2)+e^x= e^x(x-1)

$(-\infty,1)$ decreciente, $(1,\infty)$ creciente .

Mínimo(1,-e)

Y''=e^x(x-1)+e^x=e^{x}x Cóncava $(-\infty,0)$

convexa $(0,\infty)$. (0,-2) punto inflexión

AV no tiene.

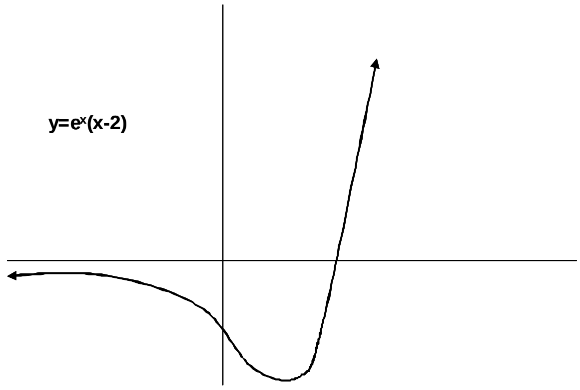
AH Dcha $\lim_{x\to+\infty} e^x(x-2)=e^{+\infty}\infty=\infty$ No tiene por lo que puede tener AO dcha

AH izd:

$\lim_{x\to-\infty} e^x(x-2)=e^{-\infty}\infty=0.\infty$ indeterminado. $\lim_{x\to-\infty} e^x(x-2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{\infty}=0$

Y=0 AH izd.

AO Dcha: m=$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-2)+e^x}{1}=\infty$ No tiene AO Dcha.



15. **y=senx+cosx**

Dado que es periódica de período 2π restrigimos su estudio al intervalo $[0, 2\pi)$

D=$[0, 2\pi)$. Corte eje OY: f(0)=1, punto (0,1)

Cortes eje OX: senx+cosx=0⇒ $senx=-\cos x$ ⇒ x= $3\pi/4$, x=$7\pi/4$ puntos ($3\pi/4$,0), ($7\pi/4$,0)

y'=cosx-senx=0⇒cosx=senx⇒ x=$\pi/4$, x=$5\pi/4$

Dando valores obtenemos:

y'>0 $(0,\pi/4)\cup(5\pi/4,2\pi)$ f creciente.

y'<0 en $(\pi/4,5\pi/4)$ f decreciente

Máximo ($\pi/4$, $\sqrt{2}$), mínimo ($5\pi/4$,-$\sqrt{2}$)

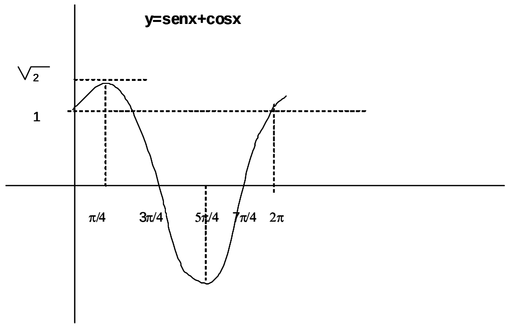
y''=-senx-cosx=⇒senx=-cosx⇒ x=$3\pi/4$, x=$7\pi/4$

Dando valores a y'' f cóncava $(0,3\pi/4)\cup(7\pi/4,2\pi)$

$(3\pi/4,7\pi/4)$ convexa

x=$3\pi/4$ y x=$7\pi/4$ puntos inflexión

No tiene asíntotas.



16.**y**=$\frac{x^2}{9-x^2}$

D=R-{-3,3}. Función par, simétrica respecto al eje OX.

Cortes eje punto (0,0)

$$y'=\frac{2x(9-x^2)+x^2 2x}{(9-x^2)^2}=\frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

Crec(0,3)∪(3,∞); decrec(-∞,3)∪$(-3,0)$

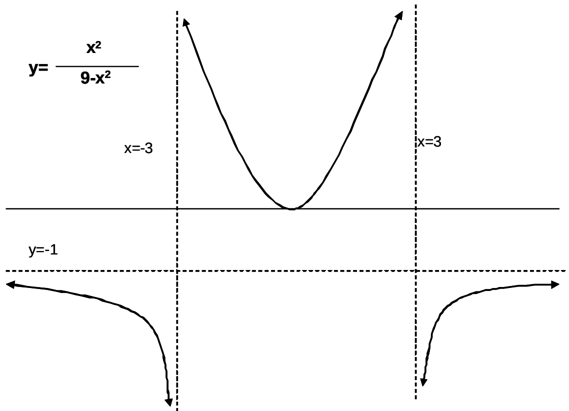
(0,0) mínimo

$$y''=\frac{18(9-x^2)^2+18x.2.(9-x^2).2x}{(9-x^2)^4}=\frac{18(9-x^2)+72x^2}{(9-x^2)^3}=$$

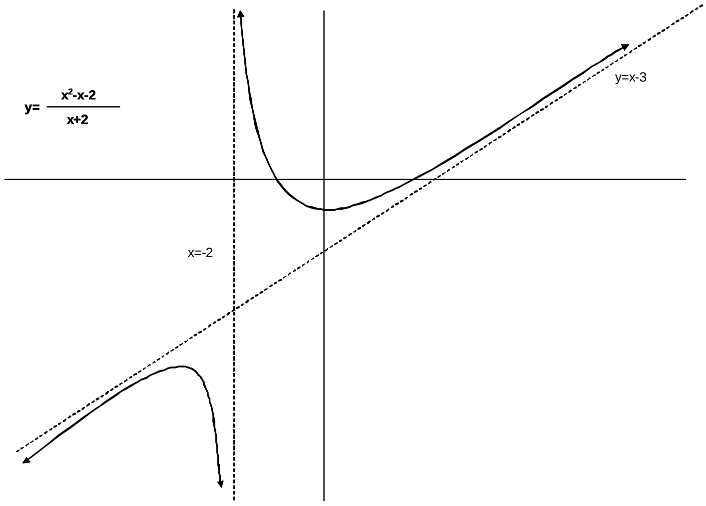
$=\frac{54x^2+162}{(9-x^2)^3}$ El numerador es positivo por lo que el signo de y'' depende del denominador, dando valores y'' es positiva en (-3,3) y negativa en los restantes puntos del dominio. Luego f convexa en (-3,3) y cóncava en (-∞,-3)∪(3,∞)

AV $\lim_{x\to-3}\frac{x^2}{9-x^2}=\frac{9}{0}=\infty$;$\lim_{x\to3}\frac{x^2}{9-x^2}=\frac{9}{0}=\infty$ x=-3 y x=3 asíntotas verticales

AH $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{9-x^2}=-1$; y=-1 AH



17. y=$\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$



D=R-{-2} Cortes: (-1,0), (2,0), (0,-1)

y'=$\dfrac{(2x-1)(x+2)-(x^2-x-2)}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

Crec $(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$;
dec (-4,0)-{-2}

(-4,-9) máximo, (0,-1) mínimo

$y''=\dfrac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x).2(x+2)}{(x+2)^4}=$
$=\dfrac{(2x+4)(x+2)-(x^2+4x).2}{(x+2)^3}=\dfrac{8}{(x+2)^3}$

Cóncava $(-\infty,2)$, convexa $(2,\infty)$

No tiene puntos de inflexión

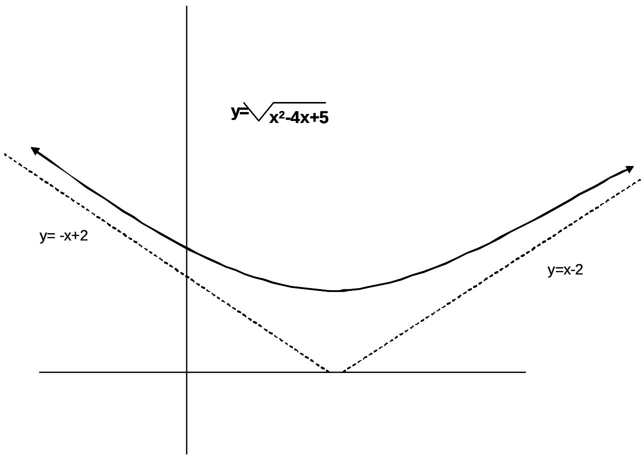
AV $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\frac{4}{0}=\infty \Rightarrow$x=-2 AV

AH $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ No tiene AH

AO: m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2+2x}=1$;

n=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x+2}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x-2}{x+2}=-3$. AO y=x-3

18. y=$\sqrt{x^2-4x+5}$



D=R, cortes (0,$\sqrt{5}$)

$y'=\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

Decrec($-\infty$,2), crec(2,∞). (2,1) mínimo

y''=$\dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-(x-2)\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}}{x^2-4x+5}=$

$=\dfrac{1}{(x^2-4x+5)\sqrt{x^2-4x+5}}>0\forall x\in R$

Convexa $(-\infty,\infty)$. AV no tiene, AH no tiene.

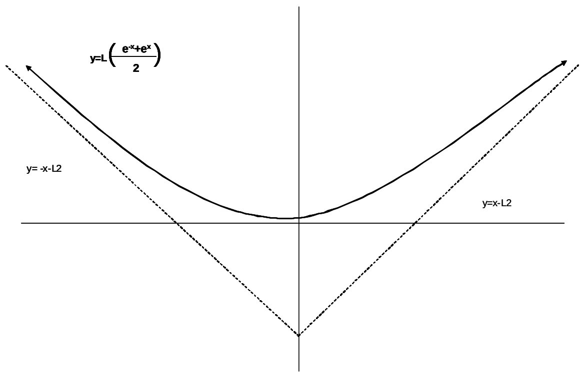
AO Dcha m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x}=1$

n=$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+5}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+5-x^2}{\sqrt{x^2-4x+5}+x}=\frac{-4}{2}=-2$. Luego y=x-2 AO Dcha.

La AO izd se hace de manera análoga pero teniendo en cuenta que si x→ $-\infty$ x es negativa mientras que la raíz sigue siendo positiva por lo que por la izd m=-1 y n=2 .AO izd y=-x+2

NOTA: los cálculos de estos límites se hacen de forma similar a los del ejercicio 8.

19. y=L$\left(\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)$



D=R; Corte Eje OY (0,0)

Corte Eje OX; L$\left(\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)=0\Rightarrow$ $\left(\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)=1\Rightarrow x=0$. No tiene más puntos de corte

y'=$\dfrac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=0\Rightarrow e^{-x}=e^{x}\Rightarrow$ x=0

Dando valores antes y después de x=0 obtenemos que y'<0 en $(-\infty,0)\Rightarrow$ f decreciente y’>0 en $(0,\infty)\Rightarrow$ f creciente. En (0,0) tiene un mínimo

y”=$\frac{(e^{-x}+e^{x})(e^{-x}+e^{x})-(-e^{-x}+e^{x})(-e^{-x}+e^{x})}{(e^{-x}+e^{x})^{2}} = \frac{4}{(e^{-x}+e^{x})} > 0 \forall x \in R \Rightarrow$ f convexa en R.

AV no tiene

AH: $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{L}\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right) = L\left(\frac{e^{-\infty}+e^{+\infty}}{2}\right) = L(\frac{0+\infty}{2}) = \infty$ No hay AH por la dcha, de igual forma se haría por la izd.

AO Dcha: m=$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)}{x}$ =(LHôpital)=$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = (*) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-e^{-2x}+1}{e^{-2x}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$

(*) dividimos numerador y denominador por e^x

n=$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)-Le^{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{L}\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2e^{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} L\left(\frac{e^{-2x}+1}{2}\right) =$

=L(1/2)=L1-L2=-L2. Por tanto AO Dcha y=x-L2

AO izd: m=$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)}{x}$ =(LHôpital)=$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}(*) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{-1+0}{1+0} = -1$

(*) dividimos numerador y denominador por e^{-x}

n=$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(L\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)+Le^{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{L}\left(\frac{(e^{-x}+e^{x})e^{x}}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} L\left(\frac{1+e^{2x}}{2}\right) =$

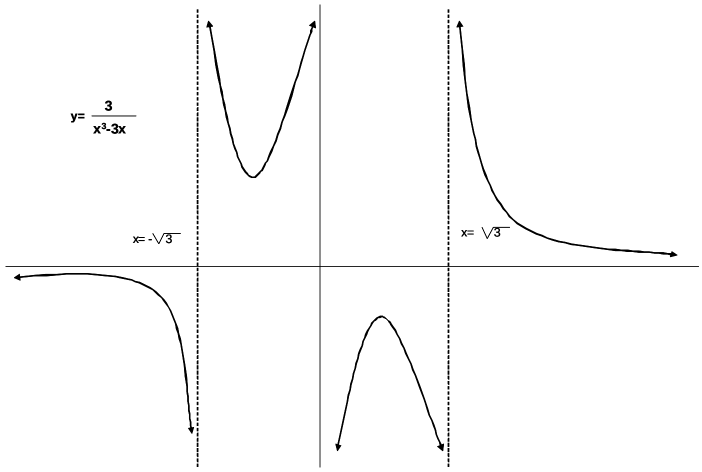
=L(1/2)=L1-L2=-L2. Por tanto AO Izd y=-x-L2

20. $y = \frac{3}{x^{3}-3x}$

D=R-{0,$-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$}.

No corta a los ejes.

Función impar, simétrica respecto al origen.



$y' = \frac{-3(3x^{2}-3)}{(x^{3}-3x)^{2}} = \frac{-9x^{2}+9}{(x^{3}-3x)^{2}}$

$-9x^2+9=0$ x=-1, x=1

Decrece $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1)$

Crece (-1,0)$\cup$(0, 1)

Decr (1,, $\sqrt{3}$) $\cup$ ($\sqrt{3}$, ∞)

Mínimo(-1,3/2), máximo (1,-3/2)

$y'' = \frac{-18x(x^{3}-3x)^{2}-(-9x^{2}+9).2.(x^{3}-3x)(3x^{2}-3)}{(x^{3}-3x)^{4}} = \frac{-18x(x^{3}-3x)-(-9x^{2}+9).2(3x^{2}-3)}{(x^{3}-3x)^{3}} = \frac{36x^{4}-54x^{2}+54}{(x^{3}-3x)^{3}}$

El numerador no tiene raíces, por lo que es `positivo para cualquier valor de x (es una ecuación bicuadrada que se resuelve haciendo el cambio de variable x^2=t). Por tanto, el signo de y’’ depende del denominador cuyas raíces son x=0,x=$-\sqrt{3}$, x=$\sqrt{3}$, dando valores en los intervalos a los que dan lugar estas raíces comprobamos que:

$(-\infty,-\sqrt{3})$ y”<0, f cóncava; (-$\sqrt{3}$, 0) y”>0 f convexa; (0,$\sqrt{3}$) y”<0 f concava

($\sqrt{3}$ ∞) y’’>0 f convexa

AV $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}$ f(x)=$\frac{3}{0} = \infty$; $\lim\limits_{x\to0}$f(x)=$\frac{3}{0} = \infty$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}$ f(x)=$\frac{3}{0} = \infty \Rightarrow$ x=-$\sqrt{3}$; x=0 y x=$\sqrt{3}$ AV

AH$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^{3}-3x} = 0 \Rightarrow$y=0 AH

21. $y=e^{\frac{1}{x^2-1}}$

D=R-{-1,1}, Pto corte $(0,e^{-1})$

$y'=e^{\frac{1}{x^2-1}}.\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$; Crece $(-\infty-1)\cup(-1,0)$ Decrece $(0,1)\cup(1,\infty)$; $(0,e^{-1})$ Máximo

$y''=e^{\frac{1}{x^2-1}}\dfrac{4x^2}{(x^2-1)^4}+e^{\frac{1}{x^2-1}}\dfrac{-2(x^2-1)^2+2x.2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=e^{\frac{1}{x^2-1}}\dfrac{6x^4-2}{(x^2-1)^4}$;

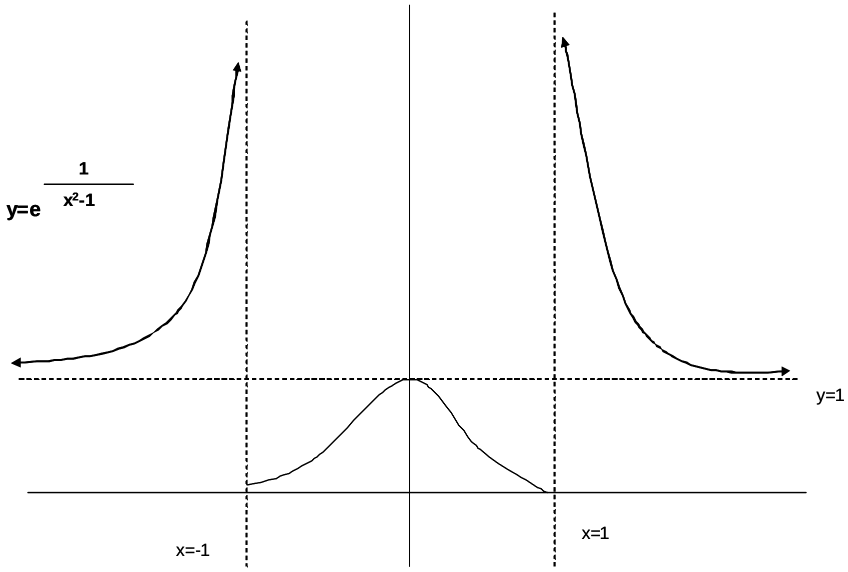
$6x^4-2=0$ $x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{2}{6}}\simeq 0'76$ Dando valores f convexa $\left(-\infty,-\sqrt[4]{\frac{2}{6}}\right)-\{-1\}\cup\left(\sqrt[4]{\frac{2}{6}},\infty\right)-\{1\}$

F cóncava $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{6}},\sqrt[4]{\frac{2}{6}}\right)$; $x=-\sqrt[4]{\frac{2}{6}}$ y $x=\sqrt[4]{\frac{2}{6}}$ puntos de inflexión.

AV $\lim\limits_{x\to-1^-}e^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{+\infty}=\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}e^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{-\infty}=0$; x=-1 AV izd

$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{+\infty}=\infty$; x=1 AV dcha

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x^2-1}}=e^{0}=1$; y=1 AH.



22. **$y=tg^2\,x$**

Es periódica de período π. Hacemos su estudio en el intervalo $[0,2\pi)$

$D=[0,2\pi)-\{\pi/2,3\pi/2\}$

$y'=2tgx.(1+tg^2x)=0\Rightarrow x=0, x=\pi$

$(0,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2)$Crece

$(\pi/2,\pi)\cup(3\pi/2,2\pi)$Decrece

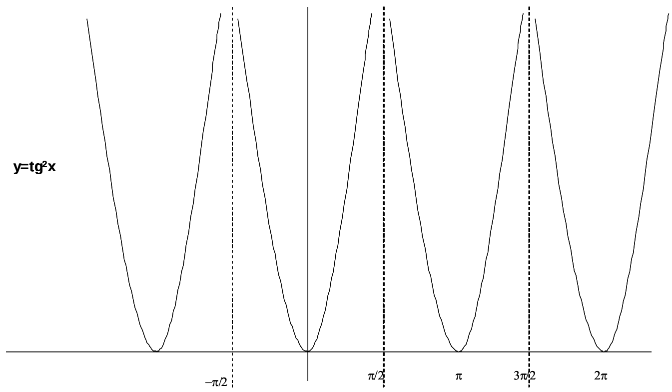
$(\pi,0)$ mínimo

$y''=2(1+tg^2x)^2+4tg^2x(1+tg^2x)=$

$=(1+tg^2x)(2+6tg^2x)>0$ en D, f convexa en su dominio.

AV en $x=\pi/2$ y $x=3\pi/2$

No tiene AH ni AO



23. **y=$\frac{x}{e^x}$**

D=R; corte (0,0)

$y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{(1-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow$

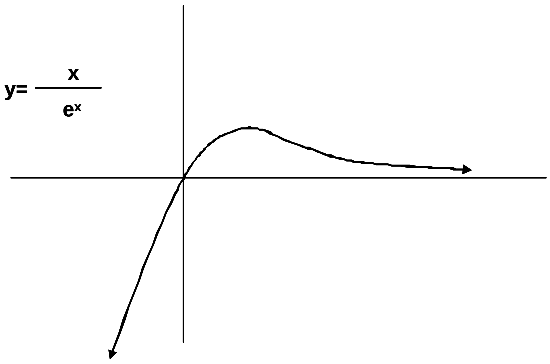
1-x=0⇒ x=1 $(-\infty, 1)$ crece, $(1,\infty)$ decrece

(1,1/e) máximo

$y'' = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2+x)}{e^{2x}} = \frac{-2+x}{e^x}$=0

-2+x=0 ⇒x=2; $(-\infty, 2)$cóncava, $(2,\infty)$convexa

$(2,\frac{2}{e^2})$ punto de inflexión



No tiene AV

AH Dcha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminado. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$ y=0 AH dcha

AH izd $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^{-\infty}} = \frac{\infty}{0} = \infty$ No tiene AH izd

AO izd m=$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x.e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{0} = \infty$ No tiene AO

24. **y=$\frac{Lx}{x}$**

D=$(0,\infty)$ corte (1,0)

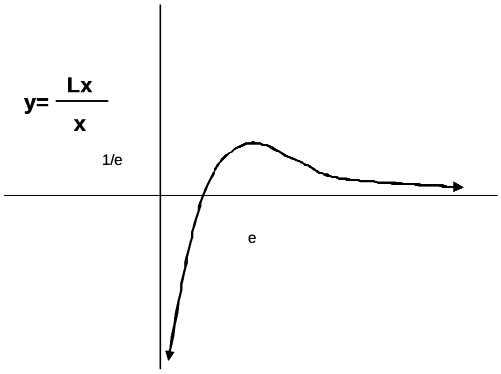
$y' = \frac{\frac{1}{x}x - Lx}{x^2} = \frac{1-Lx}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - Lx = 0 \Rightarrow$

x=e; Creciente (0,e), decreciente (e,∞)

(e,1/e) máximo

$y'' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-Lx)2x}{x^4} = \frac{-3x+2xLx}{x^4} =$

$= \frac{x(-3+2Lx)}{x^4} = \frac{-3+2Lx}{x^3}$ El denominador es positivo pues D=(0,∞), por tanto el signo depende del numerador.



-3+2Lx=0⇒ Lx=$\frac{3}{2}$ ⇒ x=$e^{3/2}$. Dando valores f es cóncava $(0, e^{3/2})$, f es convexa en $(e^{3/2}, \infty)$

x=$e^{3/2}$ punto de inflexión

AV: $\lim_{x\to0^+} \frac{Lx}{x} = \frac{\infty}{0} = \infty$ x=0 AV Dcha. Teniendo en cuenta el dominio no tiene sentido hallar el límite por la izd.

AH dcha $\lim_{x\to+\infty} \frac{Lx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0$ y=0 AH dcha. No tiene sentido hallar el límite cuando x tiende a menos infinito.

25. **y=(x-1)e^x**

D=R; cortes (0,-1), (1,0)

$y' = e^x + (x-1)e^x = e^x.x = 0 \Rightarrow x = 0$

$(-\infty, 0)$ decrece, $(0,\infty)$ crece, (0,-1) mínimo

$y'' = e^x x + e^x = e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

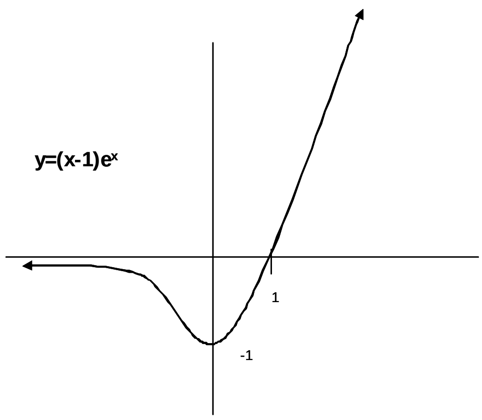
$(-\infty - 1)$ cóncava, $(1,\infty)$ convexa; x=1 pto infle.

AV no tiene

AH dcha $\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x = \infty.e^{+\infty} = \infty.\infty = \infty$ No tiene

AH izd $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = -\infty e^{-\infty} = -\infty.0$ indeter.

$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$ y=0 AH izd



AO Dcha $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + (x-1)e^x}{1}) = \lim_{x\to+\infty} e^x x = \infty.\infty = \infty$ No tiene

26. $y=e^{-x^2}$

D=R; no corta al eje OX, corte eje OY (0,1)

Fnción par, simétrica respecto al eje OX

$y' = -2xe^{-x^2} = 0; x = 0;$ creciente (-∞,0)

decreciente $(0,\infty)$; (0,1) máximo

$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(-2+4x^2) = 0 \Rightarrow$

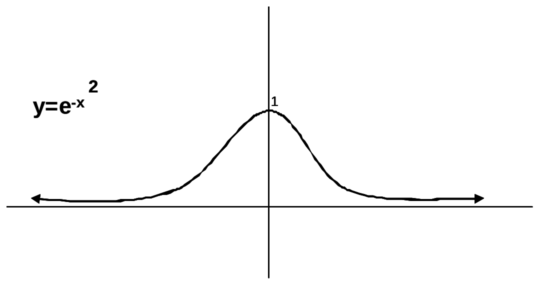
$-2+4x^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; $(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$cóncava

$(-\infty, -\sqrt{1/2}) \cup (\sqrt{1/2}, \infty)$ convexa

$x = -\sqrt{1/2}$ y $x=\sqrt{1/2}$ Ptos inflexión

AV no tiene

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$ y=0 AH



27. **$y=x^2e^{-x}$**

D=R; corte (0,0)

$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow$

x=0, x=2; Crece (0,2)

Decrece $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

(0,0)mínimo, $(2,4e^{-2})$ máximo

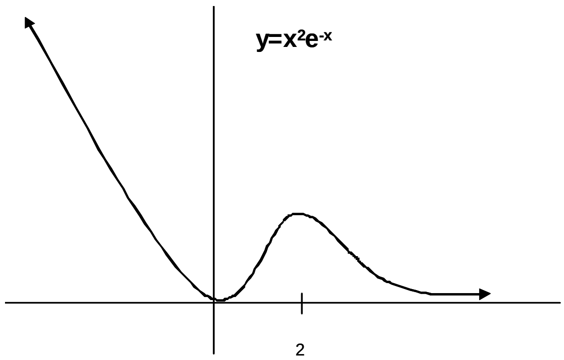
$y'' = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) =$

$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{2}$

$(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$ convexa

$(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ cóncava. $x=2-\sqrt{2}$ y $x=2+\sqrt{2}$

Ptos inflexión.



AV no tiene; AH dcha $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \infty.0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

Luego y=0 AH dcha.

AH izd $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty.\infty = \infty$ no tiene

AO izd $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = \infty.\infty = \infty$ No tiene.

28. $y=\dfrac{x^3}{Lx}$

$D=(0,\infty) - \{1\}$ no tiene Ptos corte

$y' = \dfrac{3x^2Lx - x^3\frac{1}{x}}{(Lx)^2} = \dfrac{x^2(3Lx - 1)}{(lx)^2} = 0 \Rightarrow Lx = 1/3$

$\Rightarrow x=e^{1/3}$ $(0, e^{1/3}) - \{1\}$ decrece, $(e^{1/3}, \infty)$ crece

$(e^{1/3}, 3e)$ mínimo

AV $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3}{Lx} = \frac{0}{\infty} = 0$ no AV en x=0

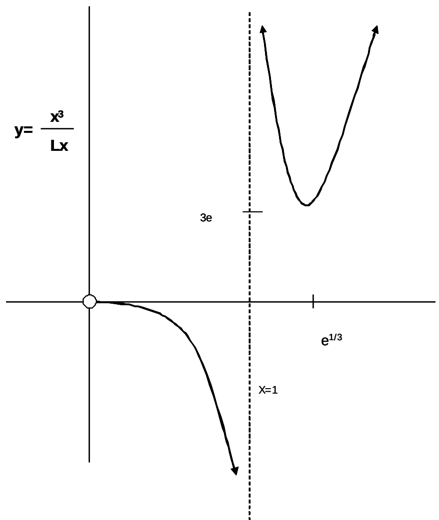
$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3}{Lx} = \frac{1}{0} = \infty$ x=1 AV

AH Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{Lx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = \infty$

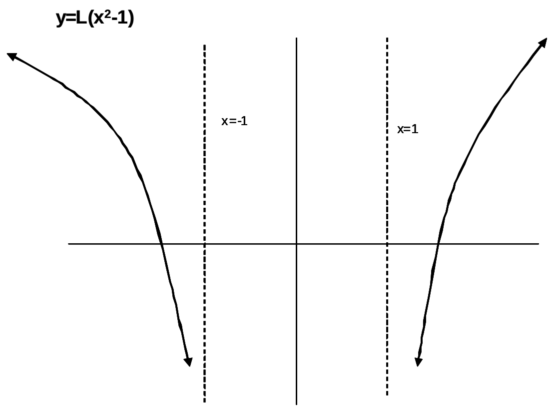
AO Dcha $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{xLx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{Lx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = \infty$

No tiene AO dcha.

Por la izd no tiene sentido hallar los límites dado cual es el dominio de la función.



29.**y=L(x²-1)**



D=$((-\infty-1)\cup(1,\infty)$ No corta al eje OY

Corte eje OX L(x^2-1)=0⇒x^2-1=1⇒ $x=\pm\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},0)$

$y'=\dfrac{2x}{x^2-1}$ El denominador es >0 en D por lo que el signo depende del numerador

$(-\infty,-1)$ decreciente, $(1,\infty)$ creciente

$y''=\dfrac{2(x^2-1)-2x.2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2-4x^2}{(x^2-1)^2}<0\forall x\in D$

f cóncava en su dominio

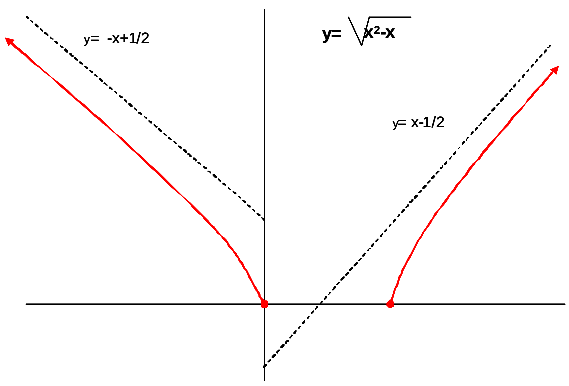
AV $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=L0=\infty$; $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=L0=\infty$;

x=-1 AV izd, x=1 AV Dcha.

AH $\lim\limits_{\pm\infty}L(x^2-1)=L\infty=\infty$ No tiene AH

AO $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{L(x^2-1)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2-1}}{1}=0$ No tiene AO

30.y=$\sqrt{x^2-x}$



D=$(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ cortes (1,0), (0,0)

$y'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ 2x-1=0⇒x=1/2

Teniendo en cuenta el signo de y' y el dominio de la función, f decrece en $(-\infty0)$ y crece en $(1,\infty)$.

No tiene extremos relativos.

$$y''=\frac{2.2\sqrt{x^2-x}-(2x-1).2\dfrac{(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}}{4(x^2-x)}=\frac{4\sqrt{x^2-x}-\dfrac{(2x-1)^2}{\sqrt{x^2-x}}}{4(x^2-x)}=\frac{4(x^2-x)-(2x-1)^2}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}}=$$

$=\dfrac{-1}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}}<0\forall x\in D$ ya que el numerador es negativo y el denominador es positivo en el dominio de f. Así pues, f es cóncava en su dominio.

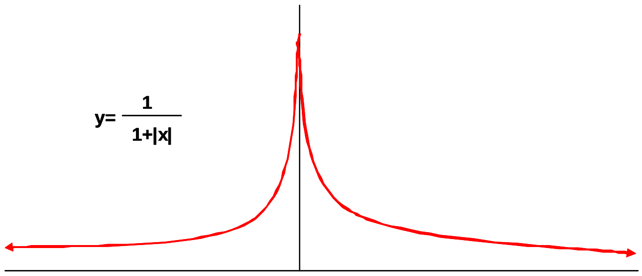
No tiene AV. AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-x}=\infty$ no tiene AH

AO Dcha: m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}=1$; n=$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\dfrac{-1}{2}$

(El cálculo de m se hace multiplicando y dividiendo por el conjugado)

AO Izd. Procediendo del mismo modo y teniendo en cuenta que cuando x tiende a menos infinito el signo de x es negativo pero el de la raíz sigue siendo positivo, se obtiene que por la izd m=-1 y n=1/2, por lo que y=-x+1/2 AO izd.

31. $y=\dfrac{1}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$



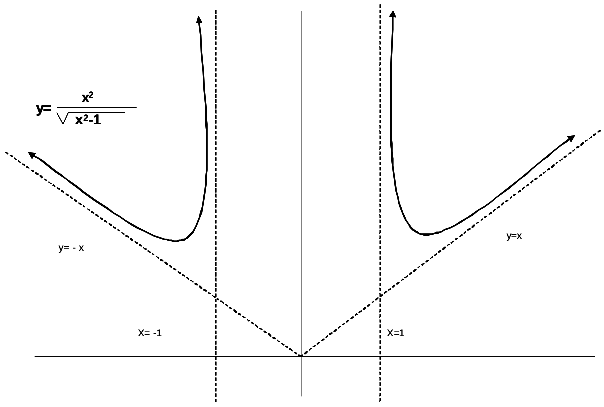
D=R; corte ejes (0,1)

$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0\\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$ no es derivable en x=0 creciente $(-\infty,0)$, decreciente $(0,\infty)$

$y''=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-x)^4} & \text{si } x<0\\ \dfrac{2(1+x)}{(1+x)^4} & \text{si } x>0\end{cases}$ 1-x es positivo si x<0 y 1+x es positivo si x>0 por lo que y'' es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, f es convexa

AV no tiene . AH $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0\Rightarrow$ y=0 AH

32 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$



D=$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. No corta ejes

Funcón par, simétrica respecto al eje OX

$y'=\dfrac{2x\sqrt{x^2-1}-x^2\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{2x(x^2-1)-x^3}{(x^2-)\sqrt{x^2-1}}=$

$=\dfrac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x(x^2-2)}{\sqrt{(x^2-1)^3}}=0\Rightarrow$

x=0, x=$\pm\sqrt{2}$ Dando valores en cada uno de los intervalos a los que dan lugar estas tres raíces obtenemos: f decrece en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(1,\sqrt{2})$ f crece $(-\sqrt{2},-1)\cup(\sqrt{2},\infty)$

$(-\sqrt{2},2)$ mínimo; $(\sqrt{2},2)$mínimo.

$y''=\dfrac{(3x^2-2)\sqrt{(x^2-1)^3}-(x^3-2x).\frac{3}{2}\sqrt{x^2-1}\,.2x}{(x^2-1)^3}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}\,[(3x^2-2)(x^2-1)-(x^3-2x)\frac{3}{2}2x}{(x^2-1)^3}=$

$=\dfrac{\sqrt{x^2-1}\,(2x^2+4)}{2(x^2-1)^3}>0\forall x\in D$ ya que el numerador es positivo y el denominador tam,bién lo es en el dominio de f. Así pues f es convexa en su dominio.

AV: $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0}=\infty;\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0}=\infty$ x=-1 AV izd, x=1 AV Dcha

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty$ No tiene AH

AO Dcha m=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$; n=$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2+x\sqrt{x^2-1}\,)}=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2+x\sqrt{x^2-1}\,)}=0$

y=x AO dcha. Del mismo modo calcularíamos la AO izd que da y=-x