EL PROBLEMA DEL ÁREA. INTEGRAL DEFINIDA

Introducción:
En los siglos XVI y XVII el desarrollo que experimentaron la navegación, astronomía, tenología y mecánica, precisaban del estudio de problemas matemáticos nuevos, como, por ejemplo, aprender a calcular la velocidad el espacio recorridos por un móvil. Por otra parte, desde la antiguedad se intentaba resolver sin éxito dos problemas matemáticos: el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto y la determinación del área de regiones planas limitadas por fronteras curvas.

El problema de la velocidad y el de la recta tangente vienen a ser del mismo tipo y su determinación da origen al cálculo diferencial. Los problemas del cálculo del espacio recorrido por un móvil y del cálculo de áreas son asimismo paralelos y dan lugar al cálculo integral.

Podemos considerar que el origen del cálculo integral se remonta a más de veinte siglos atrás, cuando la escuela griega de geometría intentó determinar el área de regiones planas limitadas por fronteras curvas. Para resolver este problema idearon el método de exhaución debido probablemente a Eudoxio pero desarrollado fundamentalmente por Arquímides. Dicho método consiste en inscribir y circunscribir polígonos en la región cuya área se quiere calcular, el área de estos nos dará aproximaciones por defecto y por exceso del área buscada. Al aumentar el número de lados los polígonos se acercarán cada vez más a la región de partida y por tanto, podemos conseguir una aproximación tan exacta como queramos del área buscada sin más que aumentar suficientemente el número de lados de los polígonos.

Con este método Arquímides halló fórmulas para las áreas del círculo, segmento de parábola y otras regiones. Sin embargo, no fue posible extender el método a otro tipo de regiones más complejas al no poseer técnicas algebraicas que permitiesen simplificar los cálculos.
El nacimiento del concepto de límite, y de otras técnicas matemáticas, permitió la generalización del método de exhaución y dio lugar al concepto de integral definida de una función. Esta nos permitirá hallar el área limitada por la gráfica de dicha función y el eje OX .

El cálculo del área bajo una curva no es sólamente un problema de interés geométrico sino que incumbe a muchas otras áreas de la ciencia. Hay que tener en cuenta que las funciones y sus gráficas surgen de modo natural al intentar comprender fenómenos físicos, económicos, sociales, etc., por tanto es lógico que el cálculo del área limitada por esas gráficas tenga interés para la comprensión más completa de los fenómenos descritos. Así por ejemplo:
- El área comprendida bajo una curva velocidad nos da el espacio recorrido por el móvil
- El área bajo la curva beneficios de una empresa a lo largo de un año nos proporciona .las ganancias acumuladas.
- El área bajo la curva potencia empleada en cada instante en un local nos proporciona la energía consumida.
- El área bajo la curva que marca el caudal de agua vertida por un grifo en un recipiente nos da el volumen acumulado en dicho recipiente.
- El área limitada por la gráfica de una fuerza en función del espacio representa el trabajo realizado por dicha fuerza

Trataremos de introducir el concepto de integral definida de una función continua, para ello definiremos primero la integral definida de una función escalonada, y como toda función continua puede aproximarse mediante funciones escalonadas, se definirá la integral definida de una función continua como un límite de integrales de funciones escalonadas.

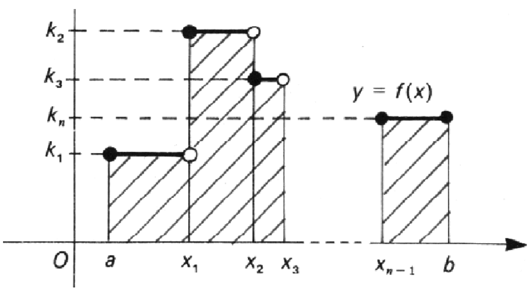
Partición de un intervalo:
Sea [a,b] un intervalo cerrado, llamaremos partición de dicho intervalo a un conjunto de puntos P={ x_0 , x_1 ,.....,x_{n-1} ,x_n } tal que: $a=x_0<x_1<x_2<.......<x_{n-1}<x_n=b$
La partición P determina los subintervalos $[a,x_1],[x_1,x_2],......,[x_{n-1},b]$ cuya unión es [a,b]
Diremos que una partición P' es más fina que P si P' ⊂ P , es decir si todo subintervalo de P' está contenido en un subintervalo de P
Función escalonada:
Sea P una partición del intervalo [a,b], una función f: [a,b]−−−−−→R se llama escalonada si toma valores constante en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ que determina la partición, es decir :

$$f(x)=\begin{cases} k_1 & si\, a \le x < x_1 \\ k_2 & si\, x_1 \le x < x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ k_n & si\, x_{n-1} \le x \le b \end{cases}$$

Integral definida de una función escalonada:
Dada la función escalonada definida en el apartado anterior, llamaremos integral definida de f en el intervalo [a,b] y la denotaremos por $\int_a^b f(x)dx$ al número real :

$$\int_a^b f(x)dx = k_1(x_1-a)+k_2(x_2-x_1)+....+k_n(b-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1});$$ entendiendo $x_0=a$ y $x_n=b$

En el caso de que la función sea enteramente positiva como por ejemplo la siguiente:



El área de cada uno de los rectángulos rayados es base x altura y por lo tanto el área del primer rectángulo será $e_1(x_1-a)$; el del segundo $e_2(x_2-x_1)$ y así sucesivamente, en consecuencia el área del recinto rayado (es decir del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas verticales x=a y x=b) será: $\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$ es decir la integral coincide con el área rayada.
No ocurre lo mismo si la función tuviese alguna imagen negativa, pues en este caso el área total será la suma de las áreas de los distintos rectángulos (todos ellos con áreas positivas), mientras que la integral es el sumatorio de la longitud del intervalo (siempre positiva) por la imagen de los puntos de dicho intervalo (que sería negativa para algunos de ellos); es decir en la integral se restan a las áreas de los rectángulos de imagen positiva las de aquellos cuyas imágenes son negativas.

Ejercicio: Calcular $\int_0^2 f(x)dx$ siendo $f(x)=\begin{cases} -1 & si\, 0 \le x < 1 \\ 2 & si\, 1 \le x < 3/2 \\ 3/2 & si\, 3/2 \le x \le 2 \end{cases}$ Calcular también el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=2

Integral definida de una función continua:
Sea y=f(x) una función continua en [a,b] y designemos por m y M su mínimo y máximo absolutos respectivamente (sabemos que los alcanza por el teorema de Weierstrass).

Sea P={ x_0 , x_1 ,.....,x_{n-1} ,x_n } una partición cualquiera del intervalo [a,b] .LLamemos $\Delta x_1=(x_1-x_0)$, $\Delta x_2=(x_2-x_1)$.... y en general $\Delta x_i=(x_i-x_{i-1})$. La función es continua en cada uno de los subintervalos [x_{i-1} , x_i] que define dicha partición, por tanto tambien alcanzará en cada uno de ellos su máximo y su mínimo absolutos; designemos a dichos valores por m_i y por M_i respectivamente.

Definimos entonces dos funciones escalonadas:

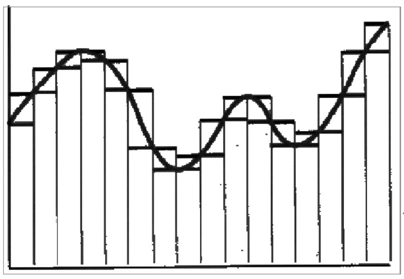
$$E_n(x)=\begin{cases} M_1 & si\, a \le x < x_1 \\ M_2 & si\, x_1 \le x < x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ M_n & si\, x_{n-1} \le x \le b \end{cases} \quad \text{y} \quad e_n(x)=\begin{cases} m_1 & si\, a \le x < x_1 \\ m_2 & si\, x_1 \le x < x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ m_n & si\, x_{n-1} \le x \le b \end{cases}$$

Es evidente que $\int_a^b e_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b E_n(x)dx$

LLamando a $\int_a^b e_n(x)dx = \underline{S_n}$ (suma inferior) y a $\int_a^b E_n(x)dx = \overline{S_n}$ (suma superior), se verifica que:

$$m(b-a) \le \underline{S_n} \le \overline{S_n} \le M(b-a)$$

Geométricamente, si f(x) es enteramente positiva, esto tiene un significado muy claro



m(b-a) es el área del rectángulo inscrito, $\underline{S_n}$ es el área de la figura escalonada inscrita, $\overline{S_n}$ es el área de la figura escalonada circunscrita y M(b-a) es el área del rectángulo circunscrito.
También en este caso, es evidente que el área limitada por la función y=f(x), el eje OX y las rectas verticales x=a y x=b, está comprendida entre la suma inferior y la suma superior.

Asimismo, tambien es claro que si tomamos una partición más fina que la anterior, pongamos que con m partes se verificará que $\underline{S_n} \le \underline{S_m} \le \overline{S_m} \le \overline{S_n}$ es decir las sumas inferiores crecerán y las inferiores decrecerán acercándose cada vez más unas a otras
Si tomamos sucesivas particiones, cada una más fina que la anterior, de forma que el número de partes n tienda a infinito, la longitud de los subintervalos Δx_i tenderá a cero y por lo tanto el máximo y el mínimo en cada subintervalo tenderán a coincidir, es decir $\lim_{n\to\infty}(M_i - m_i) = 0$;

en consecuencia $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b E_n(x)dx - \int_a^b e_n(x)dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\right) =$
$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i\right) = 0.0 = 0$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\int_a^b E_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b e_n(x)dx$ a este número le llamaremos integral entre a y b de la función f

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

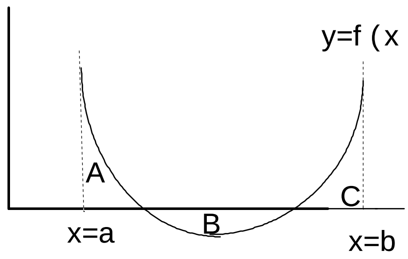
(Podemos garantizar que ambos límites existen por ser la sucesión de sumas inferiores una sucesión mónotona creciente acotada superiormente por M(b-a) y la de sumas superiores una sucesión monótona decreciente acotada inferiormrnte por m(b-a). Por lo tanto queda garantizada la existencia de la integral definida en un intervalo [a,b] para una función continua)

NOTA:
Como ya habíamos visto, en el caso de que la función sea enteramente positiva en el intervalo [a,b], el área limitada entre la función, el eje OX y las rectas x=a y x=b se encuentra, para cualquier partición, entre las sumas inferior y superior (áreas de las figuras escalonadas inscritas y circunscritas) y dado que estas sumas tienen el mismo límite, dicho número (es decir la integral) ha de coincidir con el área encerrada por la función.

En el caso de que la función tome valores enteramente negativos en [a,b] la integral coincide con el área en valor absoluto pero no en signo

Por último, si la función toma en [a,b] valores positivos y negativos la integral será la resta de las áreas de los recintos de la función cuya gráfica está situada por encima del eje OX menos las de los recintos situados por debajo de dicho eje, con lo que la integral no coincide con el área.

EJEMPLO:
El área limitada por f(x), el eje OX y las rectas x=a y x=b vendrá dada por la suma de las áreas de los recintos A,B y C; mientras que $\int_a^b f(x)dx$ será la suma de las áreas de A y C menos el área de B



NOTA: Como hemos visto toda función continua en un intervalo cerrado es integrable en dicho intervalo, sin embargo entre las discontinuas hay funciones integrables y no integrables.

NOTA:
Al introducir el concepto de integral definida hemos supuesto que el límite inferior de integración era menor que el límite superior, a<b, para los casos en que no ocurra esto definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \text{ ; por ejemplo } \int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$$

Para el caso de que los dos límites coincidan se define $\int_a^a f(x)dx = 0$ Desde el punto de vista geométrico esto es lógico ya que se trataría de hallar el área de un trapecio curvilineo de base cero

Resumen:
Dada una función continua en un intervalo [a,b] y una partición de dicho intervalo, podemos construir dos funciones escalonadas una inscrita y otra circunscrita $e_n(x)$ y $E_n(x)$, tomando como imágenes para cada subintervalo su mínimo y máximo respectivamente, y se verifica que $\int_a^b e_n(x)dx \le \int_a^b E_n(x)dx$.
Además estas dos integrales están tanto más próximas entre sí cuanto más fina sea la partición, de tal forma que el límite de ambas, cuando el número de términos de la partición tiende a infinito, es el mismo. Definimos $\int_a^b f(x)dx$ como ese límite único

En el caso de que la función sea enteramente positiva ese límite coincide con el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=a y x=b

Propiedades de la integral definida:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. Si f y g son tales que $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \forall c \in [a,b]$

No las vamos a demostrar aunque pensando en su significado geométrico son todas ellas evidentes.

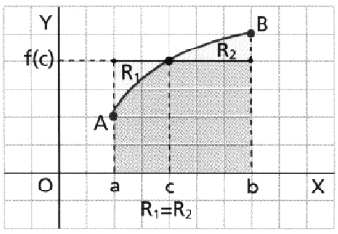
TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Dada una función continua en un intervalo cerrado [a,b], existe un punto c∈[a,b] tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Interpretación geométrica:

Sea f una función enteramente positiva en [a,b], en este caso $\int_a^b f(x)dx$ es el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=a y x=b; por otra parte f(c)(b-a) corresponderá al área de un rectángulo de base el intervalo [a,b] y altura f(c). El teorema garantiza la existencia de un punto del intervalo [a,b] para el que las áreas de estos dos recintos coinciden.



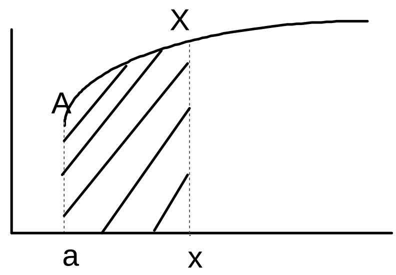
CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

El cálculo de la integral definida como límite de sucesivos sumatorios presenta grandes dificultades incluso en el caso de que f sea una función muy simple. Vamos a estudiar a continuación un método más cómodo para dicho cálculo.

En primer lugar veamos como la integral puede considerarse como una función del límite superior de integración; en efecto, dada una función f continua, definida en el intervalo [a,b], sabemos que $\forall x \in [a,b] \quad \exists \int_a^x f(t)dt$, es decir a cada valor x del intervalo [a,b] podemos asociarle el número real $\int_a^x f(t)dt$, podemos entonces definir una nueva función

S:[a,b]$-------\rightarrow$R

X$-------\rightarrow S(x)=\int_a^x f(t)dt$



Geométricamente, si f es positiva en [a,b] el valor S(x) representa, para cada valor de x, el área del recinto aAXx, que evidentemente varía en función de x

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y sea S(x)= $\int_a^x f(t)dt$ entonces se verifica que la función S(x) es derivable en [a,b] y que S'(x)=f(x) $\forall x \in$[a,b]; es decir la función S(x) es una primitiva de f(x)

Ejemplo

Dada la función f(x)=$\int_1^x \frac{sent}{t}dt$ para x>1, calcular f '(π) y f ''(π)

Por el teorema anterior f ' (x)= $\frac{senx}{x}$ luego f ' (π) = $\frac{sen\pi}{\pi}=0$;

f '' (x)=$\frac{x\cos x - senx}{x^2}$ y por tanto f '' $(\pi)=\frac{\pi\cos\pi - sen\pi}{\pi^2}=\frac{-\pi}{\pi^2}=\frac{-1}{\pi}$

REGLA DE BARROW

Si f(x) es una función continua en [a,b] y F es una primitiva cualquiera de f(x), se verifica que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Cálculo y aplicaciones de la integral definida

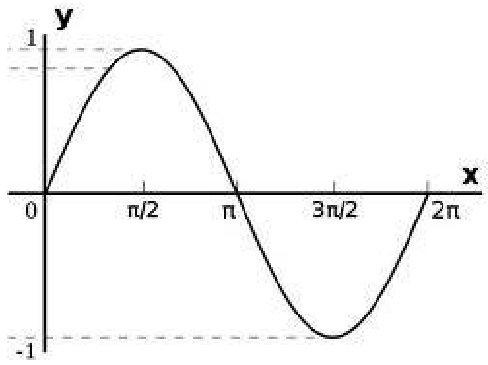
1. Ejemplos de cálculo de integral definida

Ejemplo 1. Calcula $\int_1^2 (x^3 - x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x\right]_1^2 = (\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 2) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1) = \frac{29}{12}$

Ejemplo 2. Calcula $\int_0^{2\pi} senxdx$ Calcula también el área limitada por la función y=senx y las rectas x=0 y x=2π basándote en la gráfica de la función y en la interpretación geométrica de la integral definida.

$\int_0^{2\pi} senxdx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

La gráfica de la función y=senx en el intervalo $[0,2\pi]$ es la siguiente:



Como puede verse la función es positiva en el intervalo $[0,\pi]$ y negativa en $[\pi, 2\pi]$, siendo además iguales las áreas limitadas por la función y el eje OX en ambos intervalos.
Cuando hacemos las funciones escalonadas cuyo límite da lugar a la integral definida, a los rectángulos positivos (correspondientes al primer intervalo) se le restan los negativos (correspondientes al segundo intervalo) y al ser ambos iguales es evidente que la integral debe dar cero.

Si queremos hallar el área debemos integrar entre 0 y π y multiplicar dicha área por 2.

$\int_0^{\pi} senxdx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1)$=2. Por tanto el área en el intervalo $[0,2\pi]$ valdrá 4 unidades de área.

Ejemplo 3 Calcular $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 x(1+x^2)^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x(1+x^2)^{-1/2}dx = \left[\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 =$

$= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

Ejemplo 4 Calcular $\int_{-2}^{2} |x+1|dx$

La función y=|x|=$\begin{cases} -x-1 \text{ si } x \le -1 \\ x+1 \text{ si } x>-1 \end{cases}$ Por las propiedades de la integral definida se verifica que

$\int_{-2}^{2} |x+1|dx = \int_{--2}^{-1} |x+1|dx + \int_{-1}^{2} |x+1|dx = \int_{-2}^{-1}(-x-1)dx + \int_{-1}^{2}(x+1)dx =$

$\left[-\frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

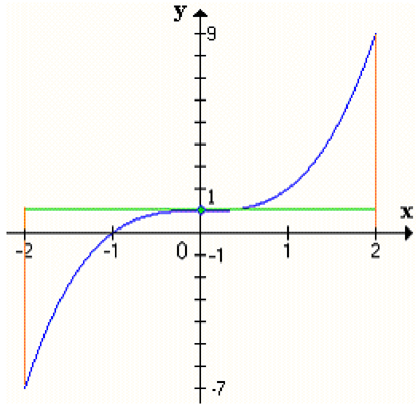
2. Aplicaciones del teorema del valor medio

Ejemplo 1. Encontrar el valor c que satisfaga el teorema del valor medio para la siguiente integral $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx$

Se trata de encontrar c∈[-2,2] t.q $\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=$ f(c)(2-(-2))=4f(c)

$\int_{-2}^{2}(x^3+1)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-2}^{2}=(4+2)-(4-2)=4$; por otra parte 4f(c) =4(c^3+1). Igualando tenemos:

4=4(c^3+1)⇒c^3+1=1⇒c=0

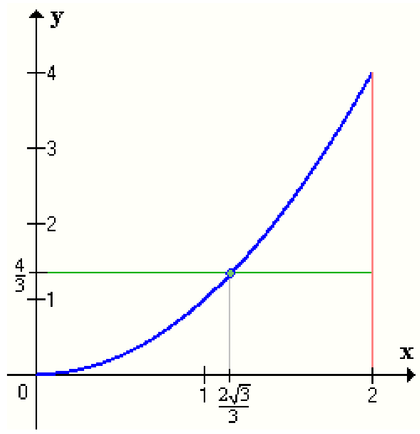


Ejemplo 2 . Dada la función y=x^2, encontrar la altura que ha de tener el rectángulo cuya base es el intrvalo [0,2] para que su área sea la misma que la limitada por la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=2

Dado que la función y=x^2 es positiva en el intervalo [0,2], de la interpretación geométrica del teorema del valor medio se sigue que lo que nos piden es hallar la imagen del punto c de dicho intervalo que verifica el teorema. Esto es el punto c que verifica:

$\int_{0}^{2}x^2dx=f(c)(2-0)$; Hemos de calcular f(c)

$\int_{0}^{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$ =2.f(c)⇒f(c)=8/6=4/3



Si nos hubiesen pedido que calculásemos c deberíamos tener en cuenta que f(c)=c^2

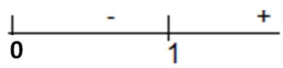
y por tanto, $\frac{4}{3}=c^2 \Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Como el punto debe pertenecer al intervalo [0,2] no podemos tomar la raíz negativa, en consecuencia c=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. *Aplicaciones del teorema fundamental*

Ejemplo 1 Sea F la función definida para $x \geq 0$ por F(x)=$\int_0^x \frac{t^2-1}{t+1} dt$ a)¿Es F derivable? Justifica la respuesta b)Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F

A) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que F'(x)=$\frac{x^2-1}{x+1}$. El dominio de esta función será R-{-1} y dado que la función y=F(x) está definida únicamente para $x \geq 0$ su derivada existe en todo el dominio de dicha función. Es decir F es derivable en su dominio.

B) F'(x)=$\frac{x^2-1}{x+1}$ miramos en donde esa derivada es mayor y menor que cero, teniendo en cuenta que el dominio de F es $[0,\infty)$. $x^2-1=0 \Rightarrow x=1$ (no cogemos la solución x=-1 por no pertenecer al dominio).



Damos ahora valores a la derivada obteniendo:

Por tanto, (0,1) F es decreciente y $(1,\infty)$ F es creciente

Ejemplo 2 En el intervalo [0,4] se define F(x)=$\int_0^x \sqrt{16-t^2}\, dt$ ¿cuanto vale F'(2)?

Por el teorema fundamental F'(x)=$\sqrt{16-x^2}$, por tanto F'(2)=$\sqrt{12}$

Ejemplo 3 Considera la función y=$\int_0^x (t^2-1)e^{-t^2} dt$ definida $\forall x \in R$. Calcular F'(x) y hallar sus extremos relativos.

Por el teorema fundamental F'(x)=$(x^2-1)e^{-x^2}$. Para calcular sus extremos resolvemos F'(x)=0 y evaluamos en los puntos obtenidos el signo de F''.

F'(x)=$(x^2-1)e^{-x^2} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$. F''(x)=$2xe^{-x^2}+(x^2-1)e^{-x^2}(-2x)$

F''(1)=$2e^{-1}>0$, por tanto x=1 es un mínimo de y=F(x)

F''(-1)=$-2e^{-1}<0$, por tanto x=-1 es un máximo de y=F(x)

Ejemplo 4 Dada la función F(x)= $\int_0^{\sqrt{x}} t^3 dt$ hallar F'(x)

Esta función es la composición de dos funciones $x \xrightarrow{g} \sqrt{x} \xrightarrow{h} \int_0^{\sqrt{x}} t^3 dt$

Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena F'(x)=h'(g(x)).g'(x)=$(\sqrt{x})^3 . \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{2}$

(Para hacer la derivada de h utilizamos el teorema fundamental pero aplicamos a g(x)=$\sqrt{x}$)

Ejemplo 5 Dada la función F(x)=$\int_1^{x^2} \sqrt{t}\, dt$ hallar F'(x)

Por la misma razón que en el ejemplo anterior F'(x)=$\sqrt{x^2} .2x = 2x^2$

Ejemplo 6. Calcula F'(x) en los siguientes casos: a) F(x)=$\int_1^{e^x} L(t)dt$; b)F(x) = $\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt$;

c) F(x)=$\int_2^{tgx} \frac{1}{1+t^2}dt$; d) F(x)=$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} L(1+t^2)dt$

a) F'(x)=L(e^x).e^x=x.e^x; b)F'(x)=$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.2x$; c)F'(x)=$\frac{1}{1+tg^2x}(1+tg^2x)=1$

d Para poder aplicar el teorema Fundamental el límite inferior de integración tiene que ser una constante. Ahora bien, de las propiedades de la integral definida se sigue que:

$\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} L(1+t^2)dt = \int_{-\sqrt{x}}^{0} L(1+t^2)dt + \int_0^{\sqrt{x}} L(1+t^2)dt = -\int_0^{-\sqrt{x}} L(1+t^2)dt + \int_0^{\sqrt{x}} L(1+t^2)dt$ y dado que la derivada de la suma es la suma de las derivadas obtenemos que

F'(x)=$-L(1+(-\sqrt{x})^2).\frac{-1}{2\sqrt{x}} + L(1+(\sqrt{x})^2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{L(1+x)}{\sqrt{x}}$

Ejemplo 7. Dada la función F(x)=$\int_0^x sen^2 t dt$ estudia su crecimiento y decrecimiento en el intervalo $[0,2\pi]$ utilzando el th fundamental.

F'(x)=$sen^2x \geq 0$ para todo x de ese intervalo por ser una función elevada al cuadrado, en consecuencia f es creciente en todo su dominio, en particular en el intervalo $[0,2\pi]$

Ejemplo 8. Sin resolver la integral estudia los extremos relativos de la función

F(x)=$\int_1^x (Lt-2)dt$.

F'(x)=Lx-2. Para calcular los extremos igualamos a cero la derivada,

Lx-2=0$\Rightarrow Lx=2 \Rightarrow x=e^2$. Evaluamos ahora el signo de la derivada segunda en ese punto

F''(x)=$\frac{1}{x}$; F''(e^2)>0 Por lo tanto F posee un mínimo relativo en x=e^2

Ejercicios 1-10, 32,33,35-38

4. *Cálculo de áreas de recintos planos*

Área limitada por una función y el eje OX

Como hemos visto en la definición de la integral definida, si la función es positiva en un intervalo [a,b] se verifica que el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=a y x=b es : A=$\int_a^b$f(x)dx. Si la función fuese enteramente negativa en dicho intervalo A=$\left|\int_a^b f(x)dx\right|$. Por último, si la función tuviese partes positivas y negativas en dicho intervalo tendríamos que hallar los puntos de corte con el eje OX, hallar las áreas de cada uno de los recintos en los que la función es positiva y negativa por separado y sumarlos.

Ejemplo 1. a)Calcular el área limitada por la función y=x^3-3x^2-x+3, el eje OX y las rectas x=2 y x=4 b) Calcular el área limitada por la función del apartado anterior y el eje OX

a) Calculamos los puntos de corte de la función y el eje OX:

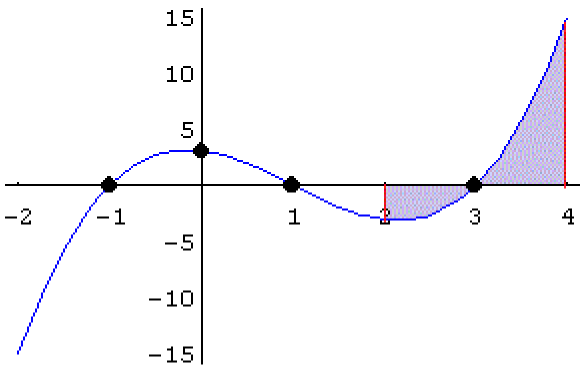
$x^3-3x^2-x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$ Por lo tanto en el intervalo [2,4] en el que nos piden el área la función corta al eje OX en x=3, pudiendo por lo tanto cambiar de signo en ese punto. En consecuencia, hallamos la integral en [2,3] y en [3,4], hacemos su valor absoluto y sumamos

$$\int_2^3 (x^3-3x^2-x+3)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^3 = \left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)-(4-8-2+6) = -\frac{9}{4}$$

$$\int_3^4 (x^3-3x^2-x+3)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_3^4 = (64-64-8+12)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right) = \frac{25}{4}$$

El área pedida es la suma en valor absoluto de las dos integrales A=$\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{34}{4}u^2$

Veamos ahora de forma gráfica lo que hemos hecho.

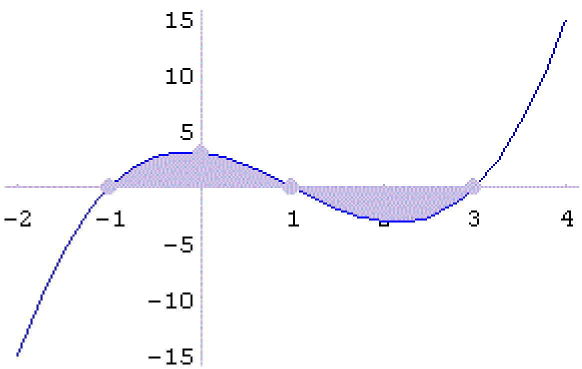


La gráfica de la función es la reprsentada en la figura adjunta y el área pedida es la de los dos recintos marcados. Como vemos la función es negativa en el intervalo [2,3], poe ello la integral en ese intervalo nos ha dado negativa. El área de ese recinto es 9/4

En el intervalo [3,4] la función es positiva y la integral coincide con el área=25/4

El área pedida es la suma del área de los dos recintos.

B) Nos piden ahora el área limitada por la función y el eje OX. Como vemos en el dibujo la función y el eje OX determinan dos recintos de área finita.



Los puntos de corte de la función y el eje OX, hechos en el apartado anterior son: x=-1, x=1 y x=3. El área es la suma, en valor absoluto, de la integral en el intervalo [-1,1] y en el intervalo [1,3]

$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}=(\tfrac{1}{4}-1-\tfrac{1}{2}+3)-(\tfrac{1}{4}+1-\tfrac{1}{2}-3)=\tfrac{16}{4}=4$$

$$\int_{1}^{3}(x^3-3x^2-x+3)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{2}^{3}=(\tfrac{81}{4}-27-\tfrac{9}{2}+9)-(\tfrac{1}{4}-1-\tfrac{1}{2}+3)=-\tfrac{16}{4}=-4$$

Área=4+4=8u^2

Ejemplo 2. Calcular el área limitada por la Función y=Lx, el eje OX y la recta x=3

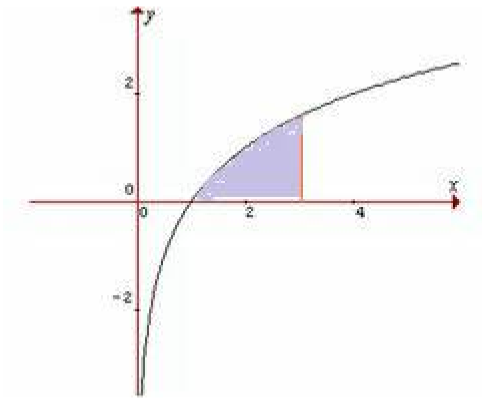
Buscamos el punto de corte de la función y el eje OX: Lx=0$\Rightarrow x=1$. En ese intervalo la función logaritmo es positiva y por lo tanto el área coincide con la integral

A=$\int_1^3$Lxdx=$[xLx-x]_1^3=3.L3-3-(L1-1)=3L3-2$u^2

$\int Lxdx=xLx-\int x.\frac{1}{x}dx=xLx-\int dx=xLx-x+C$

u=Lx; du=$\frac{1}{x}dx$

dv=dx; v=x

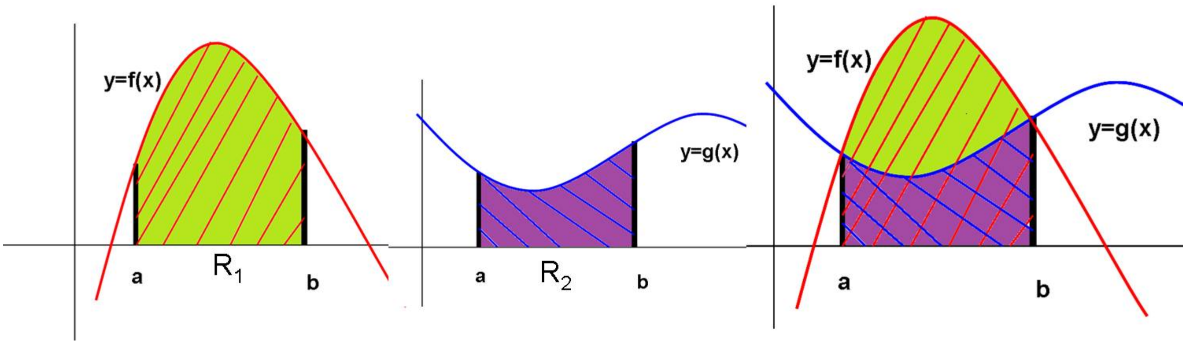


Ejercicios: 11-14, 23, 24, 30, 34

Áreas limitadas por dos funciones

Podemos extender, de forma sencilla, el estudio del cálculo de áreas a regiones comprendidas entre dos funciones.

Supongamos que queremos hallar el área limitada por las funciones de la figura, y=f(x) e y=g(x), que se cortan en x=a y x=b. Del dibujo se deduce claramente que el área buscada es la resta de las áreas de los recintos R$_1$ y R$_2$. Es decir: A=$\int_a^b f(x)-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$.

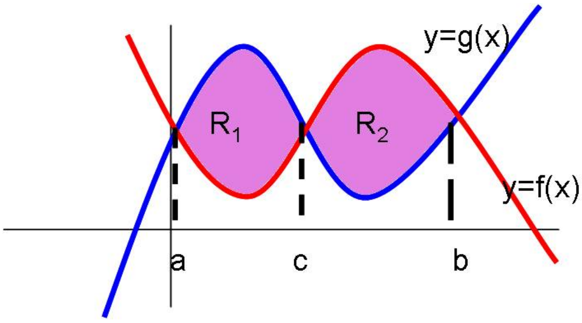


Puede demostrarse, aunque no lo haremos, que ocurriría lo mismo si f y g no fueran enteramente positivas siempre que f(x) sea mayor que g(x) en todo el intervalo.

Nota: no es necesario conocer cual de las dos funciones es la mayor pues si hubiesemos restado al revés la integral coincidiría con el área en valor absoluto aunque no en el signo. Lo único que debemos garantizar es que una de ellas es mayor que la otra en todo el intervalo, es decir que no se cortan.

En resumen, ***si f y g son funciones continuas en*** $[a, b]$ ***y se verifica que no se cortan en dicho intervalo entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g , y las rectas verticales*** $x = a$ ***y*** $x = b$ ***, es : A=***$\left|\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right|$**.**

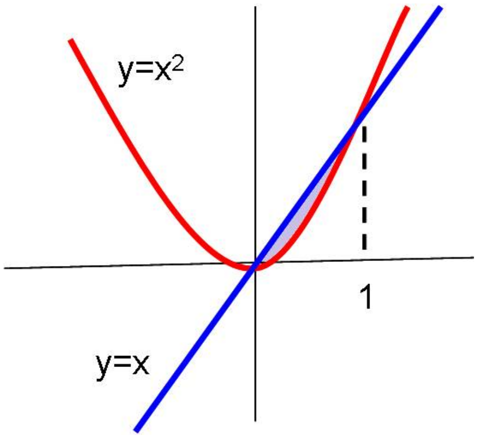
Supongamos ahora que queremos hallar el área limitada entre las funciones de la figura que se cortan en x=a, x=b y x=c



En este caso, dado que la función f es mayor que g en el intervalo [a,c] y g es mayor que f en [c,b], para hallar el área tendríamos que calcular la de los dos recintos y sumarlas. Es decir A=$|\int_a^c (f(x) - g(x))dx|' + \left|\int_c^b (f(x) - g(x))dx\right|$

Nota: El estudio del gráfico del nos ayuda a entender el problema, por lo que siempre que sean funciones conocidas o si tenemos dudas debemos dibujarlas antes de resolver.

Ejemplo 3. Calcular el área limitada por las funciones y=x^2 e y=x



En primer lugar calculamos los puntos de corte de las funciones x^2=x$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ Por lo tanto A=1/6u^2

Como puede verse en la figura en ese intervalo es mayor la función y=x que y=x^2, por ello la integral nos ha dado negativa

Ejemplo 4. Calcular el área limitada por las funciones y=x^2, y=8-x^2

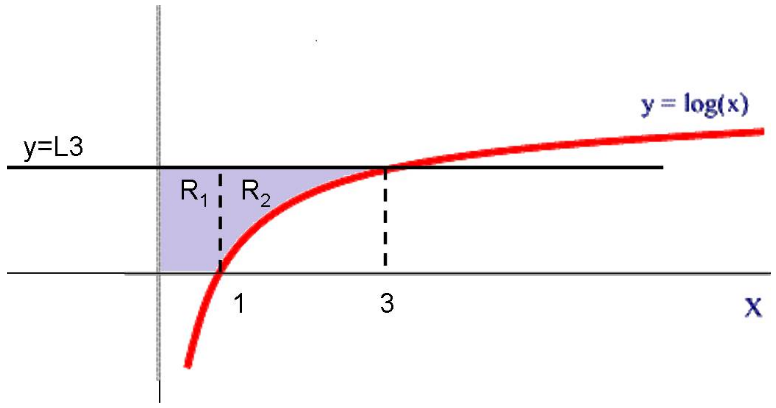
Calculamos los puntos de corte x^2=8-$x^2$$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$

$\int_{-2}^2 (2x^2 - 8)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^2 = -\frac{64}{3} \Rightarrow$ A=$\frac{64}{3}u^2$

Ejemplo 5. Calcular el área limitada por la función y=Lx, el eje OX, el eje OY y la recta y=L3

En este caso tenemos 3 funciones: y=Lx, eje OX es decir y=0 e y=L3 y una recta vertical x=0.

Para entender el problema dibujamos el recinto.



Como se ve en el dibujo el área buscada está limitada por 3 funciones. Vamos a dividir en dos recintos, de tal forma que cada uno esté limitado únicamente por dos de ellas.

Hacemos la intersección de esas tres funciones tomadas de dos en dos

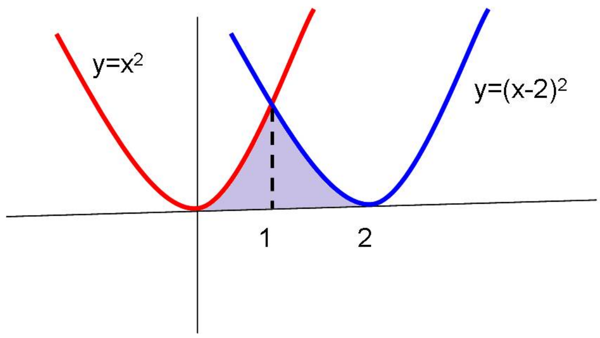
$\begin{cases} y = Lx \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1;\ \begin{cases} y = Lx \\ y = L3 \end{cases} \Rightarrow Lx = L3 \Rightarrow x = 3;\ \begin{cases} y = L3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow L3 = 0$ no se cortan

En consecuencia, el primer recinto está limitado por la función y=L3, el eje OX y las rectas x=0 y x=1, su área será $A_1=\int_0^1 L3dx = [L3.x]_0^1 = L3$

El segundo recinto está limitado por las funciones y=L3, y=Lx y las rectas x=1 y x=3 y su área será $A_2=\int_1^3 (L3 - Lx)dx = [L3x - (xLx - x)]_1^3 = 3L3 - 3L3 + 3 - (L3 + 1) = 2 - L3$

El área buscada es la suma del área de los dos recintos $A=A_1+A_2=2-L3+L3=2u^2$

Ejemplo 6. Calcular el área limitada por las funciones $y=x^2$, $y=(x-2)^2$ y el eje OX



De nuevo tenemos un recinto limitado por tres funciones, hacemos la gráfica e Intersecamos las funciones dos a dos

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0;\ \begin{cases} y = (x-2)^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2;\ \begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x = 1$

Por tanto podemos dividir en dos recintos: El primero limitado por $y=x^2$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=1$, y el segundo limitado por $y=(x-2)^2$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$.

$A_1=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$ **;** $A_2=\int_1^2(x-2)^2dx=\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}$ Por lo tanto el área buscada será:

$A=A_1+A_2=2/3u^2$

Ejemplo 7. Calcular el área limitada por la función $y=x^3-2x^2+x$ y su recta tangente en el origen de coordenadas

En primer lugar tenemos que hallar la recta tangente a la función $y=x^3-2x^2+x$ en $x=0$:

$y'=3x^2-4x+1$; $m=f'(0)=1$; $x=0$, $y=f(0)=0$ Luego la tangente será $y=x$

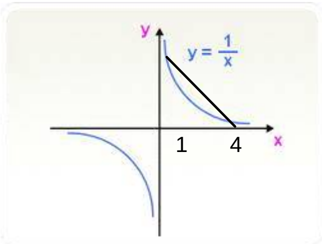
Intersecamos ahora la tangente con la función para encontrar los límites de integración

$$\left\{\begin{array}{c} y=x^3-2x^2+x=0 \\ y=x \end{array}\right. \Rightarrow x^3-2x^2+x=x \Rightarrow x^3-2x^2=0 \Rightarrow x^2(x-2)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Queremos entonces calcular el área limitada por las funciones $y=x^3-2x^2+x$ e $y=x$ entre $x=0$ y $x=2$.

$\int_0^2(f(x)-g(x))dx=\int_0^2(x^3-2x^2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=-\frac{4}{3}$ Por tanto $A=4/3\ u^2$

Ejemplo 8. Calcular el área limitada por la hipérbola $xy=1$ y la cuerda a la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas $x=1$ y $x=4$



La hipérbola $xy=1$ es la función $y=1/x$.

Para hallar la cuerda que une los puntos de abscisas $x=1$ y $x=4$ primero calculamos esos puntos: $f(1)=1$; punto $(1,1)$. $f(4)=1/4$; punto $(4,1/4)$.

La ecuación de la recta que une los puntos $(1,1)$ y $(4,1/4)$ será $y=mx+n$, al sustituir por esos puntos se obtiene el sistema $\left\{\begin{array}{c} 1=m+n \\ 1/4=4m+n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m=-1/4 \\ n=5/4 \end{array}\right.$ Cuerda: $y=-1/4x+5/4$

Los puntos de corte de la hipérbola y la cuerda no tenemos que hallarlos pues ya los conocemos: $x=1$ y $x=4$, esos serán por lo tanto los límites de integración. También sabemos que en ese intervalo la cuerda es mayor que la hipérbola pues conocemos la gráfica.

$A=\int_1^4(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{x})dx=\left[-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}x-Lx\right]_1^4=15/8-L4u^2$

Ejercicios:15-22, 25-29,31

EJERCICIOS INTEGRAL DEFINIDA.

1. Sea f(x)=$\begin{cases} 2x+a \text{ si } x<0 \\ ax+b \text{ si } 0\le x\le 1 \\ x^2+2 \text{ si } x>1 \end{cases}$ Calcular a y b para que f sea continua y hallar, para dichos valores de a y b, $\int_0^2 f(x)dx$

2. a)Calcular $\int_0^3 f(x)dx$ siendo f(x)=$\begin{cases} x+1 \text{ si } x<2 \\ x^2+x+1 \text{ si } x\ge 2 \end{cases}$ b) $\int_{-1}^{1} |x|dx$; c) $\int_{-1}^{2} |x^2-x|dx$

3. Calcular F'(x) en los siguientes casos: a) F(x)=$\int_0^x L(t^2+4)dt$; b)F(x) $\int_0^{x^2} sent dt$; c)F(x) $\int_2^{-x} e^{-t^2}dt$ d)F(x)= $\int_2^{senx} Lt dt$ E) F(x)= $\int_{\sqrt{x}}^{5} sent dt$; f) F(x)= $\int_0^4 \frac{t}{sent}dt$; g) F(x)=$\int_x^4 \frac{1}{1+sen^2 t}dt$; h) F(x)= $\int_0^{senx}(1+t)dt$

4. Halla g(0) y g'(0) sabiendo que $\int_0^x g(t)dt = x^3+senx+e^x-1$

5. Sabemos que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$ calcula f(2)

6. Sin resolver la integral calcula los extremos relativos de las siguientes funciones: a) F(x)=$\int_0^x (t^2-1)dt$; b) F(x)=$\int_1^x \cos t\, dt$ (En el intervalo $[0,2\pi)$)

7. Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en todo su dominio ¿por qué?

8. Sabemos que y=f(x) es continua y no corta al eje OX. Si y=F(x) es una de sus primitivas, podrías decir algo acerca de los extremos relativos de F(x).

9. a)Enuncia el teorema del valor medio del calculo integral, explicando su interpretación geométrica. b)Dada la función f(x)=x^2 , encuentra un punto del intervalo [0,2] tal que el área del rectángulo de base 2 y altura f(c) sea igual al área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=2.

10. Sea F una función definida en $[0,\infty)$ tal que F(x)=$\int_0^x L(2+t)dt$ explica razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: a) F(0)=L2; b) F'(x)=$\frac{1}{2+x}$; c) F es creciente en todo su dominio.

11. Calcula el área limitada por la función y=$(x-1)^2(x+1)$, el eje OX y las rectas x=-3 y x=2
12. Calcula el área limitada por la función y=x(x-1)(x-2) y el eje OX
13. Calcula el área limitada por la función y=x^3+x^2-x-1 y el eje OX
14. Calcula el área limitada por la función y=Lx, el eje OX y la recta x=e
15. Halla el área limitada Por las parábolas y=x^2-5 e y=$-x^2+5$
16. Hallar el área limitada por la parábola y=x^2 y la recta y=1
17. Calcula el área limitada por la función y=x^3-3x^2+3x y la recta y=x
18. Calcular el área limitada por la función y=$2x-x^2$ y sus rectas tangentes en los puntos de corte con el eje de abscisas
19. Dibuja el recinto limitado por la parábola y^2=x+1 y la recta paralela a y=x pasando por el punto (1,0), calcula su área
20. Halla el área limitada por la hipérbola xy=6 y la recta x+y-7=0
21. Dibuja el recinto limitado por las funciones y=$\sqrt{x/2}$ e y=|1-x|. Calcula su área
22. Halla el área limitado por las funciones y=$\frac{1}{x^2}$, y=x e y=8x

23.Halla el área limitada por la función $y=x^2e^x$, el eje OX y las rectas x=0 y x=5

24.Calcula el área limitada por la función $y=\frac{4}{9+2x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

25. Halla el área limitada por las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$

26. Hallar el área comprendida entre la curva $y=\begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ y la recta y=1

27. Calcular el área de la región de plano comprendida entre la curva y=1/x, su recta tangente en x=1, el eje OX y la recta x=6

28. Halla el área limitada por la función $y=\frac{x^2}{x-1}$, su asíntota oblicua y las rectas x=0 y x=1/2

29. Hallar el árealimitada por las funciones $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta x=1

30. Halla la ecuación de una función polinómica de 2º grado que pasa por los puntos (0,1) y (3,0), sabiendo que el coeficiente de x^2 es positivo y el área limitada por dicha curva, el eje OX y la rectas x=0 y x=3 es 4/3

31.Calcula el área limitada por la curva $y=x^2-2x-3$ y por la cuerda a la misma que tiene sus extremos en los puntos de abscisas x=0 y x=1

32. Sea f una función positiva en el intervalo [1,6]. Si sabemos que el área limitada por y=f(x), el eje OX y las rectas x=1 y x=5 es igual a 6. ¿Cuánto valdrá el área si trasladamos la función 2 unidades positivas en sentido vertical?

33. Sea f una función continua en el intervalo [2,3] y F una primitiva de f tal que F(2)=1 y F(3)=2. Calcula: a) $\int_2^3 f(x)dx$; b) $\int_2^3 (5f(x)-7)dx$; c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx$

34. Sea f la función definida por $f(x)=\frac{2}{x^2-1}$ a) hallar una primitiva de f(x); b) Calcular k para que el área del recinto limitado por esa función y el eje de abscisas en el intervalo [2,k] sea L2

35. Dadas las funciones $f(x)=\frac{x-|x|}{2}$ y $g(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ calcula $\int_{-1}^{1} x^2(g \circ f)(x)dx$ Nota: $g \circ f$ denota la composición de dichas funciones

36. Dada la función $f(x)=ax^3+bs+c$, calcula a,b y c sabiendo que y=2x+1 es la recta tangente a la función en x=0 y que $\int_0^1 f(x)dx = 1$

37. Calcula la ecuación de la recta tangente a $F(x)=\int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t}dt$ en x=0

38. Sea $F(x)=\int_0^x \frac{2}{3+3e^t}dt$ Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$

SOLUCIONES EJERCICIOS INTEGRAL DEFINIDA

1. f(x)=$\begin{cases} 2x+a \text{ si x<0} \\ ax+b \text{ si } 0\le x\le 1 \\ x^2+2 \text{ si x>1} \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b\end{array}\right\} \Rightarrow a=b \\ \left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2+2=3\end{array}\right\} \Rightarrow a+b=3 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema $a=3/2$; b=3/2

f(x)=$\begin{cases} 2x+3/2 \text{ si x<0} \\ 3/2x+3/2 \text{ si } 0\le x\le 1 \\ x^2+2 \text{ si x>1} \end{cases}$ $\int_0^2$f(x)dx=$\int_0^1(3/2x+3/2)dx+\int_1^2(x^2+2)dx$

$\int_0^1(3/2x+3/2)dx=\left.\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]_0^1=(\frac{3}{4}+\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$; $\int_1^2(x^2+2)dx=\left.\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^2=(\frac{8}{3}+4)-(\frac{1}{3}+2)=\frac{13}{3}\Rightarrow$

$\int_0^2$f(x)dx=$\frac{9}{4}+\frac{13}{3}=\frac{79}{12}$

2. a) $\int_0^3$f(x)dx=$\int_0^2(x+1)dx+\int_2^3(x^2+x+1)dx$;

$\int_0^2(x+1)dx=\left.\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2=(2+2)=4$;

$\int_2^3(x^2+x+1)dx=\left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3=(9+\frac{9}{2}+3)-(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2)=\frac{59}{6}$

$\Rightarrow\int_0^2(x+1)dx=4+\frac{59}{6}=\frac{83}{6}$

b)|x|=$\begin{cases} -x \text{ si x<0} \\ x \text{ si x} \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow\int_1^1$f(x)dx=$\int_{-1}^0 -xdx+\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\int_{-1}^0 -xdx=\left.-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$; $\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

c)Vamos a desarrollar la fórmula de la función y=|x^2-x|. Para ello debemos estudiar el signo de x^2-x. x^2-x=0$\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow\{x=0,x=1\}$ Dando valores a^2-x en los intervalos a los que estas raíces dan lugar se obtiene:

Por tanto |x^2-x|=$\begin{cases} x^2-x \text{ si x<0} \\ -x^2+x \text{ si } 0\le x\le 1 \\ x^2-x \text{ si x>1} \end{cases}$

+	0	-	1	+

$\int_{-1}^2$f(x)dx=$\int_{-1}^0(x^2-x)dx+\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$

$\int_{-1}^0(x^2-x)dx=\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0=-(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{5}{6}$; $\int_0^1(-x^2+x)dx=\left.-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$;

$\int_1^2(x^2-x)dx=\left.\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=(\frac{8}{3}-2)-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{5}{6}$

3. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y la regla de la cadena se obtiene:

a) F(x)=$\int_0^x L(t^2+4)dt\Rightarrow$F'(x)=L($x^2+4$)

$b)$F(x)$\int_0^{x^2}$sent dt$\Rightarrow$ F'(x)=sen(x^2).2x

$c)F(x)\int_2^{-x} e^{-t^2}dt\Rightarrow$ F'(x)=$e^{-(-x)^2}(-1)$=-e^{-x^2}

d)F(x)=$\int_2^{sex} Lt\ dt\Rightarrow$ F'(x)=L(senx).cosx

e) F(x)=$\int_{\sqrt{x}}^5$ *sent dt*. Para poder aplicar el teorema fundamental hemos de considerar la integral como una función de su límite superior de integración. En este caso F(x) es función del límite inferior no del superior por lo que el teorema no puede aplicarse directamente. Ahora bien, F(x)= $\int_{\sqrt{x}}^{5} sent\, dt = -\int_{5}^{\sqrt{x}} sent\, dt$ y por tanto F'(x)= -sen($\sqrt{x}$) .$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

F)F(x)=$\int_0^4 \frac{t}{sent}dt$ Esta función es constante en todo su dominio puesto que al ser constantes los límites superior e inferior la función no depende del valor de x. Por tanto F(x)=K ⇒F'(x)=0

g) F(x)=$\int_x^4 \frac{1}{1+sen^2 t}dt$ = - $\int_4^x \frac{1}{1+sen^2 t}dt \Rightarrow$ F'(x)= - $\frac{1}{1+sen^2 x}$

h) F(x)= $\int_0^{senx} (1+t)dt \Rightarrow$ F'(x)=(1+senx).cosx

4. Consideremos la función F(x)=$\int_0^x g(t)dt = x^3 + senx + e^x - 1$ Por el teorema fundamental del cálculo integral sabemos que F'(x)=g(x). Por otra parte, dado que F(x)=$x^3 + senx + e^x - 1$, F'(x)=3x^2+cosx+e^x. Igualando ambas expresiones obtenemos que g(x)=3x^2+cosx+e^x. En consecuencia: g'(x)=6x-senx+e^x; g(0)=coso+e^0=2, g'(0)=-sen0+e^0=1

5.F(x)=$\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) = (x^2+x^3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1.F'(x) = f(x) \\ 2.F'(x) = 2x+3x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 2x+3x^2 \Rightarrow f(2) = 16$

6. (Tener en cuenta que la existencia de extremos relativos de F(x) se garantiza en aquellos puntos en los que: F'(x)=0 y F''(x)≠ 0)

a)F(x)=$\int_0^x (t^2-1)dt$; Por el teorema fundamental F'(x)=$(x^2-1) = 0 \Rightarrow \{x=-1, x=1\}$;

F''(x)=2x $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F''(-1)=-2<0 \Rightarrow x=-1 \text{ máximo} \\ F''(1)=2>0 \Rightarrow x=1 \text{ mínimo} \end{array} \right.$

b)F(x)=$\int_1^x \cos t\, dt$ ⇒F'(x)=cosx=0 ⇒ $\{x=\pi/2, x=3\pi/2\}$; F''(x)=-sen⇒ $\left\{ \begin{array}{l} F''(\pi/2)=-1 \text{ máximo} \\ F''(3\pi/2)=1 \text{ mínimo} \end{array} \right.$

7.f(x) es positiva en todo su domino, por ser F(x) una primitiva de f(x) se verifica que F'(x)=f(x)>0$\forall x \in D$ ⇒F es creciente en su dominio

8.Si f(x) no corta al eje OX y f(x) es continua necesariamente ha de ser enteramente positiva o enteramente negativa. Dado que F es una primitiva de f(x) se verifica que F'(x)=f(x). Por tanto F'(x) será siempre positiva (lo que indica que F es creciente en su dominio) o siempre negativa (F decreciente en su dominio). En consecuencia, F no tiene extremos relativos.

9. a)Enunciado e interpretación geométrica del teorema en los apuntes teóricos.
b)Ya que f(x)=x^2 es positiva en el intervalo (0,2) se verifica que el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=0 y x=2 es igual a $\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$. Por otra parte, el área de un rectángulo de base 2 y altura f(c) será: A=base.altura=2.f(c)=2c^2. Como ambas áreas han de ser iguales se verificará que $\frac{8}{3}$ =2c^2 ⇒=± $\sqrt{\frac{8}{6}}$ y como c∈ $[0,2] \Rightarrow c = \sqrt{\frac{8}{6}}$

10. F(x)=$\int_0^x L(2+t)dt$ a) Falso ya que F(0)=$\int_0^0 L(2+t)dt$=0 por la definición de integral definidada . b) Falso ya que por el TH fundamental F'(x)=L(2+x). C) Verdadero: Para estudiar el crecimiento de F(x) en su dominio observamos el signo de la derivada. En nuestro caso F'(x)=L(2+x) ; L(2+x)=0⇒ $2+x=1 \Rightarrow x=-1$, es decir la derivada no se anula en el dominio

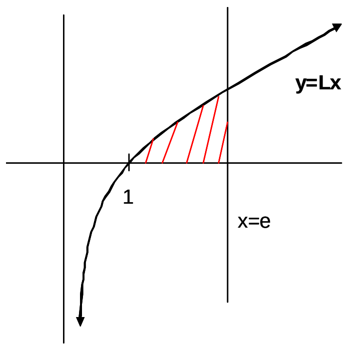
de F que nos dicen que es [0,∞), dando un valor vemos que F'(x)>0 en todo el intervalo por lo que F es creciente en su dominio.

11. Área limitada por la función $y=(x-1)^2(x+1)$, el eje OX y las rectas x=-3 y x=2
Primero hemos de ver los puntos de corte de la función y el eje OX; $(x-1)^2(x+1)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow \{x=-1, x=1\}$. Por tanto el área buscada será:
$A=\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)dx\right| = \frac{68}{3}+\frac{4}{3}+\frac{11}{12}=\frac{299}{12}$ u.a.
$\int f(x)dx = \int (x-1)^2(x+1)dx = \int (x^3-x^2-x+1)dx = \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$
Aplicando la regla de Barrow obtenemos: $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = \frac{-68}{3}$; $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{4}{3}$ y $\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{11}{12}$

12. Área limitada por la función y=x.(x-1)(x-2) y el eje OX. Tenemos que ver los puntos de corte de la función con el eje OX. x.(x-1)(x-2)=0⇒{x=0, x=1, x=2} Por tanto:
$A=\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)dx\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ u.a.
$\int f(x)dx = \int x(x-1)(x-2)dx = \int (x^3-3x^2+2x)dx = \frac{x^4}{4}-x^3+x^2+C$, aplicando Barrow obtenemos:
$\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| = \frac{1}{4}$; $\left|\int_{1}^{2} f(x)dx\right| = -\frac{1}{4}$

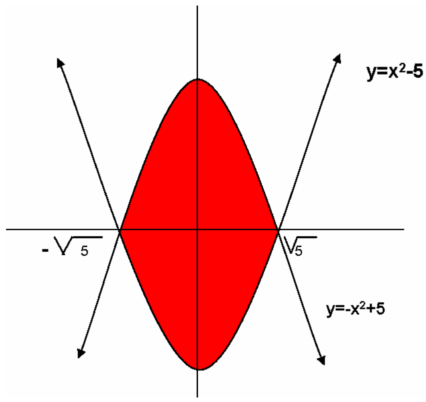
13. Área limitada por la función $y=x^3+x^2-x-1$ y el eje OX.
Puntos de corte de la función con el eje OX: $x^3+x^2-x-1=0\Rightarrow$X3+x2-x-1=0{x=-1,x=1}.
$A=\left|\int_{-1}^{1}(x^3+x^2-x-1)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)\right| = \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$u.a.

14. Área limitada por y=Lx, el eje OX y la recta x=e.
Buscamos los puntos de corte de y=Lx con el eje OX:
Lx=0⇒ $x=1$. El área es la que figura en la zona rayada.

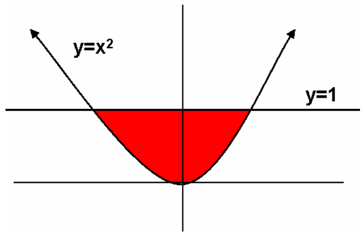


$A=\int_{1}^{e} Lxdx = \left. xLx-x\right]_1^e = 1$ u.a
La integral se hace por partes
$\int Lxda = xLx - \int x.\frac{1}{x}dx = xLx - x$
Lx=u; du=$\frac{1}{x}$dx
dx=dv; v=x

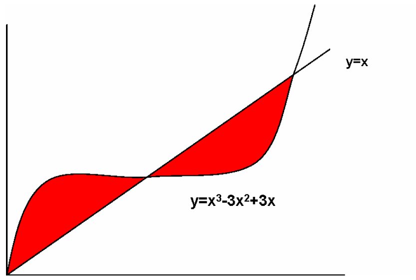
15. En primer lugar tenemos que hallar la intersección de ambas curvas:



$X^2-5=-x^2+5\Rightarrow 2x^2=10\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$. Estos son los límites de integración.
$A=\int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}}(f(x)-g(x))dx = \int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}}[(-x^2+5)-(x^2-5)]dx =$
$=\int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}}(-2x^2+10)dx = \left.-2\frac{x^3}{3}+10x\right]_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}} = \frac{20}{3}\sqrt{5}+\frac{20}{3}\sqrt{5} =$
$=\frac{40}{3}\sqrt{5}$ u.a.
NOTA: Al haber dibujado la figura sabemos que en ese intervalo la función mayor es $y=-x^2+5$. Al restar la mayor menos la menor no tenemos que poner valor absoluto. En caso de no conocer la gráfica, es decir de no conocer cual es la mayor función en el intervalo, el área sería igual al valor absoluto de la resta de las dos funciones en cualquier orden.



16. Hallams la intersección de ambas funciones:
$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ que constituyen los límites de integración.
La mayor función en ese intervalo es y=1, por tanto
A=$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \left. x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = (1-1/3)-(-1+1/3) = 4/3$u.a.



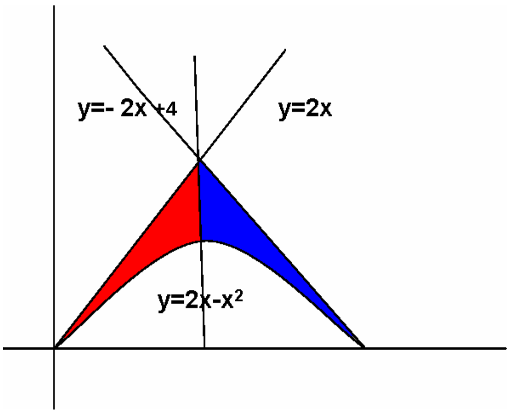
17.Hallamos el punto de corte de las dos funciones:
$x^3-3x^2+3x=x \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0; x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x=0, x=1, x=2\}$
A=$\left|\int_0^1[(x^3-3x^2+3x)-x]dx\right| + \left|\int_1^2[(x^3-3x^2+3x)-x]dx\right|$
$\int(x^3-3x^2+2x)dx = \frac{x^4}{4}-x^3+x^2$. Aplicando Barrow
$\left|\int_0^1[(x^3-3x^2+3x)-x]dx\right|$ =1/4

$\left|\int_1^2[(x^3-3x^2+3x)-x]dx\right|$ =|-1/4|=1/4
Por tanto el área=2/4 u.a.

NOTA: Como se observa en la gráfica la segunda integral da negativa porque en el intervalo (1,2) la mayor función es y=x y hemos restado al revés.

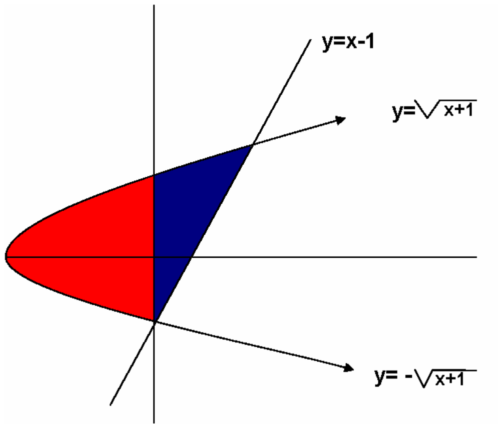
18. Hallamos en primer lugar los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:
$2x-x^2=0 \Rightarrow \{x=0, x=2\}$. Por tanto hemos de hallar las rectas tangentes a esafunción en ambos puntos.
$y=2x-x^2$; $y'=2-2x$
Recta tangente en x=0: y=f(0)=0; m=f ’(0)=2. Tangente: 2x=y
Recta tangente en x=2: y=f(2)=0; m=f ‘(2)=-2. Tangente: -2x=y+4

Dado que queremos calcular un área limitada por tres funciones, conviene dibujar la gráfica. A partir de ella observamos que es preciso buscar el punto de corte de las dos tangentes para dividir el área en dos regiones que estén cada una de ellas limitadas únicamente por dos funciones.
$-2x+4=2x \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$
En el intervalo (0,1) el área estça limitada por las funciones $y=2x-x^2$ e y=2x, siendo ésta la mayor. El área de esta primera zona vendrá dada por:



$A_1=\int_0^1(2x-(2x-x^2))dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
En el intervalo (1,2) el área estça limitada por las funciones $y=2x-x^2$ e y=-2x+4, siendo ésta la mayor. El área de la segunda zona vendrá dada por:
$A_2=\int_0^1 -2x+4-(2x-x^2)dx = \int_1^2(x^2-4x+4)dx = \left.\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_1^2 = \frac{1}{3}$
El área buscada será $A=A_1+A_2=2/3$ u.a.

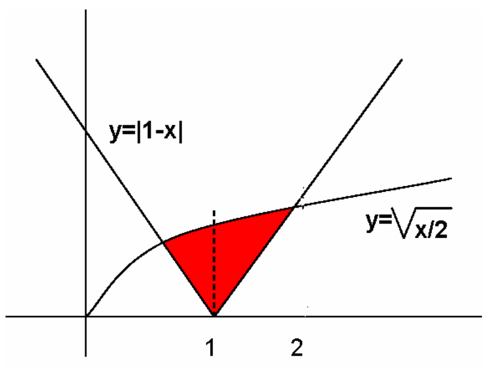
19. Recinto limitado por la parábola $y^2=x+1$ y la recta paralela a y=x que pasa por el punto (1,0).
En primer lugar hallamos la ecuación de dicha recta: Al ser paralela a y=x la recta tendrá por ecuación y=x+D; sustituimos en dicha ecuación las coordenadas del punto (1,0) obteniendo: $0=1+D\Rightarrow D=-1$. Así pues la recta pedida es y=x-1
La parábola $y^2=x+1$ no es fnción pues despejando y se obtiene $y=\pm\sqrt{x+1}$. Se trata pues de dos funciones, ambas con dominio $[-1,\infty)$ y que se cortan en el punto (-1,0). Que constituye el vértice de la parábola. Dibujamos el recinto pedido
El área que queremos calcular está limitada por 3 funciones: $y=\sqrt{x+1}$, $y=-\sqrt{x+1}$ e y=x-1.
Hallamos los puntos de corte de la recta y la parábola: $\pm\sqrt{x+1}=x-1\Rightarrow x+1=(x-1)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow x+1=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow\{x=0,x=3\}$
Por tanto, el área buscada está limitada entre -1 y 0 por las funciones $y=\sqrt{x+1}$ e $y=-\sqrt{x+1}$ y entre 0 y 3 por las funciones $y=\sqrt{x+1}$ e y =x-1



$A_1=\int_{-1}^{0}(\sqrt{x+1}-(-\sqrt{x+1}))dx=\int_{-1}^{0}2\sqrt{x+1}\,dx=$
$=2\left.\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{0}=4/3$
$A_2=$
$\int_0^3(\sqrt{x+1}-(x-1))dx=\left.\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^3=19/6$
El área pedida será por lo tanto $A_1+A_2=4/3+19/6=9/2$ u.a

20. Área limitada por la hipérbola xy=6 y la recta x+y-7=0. Despejando y en ambas funciones se obtiene: $y=\frac{6}{x}$ e y=7-x. Calculamos sus puntos de corte: $\frac{6}{x}=7-x\Rightarrow$
$\Rightarrow 6=7x-x^2\Rightarrow x^2-7x+6=0\Rightarrow\{x=1,x=6\}$. Area$=\left|\int_1^6(\frac{6}{x}-(7-x))dx\right|=\left|\left.6Lx-7x+\frac{x^2}{2}\right]_1^6\right|=$
$=\left|6L6-42+\frac{36}{2}-(-7+\frac{1}{2})\right|=\left|6L6-\frac{35}{2}\right|$ u.a

21. $1-x=0\Rightarrow x=1$ y dando valores 1-x es positivo en $(-\infty,1)$ y negativo en $(1,\infty)$. Por tanto
$|1-x|=\begin{cases}1-x & \text{si } x<1\\ -1+x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$. La función $y=\sqrt{x/2}$ tiene por dominio $[0,\infty)$ y su gáfica es conocida.
Dibujamos el recinto:
Hallamos los puntos de corte:
$\sqrt{x/2}=|1-x|$; elevando al cuadrado se obtiene $x/2=1+x^2-2x\Rightarrow\{x=1/2,\ x=2\}$
El área buscada está limitada entre ½ y 1 por las funciones y=1-x e $y=\sqrt{x/2}$, siendo esta la mayor, y entre 1 y 2 por las funciones y=-1+x e $y=\sqrt{x/2}$ que es también la mayor



$A_1=\int_{1/2}^{1}(\sqrt{x/2}-(1-x))dx=(*)\left.\frac{4}{3}\left(\sqrt{x/2}\right)^3-x+\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}=$
$=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{24}$
$A_2=\int_1^2(\sqrt{x/2}-(-1+x))dx=\left.\frac{4}{3}(\sqrt{x/2})^3+x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}$
Por tanto el área buscada será $A=A_1+A_2=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{24}+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}=13/24$ u.a.
(*) : $\int\sqrt{x/2}\,dx=\int(\frac{x}{2})^{1/2}dx=2\int\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^{1/2}dx=2\frac{(x/2)^{3/2}}{3/2}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3$

22. Área limitada por las funciones $y=1/x^2$, y=x e y=8x. Dado que se trata de 3 funciones dibujamos en primer lugar el recinto. Todas las funciones son conocidas.

Tenemos que hallar los puntos de corte:

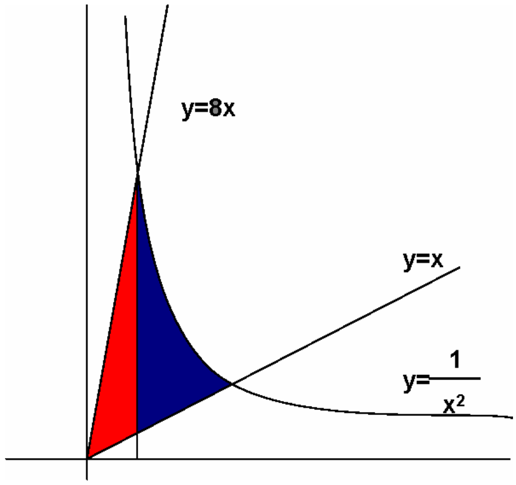
A) Punto de corte de y=8x e y=x; 8x=x; x=0

B) punto de corte de y=8x y $y=1/x^2$; $8x=\frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

C) punto de corte de y=x e $y=1/x^2$; $x=\frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$



Observando la gráfica vemos que podemos dividir el área en dos regiones. La primera, entre 0 y ½, está limitada por las funciones y=x e y=8x siendo esta la mayor. La segunda, entre ½ y 1, está limitada por las funciones y=x e $y=1/x^2$, siendo esta la mayor.

$A_1=\int_0^{1/2}(8x-x)dx = \int_0^{1/2} 7xdx = \left.\frac{7x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{7}{8}$

$A_2=$

$\int_{1/2}^{1}(\frac{1}{x^2}-x)dx = \left.\frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = -1 - 1/2 + 2 + 1/8 = \frac{5}{8}$; $A=A_1+A_2=\frac{7}{8}+\frac{5}{8} = 3/2$u.a

23.Área limitada por la función $y=x^2e^x$, Eje OX y las rectas x=0 y x=5

Las rectas x=0 y x=5 nos dan los límites de integración, debemos comprobar si la función corta al eje OX en algún punto entre esos dos límites: $x^2e^x=0 \Rightarrow x=0$. Como no hay ningún punto de corte entre los límites de integración y sabemos además que la función es positiva

$A=\int_0^5 x^2e^xdx = (*) = (x^2-2x+2)e^x]_0^5 = 17e^5-2$ u.a

(*) la integral se hace por partes dos veces

$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = e^x(x^2-2x+2)$

$u=x^2$; du=2xdx| u=x; du=dx

$e^xdx=dv$; $v=e^x$ |$e^xdx=dv$; $v=e^x$

24. Área limitada por la función $y=\frac{4}{9+2x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva

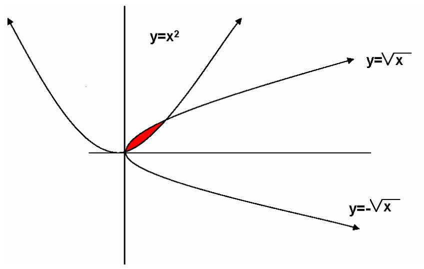
Tenemos que hallar los puntos de inflexión de la curva. En un punto de inflexión y''=0 hallamos por tanto las dos primeras derivadas: $y'=\frac{-16x}{(9+2x^2)^2}$; $y''=\frac{-16(9-6x^2)}{(9+2x^2)^3}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Estos son los puntos de inflexión y por tanto los límites de integración.

Comprobamos que la función no corta al eje OX entre esos dos puntos: $\frac{4}{9+2x^2}=0$ no tiene solución, por lo tanto no hay puntos de corte. Además la función es enteramente positiva, por lo que $A=\int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}}\frac{4}{9+2x^2}dx=(*)=\left.\frac{4}{3\sqrt{2}}arctg(\frac{\sqrt{2}x}{3})\right]_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}(arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})-arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}))$

$$(*)\int\frac{4}{9+2x^2}dx = 4\int\frac{1/9}{1+\frac{2x^2}{9}}dx = \frac{4}{9}\int\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)^2}dx = \frac{4}{9}\frac{3}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}/3}{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)^2}dx = \frac{4}{3\sqrt{2}}arctg\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

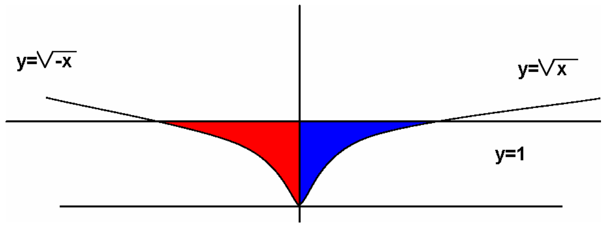
25. Área limitada por las parábolas y=x^2 e y^2=x⇒y=± $\sqrt{x}$
Como ambas gráficas son conocidas dibujamos el recinto
Calculamos los puntos de corte:



$\pm\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0; x(x^3-1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x = 0, x = 1\}$

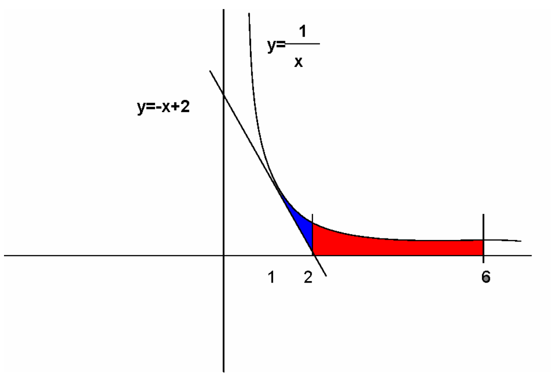
A=$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ u.a

26. El área está limitada por 3 funciones, dibujamos el recinto:



Hallamos los puntos de corte
$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$; $\sqrt{-x} = 1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$
$\sqrt{x} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$
El área puede dividirse en dos recintos. El primero entre -1 y 0 limitado por las funciones y=$\sqrt{-x}$ e y=1, siendo esta la mayor. El segundo entre 0 y 1 limitado por las funciones y=$\sqrt{x}$ e y=1 que también es la mayor. A_1=$\int_{-1}^0 (1 - \sqrt{-x})dx = \left. x - \frac{-(-x)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^0 = 1 - 2/3 = 1/3$
A_2=$\int_0^1 (1 - \sqrt{x})dx = \left. x - \frac{(x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 1 - 2/3 = 1/3$; A=$A_1$+$A_2$=2/3 u.a.

27. Área limitada por la función y=1/x, su recta tangente en x=1, el eje OX y la recta x=6.
Hallamos la recta tg a la función y=1/x en x=1. y'=-1/x^2 , f(1)=1, m=f '(1)=-1
Recta tangente: -1(x-1)=y-1; despejando y=-x+2
Se trata del área entre 3 funciones y una recta vertical. Dibujamos el recinto:



Hallamos los puntos de corte:
A) El Punto de corte de la función y=1/x y su recta tangente es el punto de tangencia x=1
B) Punto de corte de la recta y el eje OX: y=-x+2 y=0⇒ $-x+2=0 \Rightarrow x = 2$
C)Punto de corte de y=1/x y el eje OX no existe.
El área se divide en dos zonas. En la primera comprendida entre 1 y 2 está limitada por las funciones y=1/x e y=-x+2, siendo la mayor y=1/x. La segunda zona entre 2 y 6 está limitada por la función y=1/x y el eje OX, sindo y=1/x positiva en este intervalo.
A_1=$\int_1^2 (1/x - (-x+2))dx = \left. Lx + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = (L2 + 2 - 4) - (L1 + 1/2 - 2) = L2 - 1/2$
A_2=$\int_2^6 1/x dx = \left. Lx\right]_2^6 = L6 - L2$.
A=A_1+A_2=L2-1/2+L6-L2=L6-1/2 u.a.

28. Área limitada por la función y=$\frac{x^2}{x-1}$, su asíntota oblicua y las rectas x=0 y x=1/2

Calculamos la AO: m=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1$; n=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\infty}\frac{x}{x-1}=1$

AO y=x+1.

Los límites de integración son x=0 y x=1/2, tenemos que ver si las dos funciones se cortan en algún punto entre los dos límites de integración.

Puntos de corte de las funciones y=$\frac{x^2}{x-1}$ e y=x+1: $\frac{x^2}{x-1}$=x+1; $x^2=x^2-1$ no tiene solución, por tanto no se cortan.

Como no sabemos si la función está por encima o por debajo de la asíntota tenemos que poner valor absoluto A=$\left|\int_0^{1/2}\left(\frac{x^2}{x-1}-(x+1)\right)dx\right|=(*)=\left|\left.\frac{x^2}{2}+x+L|x-1|-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^{1/2}\right|=$

$\left|\left.L|x-1|\right]_0^{1/2}\right|$ ==|L(1/2)-L1|=|L(1/2)|=-L(1/2) u.a

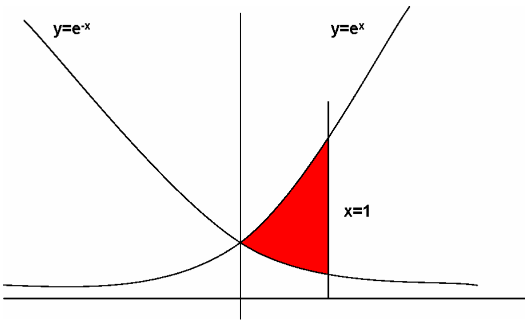
(*)Vamos a calcular $\int\frac{x^2}{x-1}dx$ se trata de una función racional con grado del numerador mayor que el del denominador. Tenemos que comenzar dividiendo los polinomios:

$$\begin{array}{rl} x^2 & \underline{|\;x-1} \\ \underline{-x^2+x} & \;\;x+1 \\ x & \\ \underline{-x+1} & \\ 1 & \end{array}$$

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx=\int\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+L|x-1|+c$$

29.Área limitada por las funciones y=e^x, y=e^{-x} y la recta x=1. Puesto que son funciones conocidas hacemos el dibujo:

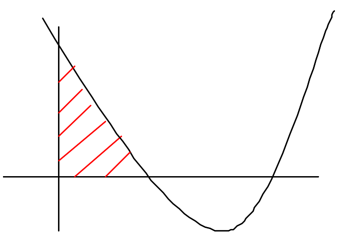


En la grafica se ve que esas funciones solo se cortan en x=0. Los límites de integración son por lo tanto x=0 y x=1 siendo en ese intervalo mayor la función y=e^x

A=$\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=\left.e^x+e^{-x}\right]_0^1=(e+e^{-1})-(1+1)=$

=e+1/e-2 u.a.

30.y=ax^2+bx+c Tenemos que buscar 3 ecuaciones para despejar los 3 coeficientes.



1º Pasa por el punto (0,1)$\Rightarrow 1=a.0+b.0+c\Rightarrow c=1$

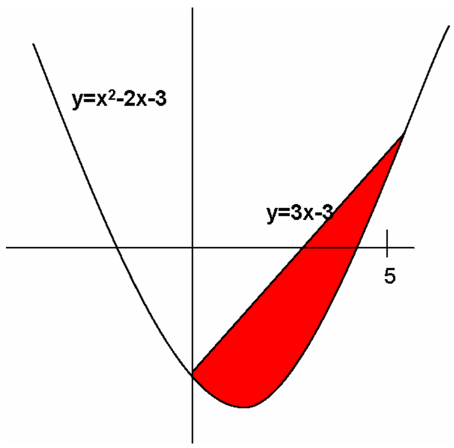
2º Pasa por el punto (3,0)$\Rightarrow 9a+3b+1=0$

3º El área marcada es 4/3$\Rightarrow\int_0^3(ax^2+bx+1)dx=4/3$

$\int_0^3(ax^2+bx+1)dx=\left.a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+x\right]_0^3=9a+\frac{9}{2}b+3=4/3$

Resolvemos el sistema$\begin{cases}9a+3b+1=0\\9a+\frac{9}{2}b+3=\frac{4}{3}\end{cases}$ $a=\frac{3}{81},b=\frac{-4}{9}$

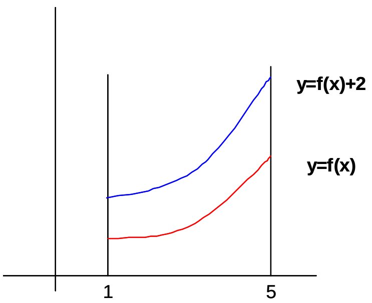
31.



Hallamos en primer lugar la cuerda que pasa por los puntos de abscisa x=0 y x=5
$y=x^2-2x-3$, f(0)=-3, f(5)=12 Los puntos que conocemos de la recta son A(0,-3) y B(5,12)
El vector de direción de la recta es $\overrightarrow{AB}(5,15)$
m=15/5=3; recta 3x=y+3; y=3x-3
Los límites de integración son las abscisas de los puntos de corte de la recta y la parábola, es decir x=0 y x=5. En la gráfica observamos que en ese intervalo es mayor la recta que la parábola. Por tanto el área buscada será:

A=$\int_0^5 (3x-3-(x^2-2x-3))dx = \int_0^5(-x^2+5x)dx = = \frac{-x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\Big]_0^5 = \frac{-125}{3}+\frac{125}{2} = \frac{125}{6}$ u.a

32 Trasladar la función 2 uniades positivas en sentido vertical es equivalente a decir que si la función de partida era y=f(x) la nueva función es y=f(x)+2.



Nos dicen que f es positiva y que el área limitada por y=f(x) el eje OX y las rectas x=1 y x=5 es igual a 6.
Esto significa que $\int_1^5 f(x)dx = 6$.
Nos piden $\int_1^5 (f(x)+2)dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 2dx = 6 + \ 2x]_1^5 =$
=6+10-2=14 u.a

33. a) Teniendo en cuenta que F(x) es una primitiva de f(x) podemos aplicar la regla de Barrow: :$\int_2^3 f(x)dx = F(3)-F(2) = 2-1 = 1$; b) Por las propiedades de la integral definida sabemos que se verifica: $\int_2^3 (5f(x)-7)dx = 5\int_2^3 f(x)dx - \int_2^3 7dx = 5-[7x]_2^3 = 5-(7.3-7.2) = 5-7 = -2$
c)Por ser F(x) una primitiva de f(x), f(x)=F'(x) y por lo tannto se trata de una integral inmediata de una función potencial: $\int (F(x))^2 f(x)dx = \int (F(x))^2 F$ '(x)dx=$\frac{((F(x))^3}{3}$. En consecuencia $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx = \left[\frac{((F(x))^3}{3}\right]_2^3 = \frac{((F(3))^3}{3} - \frac{((F(2))^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

34. a)$\int \frac{2}{x^2-1}dx$ Se trata de integrar una función racional. Estudiamos las raíces del denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$. Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$2=A(x-1)+B(x+1)$\left\{\begin{array}{l} \text{Si x=1} \Rightarrow \text{2=2B} \Rightarrow \text{B=1} \\ \text{Si x=-1} \Rightarrow \text{2=-2A} \Rightarrow \text{A=-1} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -L|x+1| + L|x-1|$+C

b)En el intervalo [2,k] la función es positiva y, por lo tanto, el área coincide con la integral.
$\int_2^k \frac{2}{x^2-1}dx = [-L|x+1|+L|x-1|]_2^k = -L(k+1)+L(k-1)-(-L3-L1) = -L(k+1)+L(k-1)+L3 =$
$= L\left(\frac{3(k-1)}{k+1}\right)$. Dado que nos dicen que esa área ha de valer L2, obtenemos la igualdad:

$L\left(\frac{3(k-1)}{k+1}\right)=L2 \Rightarrow \frac{3(k-1)}{k+1}=2 \Rightarrow 3k-3=2k+2 \Rightarrow k=5$

35. Nos dicen que la función f(x) es positiva en el intervalo [1,5], esto implica que el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x=1 y x=5 coincide con la integral (lo mismo ocurrirá con g(x) ya que al ser f positiva g también lo es).

 Sabemos por ello que: $\int_1^5 f(x)dx=6$ y nos piden $\int_1^5 g(x)dx=\int_1^5 (f(x)+2)dx=\int_1^5 f(x)dx+\int_1^5 2dx=6+[2x]_1^5$ =6+10-2=14 u.a.

36. En primer lugar debemos conocer la expresión analítica de la función $g\circ f$

 f(x)=$\frac{x-|x|}{2}=\begin{cases}\frac{x-(-x)}{2} & \text{si } x\le 0\\ \frac{x-x}{2} & \text{si } x>0\end{cases}=\begin{cases}x & \text{si } x\le 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$ En cosecuencia $(g\circ f)(x)=\begin{cases}3x & \text{si } x\le 0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$

$\int_{-1}^{1} x^2(g\circ f)(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2.3x\,dx+\int_0^1 x^2.0\,dx=\int_{-1}^{0} 3x^3dx=\left[\frac{3x^4}{4}\right]_{-1}^{0}=\frac{3}{4}$

37. Que y=2x+1 sea la recta tangente en x=0 significa: 1º que f(0)=c es igual a la imagen del cero en y=2x+1. Es decir c=1; 2º que f ’(0)=2; f ’(x)=3ax^2+b; f’(0)=b⇒b=2. Por último

$\int_0^1 f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^3+bx+c)dx=\int_0^1 (ax^3+2x+1)dx=\left.\frac{ax^4}{4}+\frac{2x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{a}{4}+1+1=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{4}=-1 \Rightarrow a=-4$. Por tanto f(x)=-4x^3+2x+1

38. Para calcular la recta tangente en x=0 debemos hallar F(0) y F’(0); F(0)=$\int_0^0 \frac{t^2+6}{2+e^t}dt=0$; al ser una integral definida que tiene iguales sus dos lómotes de integración

F’(x)=$\frac{x^2+6}{2+e^x}$ por el teorema fundamental del cálculo integral, entoces F’(0)=$\frac{6}{2+e^0}=\frac{6}{3}=2$.

Por tanto la recta tangente en x=0 será: 2(x-0)=y-0; 2x=y

39. Dado que)=$\int_0^0 \frac{2}{3+e^t}dt=0$ por coincidir sus límites de integración, $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\frac{0}{0}$ Aplicamos l’hôpital; F’(x)=$\frac{2}{3+e^x}$ Por el Th fundamental del cálculo integral. Entonces:

$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3+e^x}}{1}=\frac{2}{3+e^0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$