1 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Vamos a asociar a continuación a cada matriz cuadrada A un número real al que llamaremos determinante de A y denotaremos por | A | :

$$| \ | \ M_n \longrightarrow R$$
$$A \longrightarrow |A|$$

DETERMINANTES DE ORDEN 1 y 2

Comenzaremos definiendo el determinante para las matrices de orden 1 y 2:

Sea $A=(a_{11})$ una matriz de orden 1. Definimos $|A|=a_{11}$ Ejemplo: $|(3)|=3$; $|(-3)|=-3$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definimos $| A | = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Es decir para una matriz de orden 2 el determinante es el número real obtenido al restarle , al producto de los elementos de la diagonal principal , el producto de los elementos de la diagonal secundaria .

EJEMPLO 1: Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $|A|=4.5-(-2).1=22$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES DE ORDEN 2

Propiedades

1.- $| A | = | A^t |$ Demostración como ejercicio mediante el desarrollo de los dos determinantes

2.- $| A.B | = | A |.| B |$ Demostración como ejercicio mediante el desarrollo de los dos determinantes

3.- Si se intercambian dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

4.- El determinante es función lineal de sus filas y de sus columnas; es decir:

a) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

De igual forma para cualquier otra fila o columna

Demostración como ejercicio mediante el desarrollo de los determinantes

5. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales el determinante vale cero

Demostración: En el primer caso es evidente ya que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{12}-a_{12}.a_{11}=0$

Si tienen las filas proporcionales A sería $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = k.0=0$ Utilizando primero la linealidad y despues el resultado anterior

6. Si a una fila o columna de una matriz le sumamos un múltiplo de otra el determinante no varía.
7. Si el determinante de una matriz es distinto de cero los vectores fila de dicha matriz son L.I., lo mismo ocurre para los vectores columna

GENERALIZACIÖN PARA DETERMINANTES DE ODEN SUPERIOR

Los determinantes de orden 3 se definen a partir de los de orden 2 y en general los de orden n a partir de los de orden n-1.

Definición Dada una matriz cuadrada A de orden n llamamos matriz complementaria M_{ij} del elemento a_{ij} a la matriz que se obtiene al eliminar en la matriz A la fila i y la columna j, la matriz complementaria de cada elemento es una matriz cuadrada de orden inferior en una unidad al orden de A

Definición Dada una matriz cuadada A de orden n llamamos menor complementario α_{ij} del elemento a_{ij} al determinante de su matriz complementaria: $\alpha_{ij} = |M_{ij}|$

Definición Dada una matriz cuadrada A de orden n llamamos adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario de dicho elemento precedido del signo + o - según la suma de los suíndices i+j sea par o impar. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$

Definición Dada una matriz cuadrada A de orden n llamamos determinante de A; | A | al número real obtenido al sumar los productos de los elementos de una cualquiera de sus filas o columnas por sus respectivos adjuntos. Es decir $|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ \forall$ i,j$\in \{1,2,3.....n\}$.

En la primera igualdad estamos desarrollando el determinante por la fila i y en la egunda igualdad lo estamos haciendo por la columna j

Nótese que para que el determinante esté bien definido habría que demostrar que el desarrollo por cualquier fila o columna da el mismo resultado. (no vamos a probarlo)

EJEMPLO 2: calcular los siguientes determinantes $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución el primer determinante vamos a desarrollarlo por la 3ª fila ya que en ella hay un cero y se reducen las operaciones. El segundo lo desarrollamos por la última columna en la que hay dos ceros

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =(1)^{3+1}\,(-2).\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.0.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.5.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =(-2)[(-1).2-3.2]+0+5[1.3-(-1).2]=16+25=41$$

(hemos escrito todas las operaciones para indicar el proceso, pero naturalmente los cálculos se pueden hacer mentalmente y no es preciso indicar aquellos factores que contengan un cero.)

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+4}.3.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{4+4}.1.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ desarrollamos por la 2ª fila el $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+2}.2.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2-1=-3$

desarrollamos por la tercera fila $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2+7=9$

Por tanto el determinante de partida será 3.(-3)+9=0

NOTA:

En los ejemplos anteriores hemos visto que el desarrollo de un determinante es tanto más simple cuantos más ceros contenga alguna de sus filas o columnas. **En particular, si la matriz es triangular su determinante es igual al producto de su diagonal principal.**

EJEMPLO 3: calcular|A|= $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ realizamos el desarrollo por la 1ª columna

$|A|= 3.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=3.1.\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=3.1.9.2.$ Es decir el determinante es el producto de la diagonal principal.

EJERCICIOS RESUELTOS 1-3

REGLA DE SARRUS

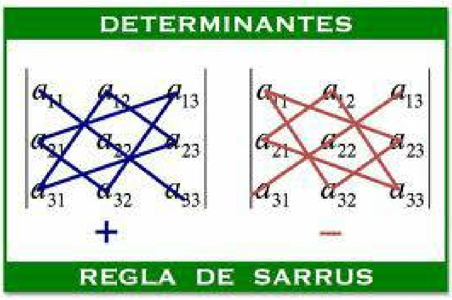
La regla de Sarrus es un método para el cálculo de determinantes de orden 3.

Consideremos una matriz de orden 3 A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Vamos a calcular su determinante mediante su desarrollo por la 1ª fila. $|A|= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$

$=a_{11}.a_{22}.a_{33}-a_{11}.a_{23}.a_{32}-a_{12}.a_{21}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32}-a_{13}.a_{22}.a_{31}$

Obsérvese que el resultado contiene 6 productos de los que 3 están precedidos del signo + y 3 del signo -.

El siguiente esquema nos permite recordar los factoresprecedidos del signo positivo y del signo negativo de una forma fácil:



Los términos que quedan con el signo que da el producto corresponden a los productos de la diagonal principal y a los de sus paralelas multiplicadas por los vértices opuestos (en un triángulo imaginario). Los que hay que cambiar de signo corresponden a la diagonal secundaria y a los de sus paralelas multiplicadas por sus vértices opuestos

EJEMPLO 4: Desarrolla por la regla de Sarrus el determinante de orden 3 del ejemplo 2

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$=1.3.5+(-1).2.(-2)+2.0.2-2.3.(-2)-(-1).2.5-2.0.1=15+4+12+10=41 (obsérvese que da el mismo resultado que en el ejemplo 2 en que lo hemos hecho a partir del desarrollo por la 3ª fila.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- $|A| = |A^t|$

2.- $|A.B| = |A|.|B|$

3.- Si en una matriz se intercambian dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo

4.- El determinante es función lineal de sus filas y de sus columnas; es decir:

a) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & .... & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & .... & b_n \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & .... & k.a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}$

De igual forma para cualquier otra fila o columna

5. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales el determinante vale cero
6. Si una matriz tiene una fila o columna que es combinación lineal de las demás el determinante vale cero
7. Si a una fila o columna de una matriz le sumamos un múltiplo de otra el determinante no varía.
8. El determinante de una matriz es distinto de cero si y solo si los vectores fila de dicha matriz son L.I., lo mismo ocurre para los vectores columna

NOTA

$|A+B| \neq |A|+|B|$

Ejemplo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ |A|=1; |B|=-10; |A+B|=-19≠|A|+|B|=-9

EJEMPLOS DE APLICACIÓN. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. Sin desarrollarlo comprueba que |A|=0 y |B| es múltiplo de 5, siendo

$A=\begin{pmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

| A | =0 por ser la tercera columna igual a menos cinco veces la primera.

| B | = $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5.\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ La primera igualdad se obtiene sumándole a la tercera fila la segunda. La segunda igualdad sacando 5 factor común en la tercera fila aplicando la propiedad 4b.

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=5 Calcula $\begin{vmatrix} -3b+1 & -3a+1 & -3c+1 \\ 2n & 2m & 2p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix}$ utilizando las propiedades de los determinantes.

SOLUCIÓN $\begin{vmatrix} -3b+1 & -3a+1 & -3c+1 \\ 2n & 2m & 2p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -5b & -5a & -5c \\ 2n & 2m & 2p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -10 \begin{vmatrix} b & a & c \\ n & m & p \\ 1+2b & 1+2a & 1+2c \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=}$

$=-10 \begin{vmatrix} b & a & c \\ n & m & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 10 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =10.5=50 (1)A la 1ª fila le restamos la 3ª;

(2) Aplicamos la propiedad 4b a las filas 1y2; (3) Restamos a la 3ª fila 2 veces la 1ª;

(4) Cambiamos la 1ª y 2ª columnas

3. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$=3, calcula sin desarrollarlo $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$ especifica los pasos que das para obtener dicho valor

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -3 \begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 3 \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(5)}{=} 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3.3 = 9$$

(1)Propiedad 4a ; (2) El 2º determinante es 0 por tener dos filas iguales y en el primero aplicamos a las filas 1 y 3 la propiedad 4b (3) cambiamos 2 filas (4 y 5) cambiamos 2 columnas

4. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ triangulando previamente la matriz

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -.1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}) -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$$

(1) Cambio F1 por F4. (2) F3+F1; F4-2F1. (3) F3-3F2, F4+2F2; (4) F4+F3

EJERCICIOS RESUELTOS 4-16

2. CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ A PARTIR DE SUS MENORES

Menores de una matriz

Dada una matriz cualquiera de orden mxn, llamamos menor de orden k de dicha matriz al determinante de cualquier submatriz que se pueda obtener a partir de la dada eliminando un número determinado de filas y columnas.

EJEMPLO: La matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ contiene 4 menores de orden 3 que se obtienen eliminando una de sus columnas:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ (eliminamos la columna 4); $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ (la 3^a); $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (la 2^a); $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (la 1^a)

Igualmente, podríamos obtener menores de orden dos eliminando una de sus filas y dos de sus columnas. Así, si eliminamos la 3ª fila y la 1ª y 2ª columnas obtenemos el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

Si eliminamos la 2ª fila y la 1ª 3ª columnas obtenemos $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$, etc.

LLamamos menor principal de orden n al que se obtiene escogiendo las n primeras filas y columnas de la matriz. En el caso anterior el menor principal de orden 2 sería $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Cálculo del rango

Como vimos en el tema anterior el rango de una matriz es el número máximo de filas o de columnas linealmente independientes de dicha matriz.
Ahora bien, por las propiedades de los determinantes sabemos que el determinante de una matriz cuadrada es distinto de cero si y solo si sus filas y columnas son independientes. Por lo tanto, el rango de la matriz ha de coincidir con el orden del mayor menor distinto de cero que contenga dicha matriz.

EJEMPLO 1:

En la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, como no contiene ningún menor de orden superior su rango es 2 (las filas que forman ese menor son L.I. al ser el detrminante no nulo).

EJEMPLO 2:

En la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Sin embargo, todos sus menores de orden 3 son nulos (comprúebalo). Por tanto, el rango de la matriz es igual a dos.

No obstante, el método que acabamos de describir resulta poco eficaz ya que el número de menores que tiene una matriz puede ser enorme. (por ejemplo una matriz de orden 4x5 tiene 60 menores de orden 2, 40 de orden 3 y 5 de orden 4) No sería factible pensar en calcularlos todos para hallar su rango. Puede demostrarse que no es necesario hallar todos los menores sino que es sufiiciente proceder como se explica en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 3:

Calcular el rango de la matriz A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & -\mathbf{2} & 2 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{2} & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$

Partimos de un menor de orden 2 distinto de cero, el marcado en negrilla (en caso de ser posible es práctico elegir el menor principal). Orlamos ahora ese menor, es decir añadimos 1 fila y una columna para obtener un menor de orden 3

añadiendo la 2ª columna y la 3ª fila obtenemos $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Si este menor hubiese sido distinto de cero el rango sería 3, pues es el mayor posible. Dado que es cero repetimos el proceso. Añadimos ahora la 4ª columna y la 3ª fila, obteniendo $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 0$ Dado que también es cero y no hay más formas de orlar el menor de partida, el rango de la matriz es 2.

EJEMPLO 4:

Calcular el rango de la matriz A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & 3 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Partimos del menor principal dado que es distinto de cero. Lo orlamos con la única fila restante y la 3ª columna obteniendo $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$=0. Procedemos a orlarlo con la 4ª columna

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \neq$ 0. Por lo tanto el rango es 3.

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE RANGO CON PARÁMETROS

1. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a

A) .rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1-a \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ luego para cualquier valor de a el rango es como mínimo 2

Lo orlamos de la única forma posible. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1-a \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = -3a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$ Es decir:

Si a=1 rg(A)=2 ya que se hace cero el único menor de orden 3
Si a $\neq$1 rg(A)=3 ya que dicho menor no sería nulo

B) .rg$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ a & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & a-2 \\ 3 & a & 1 & a-2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$luego para cualquier valor de a el rango es como mínimo 2

Lo orlamos de las dos formas posibles

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a-2 \\ a & 1 & a-2 \end{vmatrix} = 2a^2 - 8a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Esto significa que en caso de que a valga 2 los dos posibles menores de orden tres se hacen cero por lo que el rango es 2. Sin embargo, no ocurre lo mismo si a=-2 pues aunque el primer menor se anula, el segundo es distinto de cero con lo que el rango es 3.
Resumiendo:
Si a=2 rg(A)=2
Si a $\neq$2 rg(A)=3

C). rg $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -a^2+3 \\ a & 1 & 1 & -a^2+3 \end{pmatrix}$ No hay ningún menor de orden 2 que no dependa de a. En estos casos

Partimos del menor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$ y lo orlamos de las dos formas posibles:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -a^2+3 \\ a & 1 & -a^2+3 \end{vmatrix} = -2a^3 + 6a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Esto significa que para a $\neq$1 y a $\neq$-2 rg(A)=3 ya que los menores de orden tres son no nulos.
Para a=1 y a=-2 debemos sustituor en la matriz para observar si el rango es 2 ó 1.

Para a=1 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ luego el rango es 1. Para a=-2 A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$luego el rango es 2. Resumiendo:

Si a=1 rg(A)=1
Si a=-2 rg(A)=2
Si a $\neq$1 y a $\neq$-2 rg(A)=3

EJERCICIOS 17-18

3. MATRICES INVERSIBLES. INVERSA DE UNA MATRIZ

<u>DEFINICIÓN</u>

Sea A una matriz cuadrada de orden n , diremos que A es inversible si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, a la que denotaremos por A^{-1} , tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, siendo y la matriz identidad de orden n . A la matriz A^{-1} se le denomina inversa de A.

No toda matriz cuadrada posee inversa. Las matrices que tienen inversa se llaman inversibles o regulares y las que no la tienen no inversibles o singulares.

TEOREMA DE UNICIDAD

La matriz inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que B y C son ambas matrices inversas de una matriz cuadrada A

Por ser B inversa de A se verifica A.B=B.A=I
Por ser C inversa de A se verifica A.C=C.A=I

Entonces: B= B.I= B.(A.C)= (B.A).C=I.C=C

TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE MATRICES INVERSIBLES

Sea A una matriz cuadrada, A es inversible $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ y en ese caso $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$ siendo *(AdjA)* la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de la matriz A por su adjunto

EJEMPLOS DE APLICACIÓN MATRIZ INVERSA

EJEMPLO1: Calcula A^{-1} siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ | A | =36+24+12-32-27-12=1

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}=24 \quad ;A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}=-5 \quad ;A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-2$$
$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=-3 \;;\; A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=1 \quad ;A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$$
$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-10 \quad ;A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2 \quad ;A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1$$
$$\text{con lo que} A^{-1}=\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2: Hallar los valores de t para los que la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -t & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ t & -1 & 13 \end{pmatrix}$ no tiene inversa

SOLUCIÓN

$|A|= -7t^2 +9t +36 =0$, resolviendo la ecuación t=3 ó t=-12/7 para esos valores la matriz A no tiene inversa

EJEMPLO 3: Resolver la ecuación matricial XA+B=C , utilizando para ello la matriz inversa, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

XA+B=C ; XA=C-B ; X=(C-B)A^{-1} NOTA: Obsérvese que tenemos que multiplicar en el primer miembro de la ecuación por A^{-1} por la dcha , para obtener XA.A^{-1} =X I=X; dado que el producto de matrices no es conmutativo tendremos que multiplicar el segundo miembro de dicha ecuación por A^{-1} también por la dcha, quedando (C-B)A^{-1} . No es válido por lo tanto X=A^{-1} (C-B)

B-C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Calculada en el ejemplo de la página anterior)

Por tanto $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 & 10 & 4 \\ 44 & -9 & -4 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 4:

a)Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa

b)Utilizando la matriz inversa resuelve la ecuación matricial XA+B=C, siendo: A la matriz del apartado anterior para t=2; B=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & o & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $|A| = 6 - t^2 - 1 = t^2 - 5 = 0$ por lo tanto t=$\pm\sqrt{5}$ para esos valores de t A no tiene inversa

b) XA+B=C; XA=C-B; XAA^{-1}=(C-B)A^{-1} ; X=(C-B)A^{-1}.

Cálculo de A^{-1}: |A|=1;

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 12; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1}=\frac{(\mathrm{AdjA})^t}{|A|}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 5\\ -2 & -5 & -2\end{pmatrix};\ X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 5\\ -2 & -5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 5 & 9 & 4\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5: Utilizando el concepto de matriz inversa resolver la ecuación matricial

$$AB+CX=D \qquad \text{siendo : } A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

$A.B+C.X=D \Rightarrow C.X=D-A.B \Rightarrow X= C^{-1}(D-A.B)$

$$A.B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

$$D-A.B=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}$$

$|C|=4-6=-2$; $c_{11}=4$; $c_{21}=-2$;

$c_{12}=-3$; $c_{22}=1$ $\qquad C^{-1}=-1/2\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$$X=C^{-1}(D-A.B)=-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}=-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6

a)Si A es una matriz inversible ¿ es su traspuesta inversible?

b) Sean A y B matrices cuadradas. Es conocido que de AB=0 no puede deducirse que A ó B sean la matriz nula. Probar que si $|A|\neq 0$ y AB=0 entoces B=0

SOLUCIÓN

a) Si A es inversible el determinante de A es distinto de cero, pero por una propiedad de los determinantes sabemos que $|A|=|A^t|$ luego A^t es inversible por ser su determinante distinto de cero

b) $|A|\neq 0$, eso significa que existe A^{-1} , entonces si $AB=0\Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}0\Rightarrow B=0$

EJERCICIOS RESUELTOS 19-24

EJERCICIOS RESUELTOS **(solución al final de los enunciados)**

1.Calcular a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 8 & 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Si el determinante de una matriz de orden n vale D ¿Cuál es el valor del determinante que se obtiene al multiplicar por 5 dicha matriz?

3. Todos los elementos de una matriz cuadrada de orden n se multiplican por -1. ¿Cómo queda afectado el valor de su determinante?. Razona la respuesta.

4. Dado el valor del primer determinante, calcular sin desarrollarlo el valor del segundo

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25\ ;\ \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$

5. Prueba sin desarrollarlo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$

6. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ Calcula sin desarrollarlos a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+5 & 2b & 2c+10 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ calcular a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. Razonar las siguientes igualdades a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

9. Demuestra, sin desarrollar el determinante, que las raíces del polinomio P(X) son 4, 8 y -12, siendo P(X)= $\begin{vmatrix} x & 8 & 8 \\ 8 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix}$

10. Demuestra, haciendo ceros previamente y desarrollando después por triangulación, que

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-8)$$

11. Demostrar que el siguiente determinante es divisible por 21 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

12. Comprueba que $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

13. Sabiendo que 299,468 y 741 son múltiplos de 13 comprueba, sin desarrollarlo que

$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 13

14. Demostrar, sin desarrollarlo, que $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 15

15. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det(M)=4. Calcula, enunciando las propiedades de los determinantes que utilices, el determinante de una matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, son: $-C_2$, $2C_1-C_3$, C_2+C_3

16. a) Pon un ejemplo de matriz simétrica de orden 3 y otro de matriz antisimétrica de orden 3

b) Sea M una matriz simétrica de orden 3 con det(M)=-1. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $M+M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M.

c) Calcula una matriz X simétrica y de rango 1 que verifique: $X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. Discutir, utilizando sus menores, el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de los parámetros

$$a)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; b)\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}\ d)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix}\ f)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{pmatrix}; g)\begin{pmatrix} 3 & a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & a+1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$; h)\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1+a^2 \end{pmatrix}; i)\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; j)\begin{pmatrix} 1 & a & -a & 3 \\ a & -1 & a & 2 \\ -a & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

18.Si A es una matriz cuadrada de orden 3 tal que $A^3+I=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula de orden 3, ¿Cúal es el rango de A? Calcula el determinante de A^{30}. Calcula A en el caso de que sea una matriz escalar que verifica la igualdad anterior.

19. Determinar los valores de x que hacen que no tenga inversa la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & x & 6 \\ 1 & 3 & 2x \end{pmatrix}$

20. Hallar si es posible las inversas de las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; D= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

21. Resolver la ecuación matricial XA-C=B, utilizando para ello la matriz inversa, siendo:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

22. Resuelve la ecuación matricial AX=B siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23. Hallar una matriz X tal que AX-B=2C, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; C=

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

24. Resolver la ecuación matricial AX+B=2C siendo A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

C= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES EJERCICIOS DETERMINANTES

1. Intentaremos hacer ceros en una fila o columna para facilitar el desarrollo del determinante. Los de orden 3 los rearlizamos por Sarrus.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & -3 \\ 0 & 10 & -4 & -6 \\ 0 & 13 & -6 & -9 \end{vmatrix} \underset{2}{=} \begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 10 & -4 & -6 \\ 13 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0$

1: F1-2F2, F3-3F1, F4-4F1; 2: Desarrollando el determinante por la primera columna

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 8 & 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} \underset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -7 & -13 \end{vmatrix} \underset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -8 & -6 \\ -2 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{vmatrix} = 0$

1:F2-4F1, F3-3F1, F4-8F1; 2: Desarrollando el determinante por la 1ª columna.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{2}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$

1: F2+F1, F3+F1, F4+F1; 2: Desarrollo por la 1ª columna

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

1: F2-F4,F3-F4; 2: Desarrollo por la 1ª columna

2) $|5A|=5^n|A|$;

3) $|-A|=(-1)^n|A| \Rightarrow \begin{cases} \text{si n par } |-A|=|A| \\ \text{si n impar } |-A|= -|A| \end{cases}$

4) $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 8.25 = 200$

5) El derterminante es cero por ser 5ªfila=4ªfila+2ªfila-1ªfila

6) a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{1}{=} 6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$; (1: aplicando la linealidade a las filas 1ª y 3ª)

b) $\begin{matrix} 5a & 5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (aplicando la linealidad primero a la fila 1ª y después a la 2ª)

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+5 & 2b & 2c+10 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (1) 2ªF-2.1ªF; 3ªF-1ªF

7) a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$.(aplicando la linealidad a la fila 1ª y después a la 2ª)

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ (1) F2-3F1; F3-F1

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. (1) F1+F3; F2-F3

8.a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} \overset{F2-12\,F1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (1) Propiedad 4 aplicada a las filas 1 y 2. (2) F3+F1

9. P(x)= $\begin{vmatrix} x & 8 & 8 \\ 8 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix}$ el desarrollo de este determinante da un polinomio de grado 3 y, por lo tanto tendrá como máximo 3 raíces. Para x=4 P(4)= $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ por tener 2 columnas iguales.

Para x=8 P(8)=)= $\begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$por tener 2 columnas iguales. Para x=-12

P(-12)= $\begin{vmatrix} -12 & 8 & 8 \\ 8 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$ al ser F3=-F1-F2

10. $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 8 \\ x & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & 6 \\ 0 & 3-x & 3-x & 3-x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & 2-x & 2-x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8-x \end{vmatrix} =$

= - (x-3)(x-2)(8-x)=(x-3)(x-2)(x-8)

11. Si a la F6 le sumamos las filas 5,4,3,2 y 1, quedan todos sus términos iguales a 21. Sacamos el 21 multiplicando fuera del determinante (Propiedad 4) y demostramos por lo tanto que éste es múltiplo de 21

12. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} \overset{(1)1}{=} \begin{vmatrix} a+b & b+c & c-b \\ p+q & q+r & r-q \\ x+y & y+z & z-y \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a+b & b+c & 2c \\ p+q & q+r & 2r \\ x+y & y+z & 2z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+b & b+c & c \\ p+q & q+r & r \\ x+y & y+z & z \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ p+q & q & r \\ x+y & y & z \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(1) Columna 3 - Columna 1. (2) C3-C2; (3) C2-C3; (4) C1-C2

13. $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 299 \\ 4 & 6 & 468 \\ 7 & 4 & 741 \end{vmatrix}$ Múltiplo de 13 por serlo la 3ª columna. (1) C3+10.C2+100.C1

14. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 150 \\ 2 & 2 & 225 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 17 \end{vmatrix}$ (1) C3+10.C2+100.C1)

15. M=(C_1, C_2, C_3); |M|=4; nos piden calcular |-C_2 , 2C_1-C_3, C_2+C_3|

|-C_2 , 2C_1-C_3, C_2+C_3| $\underset{1}{=}$ |-C_2 , 2C_1-C_3, C_3| $\underset{2}{=}$ |-C_2 , 2C_1, C_3| $\underset{3}{=}$ -2|C_2 , C_1, C_3| $\underset{4}{=}$ 2|C_1 , C_2, C_3|=2.4=8

1. Columna 3+columna1 Propiedad: Si a una fila o columna se le suma un múltiplo de otra el determinante no varía
2. Columna 2+ columna 3. Propiedad: la misma enunciada anteriormente
3. Extremos (-1) y 2, que multiplican respectivamente a la segunda y tercera columna, fuera del determinante. Propiedad: Si una fila o columna se multiplica por un número el determinante queda multiplicado por el mismo número
4. Intercambiamos la primera y segunda columnas. Propiedad: Si se intercambian dos filas o columnas el determinante cambia de signo.

16. a) Una matriz simétrica es aquella que es igual a su traspuesta: $A=A^t$. Para que eso sea posible tienen que ser $a_{ij}=a_{ji}\ \forall i,j$. Ejemplo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Una matriz antisimétrica es aquella que verifica que su opuesta es igual a su traspuesta: $A^t=-A$
Para que eso sea posible tiene que ocurrir que $a_{ij}=-a_{ji}\forall i,j$ tq $i\neq j$; $a_{ii}=0$

Ejemplo $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, puede comprobarse que $A^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}=-A$

b) M simétrica$\Rightarrow M=M^t \Rightarrow \det(M+M^t)=\det(M+M)=\det(2M)\underset{1}{=}2^3.\det(M)=-8$

1. Por cada fila que está multiplicada por 2 el determinante queda multiplicado por dicho número. En consecuencia, al tener A tres filas el determinante queda multiplicado por 2^3.

c) Al ser simétrica $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ b+2c & -b-2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a+2b=2 \\ -a-2b=-2 \\ b+2c=0 \\ -b-2c=0 \end{cases}$ La 2º ecuación es Linealmende dependiente de la 1ª, por ser su opuesta, y por lo tanto es una ecuación superflua. Lo mismo ocurre con la 4ª ecuación que es opuesta de la 3ª.

Nos dicen además que el rg(X)=1, lo que es equivalente a decir que su determinante es igual a cero. Es decir: $a.c-b^2=0$. Añadiendo esta nueva ecuación y eliminando las dos superfluas el sistema queda: $\begin{cases} a+2b=2 \\ b+2c=0 \\ ac=b^2 \end{cases}$ Resolviéndolo se obtiene: a=2, b=0, c=0$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: solución del sistema despejamos en la 2ª : b=-2c, sustituimos en la 1ª: a-4c=2$\Rightarrow$a=2+4c
Sustituimos ambos valores en la 3ª: $(2+4c).c=(-2c)^2\Rightarrow 2c+4c^2=4c^2 \Rightarrow 2c=0 \Rightarrow c=0;\Rightarrow$ b=-2c=0 y a=2+4c=2.

17. a) $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$; $|A|=a^3-3a+2=0\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$

Si a=1 RgA=1
Si a=-2 RgA=2
Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ RgA=3

b) $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|A|=2a^2-8=0\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$

Si a=2 o a=-2 RGA=2
Si $a\neq 2$ y $a\neq -2$ RgA=3

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$ $|A|=-3x+3=0\Rightarrow x=1$

Si x=1 RgA=2
Si $x\neq 1$ RgA=3

d) A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ |A|=a^3-a^2-a+1=0⇒ $\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array} \right.$

Si a=1 RgA=1
Si a=-1 RgA=2
Si a ≠ 1 y a ≠ -1 RgA=3

e) A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix}$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ lo orlamos con la 1ª columna

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array} \right.$ lo orlamos con la 3ª columna $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & m-2 \\ m & 1 & m-2 \end{vmatrix} =$

=m^2-4m+4=0⇒m=2. Por lo tanto
Si m=2 RgA=2
Si m ≠ 2 RgA=3

f)A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{pmatrix}$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ lo orlamos con la 1ª columna

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = m = 0$ Lo orlamos con la 2ª columna $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1+m & m & m+1 \end{vmatrix} = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

Por lo tanto
si m=0 RgA=2
Si m ≠ = RgA=3

g) A=$\begin{pmatrix} 3 & a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & a+1 & -4 \end{pmatrix}$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ lo orlamos con la 3ª columna

$\begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & a+1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 14a - 20 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-5 \\ a=-2 \end{array} \right.$ Lo orlamos con la 4ª columna

$\begin{vmatrix} 3 & a & a-1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 20a + 40 = 0 \Rightarrow a = -2$ Por lo tanto
Si a=-2 RgA=2
Si a ≠ -2 RgA=3

h) A=$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1+a^2 \end{pmatrix}$ Como no hay ningún menor distinto de 0, para cualquier valor de a, partimos del menor principal $\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix}$ lo orlamos con la 3ª columna

$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^3 + 3a^2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ a=-3 \end{array} \right.$ lo orlamos con la 4ª columna

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a^2 \end{vmatrix} = a^4+2a^3+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Si a≠0 el RgA=3, al ser distinto de cero alguno de los 2 menores de orden 3

Si a=0 estudiamos la matriz: par a=0 A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ por lo tanto si a=0 RgA=1.

i) A= $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos con la 3ª columna $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = a^2+2a-15=0$

$\begin{cases} a=-5 \\ a=3 \end{cases}$ lo orlamos con la 4ª C. $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3a-9=0 \Rightarrow a=3$ Por lo tanto: si a=3 RgA=2
si a ≠ 3 RgA=3

j) A= $\begin{pmatrix} 1 & a & -a & 3 \\ a & -1 & a & 2 \\ -a & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Al no encontrar ningún menor que sea distinto de cero para cualquier valor de a, partimos del menor principal $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix}$ lo orlamos primero con la 3ª columna

$\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ a & -1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3+a^2+a-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$ lo orlamos ahora con la 4ª columna

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ a & -1 & 2 \\ -a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4a^2-6a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-3/2 \end{cases}$$

Por lo tanto para cualquier valor de a alguno de los menores de orden 3 es distinto de cero. En consecuencia RgA =3 $\forall a \in R$

18. (Sol: $A^3=-I \Rightarrow |A^3|=|A|^3=|-I|=-1 \Rightarrow |A|=-1 \neq 0 \Rightarrow$ RgA=3. $|A^{30}|=|A|^{30}=(-1)^{30}=1$. A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. La matriz no tiene inversa si su determinante es igual a cero. Calculamos $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & x & 6 \\ 1 & 3 & 2x \end{vmatrix} =$

$=4x^2-6-12-2x-4x-36=4x^2-6x-54=0 \Rightarrow \begin{cases} x=9/2 \\ x=-3 \end{cases}$ Para esos valores la matriz no tiene inversa

20. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1/7 & 3/7 & -1/7 \\ -3/7 & -2/7 & 3/7 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

21. Hallamos el |A|=1≠0⇒ A tiene inversa. Por tanto:

$XA-C=B \Rightarrow XA=B+C \Rightarrow XAA^{-1}=(B+C)A^{-1} \Rightarrow X=(B+C)A^{-1}$

Hallamos A^{1}:

$a_{11}=\begin{vmatrix}4&6\\2&9\end{vmatrix}=24;\quad a_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&9\end{vmatrix}=-5;\quad a_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\4&6\end{vmatrix}=-2$

$a_{12}=-\begin{vmatrix}3&6\\4&9\end{vmatrix}=-3;\quad a_{22}=-\begin{vmatrix}1&2\\4&9\end{vmatrix}=1;\quad a_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}=0$

$a_{13}=\begin{vmatrix}3&4\\4&2\end{vmatrix}=-10;\quad a_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}=2;\quad a_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=1$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}$. Calculamos ahora $B+C=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$

$X=(B+C)A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69&-14&-6\\-2&1&0\\15&-3&-1\end{pmatrix}$

22. $X=A^{-1}.B$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}11&12&-8\\-2&-1&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

23. $X=A^{-1}(2C+B)$; $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&0\\4&3&2\end{pmatrix}$

24. $X=A^{-1}(2C-B)$; $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0\\-1&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}5/2&-3/2&2\\3/2&1/2&1\end{pmatrix}$