TEMA I: MATRICES

1. *INTRODUCCIÓN*.

Para presentar un gran número de datos que deben ser tratados desde más de un punto de vista suelen utilizarse tablas que clarifiquen la información. Así por ejemplo, el precio de cuatro productos distintos a o largo de los 3 meses del verano puede representarse mediante una tabla de 3 filas y 4 columnas

	Producto1	Producto2	Producto3	Producto4
Julio	25	32	105	2
Agosto	27	39	100	3
Setiembre	20	32	92	3

Si consideramos únicamente la tabla numérica, entendiendo que las filas representan los meses y las columnas los productos: $\begin{pmatrix} 25 & 32 & 105 & 2 \\ 27 & 39 & 100 & 3 \\ 20 & 32 & 92 & 3 \end{pmatrix}$, tal representación se conoce con el nombre de matriz. El álgebra matricial nos permitirá además operar con dichos datos con el fin de obtener nuevas informaciones.

Las matrices aparecen de forma natural en la economía: gastos energéticos o de producción, precios y cantidades necesarias de materias primas, cotizaciones en bolsa de diferentes acciones a lo largo de los días de la semana, etc. son ejemplos de datos que pueden presentarse mediante notación matricial. Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el inglés J. J. Sylvester. Su desarrollo se debe a W. R. Hamilton y a A. Cayley.

Hoy día el cálculo de matrices tiene gran importancia no solo en economía sino en muchas otras áreas: Medicina, Física, análisis de datos en Psicología y Sociología, problemas de estrategias en operaciones militares o de ayuda humanitaria etc.

Los ordenadores han facilitado enormemente el tratamiento de matrices con gran número de filas y columnas. Un ejemplo son las hojas de Cálculo que funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas celdas se pueden introducir datos y fórmulas para realizar cálculos a gran velocidad.

En cuanto al temario de 2º de bachillerato, el álgebra matricial servirá para facilitar el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y de las posiciones de rectas y planos en el espacio, que serán objeto de estudio en los siguientes temas del programa.

2. CONCEPTO DE MATRIZ.

DEFINICIÓN

Se llama *matriz* de orden mxn, sobre el cuerpo de los numeros reales, a una ordenación rectangular de mxn números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$ A es una matriz de dimensión mxn

- El elemento situado en la intersección de la fila i con la columna j recibe el nombre de a_{ij}. Es decir, cada elemento de una matriz se representa con dos subíndices, el primero indica la fila a la que pertenece el elemento y el segundo la columna. Por ejemplo, el elemento a_{32} es el que está en la tercera fila y la segunda columna.

- Se utilizan letras mayusculas para referirnos a la matriz completa: matriz A y letras mínusculas para refreirnos a uno de sus elementos $a_{2,3}$; $a_{3,5}$; $a_{i,j}$ (elemento genérico)
- También podemos referirnos a la matriz completa utilizando su elemento génerico entre paréntesis: Matriz A= Matriz ($a_{i,j}$)

❖ Denotaremos por M_{mxn} al conjunto de las matrices de orden mxn.

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & \sqrt{7} & \frac{1}{3} \\ 4 & \frac{6}{7} & -1 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Es una matriz de orden 3x4 (3 filas, 4 columnas), $a_{23}=-1$, $a_{32}=8$, $a_{34}=0$. Etc.

3. IGUALDAD DE MATRICES.

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y coinciden los elementos que ocupan el mismo lugar. Es decir, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

A=B si $\forall$ i$\in$\{1,2,...,m\} y $\forall$ j$\in$\{1,2,...,n\} se cumple que $a_{ij}=b_{ij}$

4. OPUESTA Y TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN

Llamamos opuesta de una matriz A$\in M_{mxn}$ a otra matriz del mismo orden cuyos elementos son los opuestos de los elementos de A. La denotaremos por - A. Si A=(a_{ij}) $\Rightarrow$ - A=(- a_{ij}).

EJEMPLO: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

DEFINICIÓN

LLamamos matriz traspuesta de la matriz A a la matriz que se obtiene a partir de A cambiando filas por columnas sin alterar su orden de colocación. La denotaremos por A^t. Si $A=(a_{ij})\in M_{mxn} \Rightarrow A^t=(a_{ji})\in M_{nxm}$.

EJEMPLO Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. A es de orden 2x3. A^t es de orden 3x2

NOTA: Es evidente que $(A^t)^t = A$

5. *TIPOS DE MATRICES.*

a. **Matriz fila.** Es toda matriz que posee una única fila, es decir de orden 1xn.

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix}$. A es de orden 1x5.

b. **Matriz columna.** Es toda matriz qu posee una única coluna, es decir de orden mx1.

EJEMPLO $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. A es de orden 3x1.

c. **Matriz nula.** Es la que tiene todos sus elementos nulos. La denotaremos por (0).

EJEMPLO : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz nula de orden 2x2; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matriz nula de orden2x3

d. **Matriz vertical.** Es aquella en la que m>n.

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

e. **Matriz horizontal.** Es aquella en la que m<n.

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f. **Matriz escalonada.** Es toda matriz en la que el número de ceros que precede al primer elemento no nulo, de cada fila es mayor que el de la anterior. O bien el número de ceros que siguen al último elemento no nulo de cada fila es mayor que el de la anterior.

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g. **<u>Matriz cuadrada.</u>** Es toda matriz que tiene el mismo número de filas que columnas. Es decir m=n. . En caso contrario se llama rectangular (m≠n)

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Dado que sus dos dimensiones son iguales no solemos referirnos a ellas como matrices de orden nxn sino solo como matrices de orden n; $A \in M_n$

En las matrices cuadradas llamamos:

- D**iagonal principal**. Al conjunto de todos los elementos cuyos subindices son iguales: a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. En el ejemplo anterior la diagonal principal será:{1,5,9}$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

- D**iagonal secundaria**. Conjunto de todos los elementos a_{ij} con i+j=n+1. En el ejemplo anterior la diagonal secundaria será {3,5,7}$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ \mathbf{7} & 8 & 9 \end{pmatrix}$

TIPOS DE MATRICES CUADRADAS

h. **<u>Matriz diagonal</u>** Es aquella matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos a excepción de los de la diagonal principal. Estos pueden ser nulos o no

EJEMPLO: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ En particular la matriz nula de orden n es diagonal

i. **<u>Matriz Escalar</u>** Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales

EJEMPLO: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

j. **<u>Matriz Identidad o Matriz Unidad</u>** Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Hay una matriz identidad de cada orden.

EJEMPLO: $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

k. **<u>Matriz Triangular</u>** Es una matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos que se encuentran por arriba o por debajo de la diagonal principal

Le llamaremos Triangular superior si son nulos los elementos que se encuentran situados por debajo de la diagonal principal, es decir: $\forall a_{i,j}$ tal que i>j $\Rightarrow a_{i,j} = 0$

EJEMPLO: : $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (triangular superior) *y Triangular inferior* si son nulos los elementos situados por encima de la diagonal principal. Es decir : $\forall a_{i,j}$ tal que $i<j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

EJEMPLO : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ (triangular inferior)

NOTA: toda matriz diagonal es a la vez triangular superior e inferior.

l. **Matriz Simétrica** Una matriz se llama simétrica si es igual a su traspueta $A=A^t$
Para que una matriz sea simétrica es necesario que sea cuadrada y que
$a_{i,j}=a_{j.i} \quad \forall i,j \in\{1,2,....,n\}$

EJEMPLO: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=A^t$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}=B^t$ son por lo tanto simétricas.

m. **Matriz Antisimétrica** Son aquellas que verifican que su traspuesta es igual a su opuesta; $A^t =- A$. Para que una matriz sea antisimétrica es necesario que sea cuadrada y que $a_{i,j} = - a_{j.i}$ $\forall i,j \in\{1,2,....,n\}$. De esto se deduce que los elementos de la diagonal principal tienen que ser ceros

EJEMPLO: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica pues $A^t =\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -A$

EJERCICIOS RESUELTOS : 1-4

6. *Submatriz de una matriz A*

LLamamos así a toda matriz B obtenida suprimiendo p filas y q columnas en A. Si A es de orden mxn, B será de orden (m-p)x(n-q).

EJEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ 9 & 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Suprimiendo en $A\in M_{3x5}$ la fila 3 y las columnas 4 y 5, obtenemo

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, submatriz $B\in M_{2x3}$.

7. *OPERACIONES CON MATRICES*

7.1 *SUMA DE MATRICES.*

Supongamos que dos fabricantes de cerveza necesitan como materias primas malta, levadura y agua. Sus matrices de consumo a lo largo de 4 semanas son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 7 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 2 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ (matriz de consumo de la 1ª empresa) y $N=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 7 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ (consumo 2ª empresa)

¿Cuánta materia prima de cada clase necesitan entre las dos´cada semana

Parece evidente que lo único que tenemos que hacer es sumar las necesidades de malta de las dos empresas en cada semana, las de levadura del mismo modo y por último las de agua.

$$M+N=\begin{pmatrix} 17 & 8 & 22 \\ 14 & 11 & 15 \\ 13 & 10 & 4 \\ 19 & 13 & 8 \end{pmatrix} \text{(Matriz del consumo conjunto de las dos empresas)}$$

Es decir para sumar dos matrices del mismo orden sumamos los elementos que ocupan la misma fila y columna, obteniendo otra matriz de la misma dimensión

DEFINICIÓN

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_{mxn}$, es decir, matrices con las mismas dimensiones.

Definimos su suma como una nueva matriz, del mismo orden, cuyos elementos se obtienen sumando término a término los elementos correspondientes de las matrices A y B . Es decir, $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

La suma es una operación interna en M_{mxn}

$+$: $M_{mxn} x M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$

$(A,B) \longrightarrow A+B$

EJEMPLO: Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

NOTA: Dos matrices de diferente orden no se pueden sumar

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

1. Asociativa: $\forall$ A,B,C $\in M_{mxn}$ (A+B)+C = A+(B+C).
2. Existe elemento neutro: $\exists$ la matriz nula (0)$\in M_{mxn}$ tal que $\forall$ A$\in M_{mxn}$ A+(0)=(0)+A=A
3. Existe elemento opuesto: $\forall$ A$\in M_{mxn}$ $\exists$ -A$\in M_{mxn}$ tal que A+(-A)=(0) y (-A)+A=(0)
4. Conmutativa: $\forall A, B \in M_{mxn}$ se verifica A+B = B+A.

De las anteriores propiedades se sigue que (M_{mxn}, +) es un Grupo Conmutativo.

Proposición: $(A+B)^t = A^t + B^t$

7.2 PRODUCTO DE UN NUMERO REAL POR UNA MATRIZ.

Los gastos mensuales de energía, personal y materias primas de 2 empresas quedan reflejados en la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 2000 & 5000 \\ 27200 & 32500 \\ 8400 & 12700 \end{pmatrix}$ ¿Cuál será el gasto de cada uno de estos conceptos en ambas empresas durante el primer trimestre el año?

Es evidete que lo único que tenemos que hacer es multiplicar por 3 cada uno de los gastos mensuales, de forma que el gasto trimestra vendría dado por $3.\begin{pmatrix} 2000 & 5000 \\ 27200 & 32500 \\ 8400 & 12700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 & 15000 \\ 81600 & 97500 \\ 25200 & 38100 \end{pmatrix}$

DEFINICIÓN

Sea A una matriz y λ un número real. Definimos su producto como una matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen al multiplicar por λ todos los eementos de la matriz A

Es decir, si $A=(a_{ij}),\in M_{mxn}$ y $\lambda\in R$. $\lambda.A=(\lambda.a_{ij})$.

El producto de un número real por una matriz, es una operación externa que asocia a cada par formado por un número real y una matriz, otra matriz:

$\bullet_\lambda$: $R x M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$

$(\lambda,A) \longrightarrow \lambda.A$

EJEMPLO: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $3\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

5. Distributiva respecto a la suma de matrices $\forall A,B\in M_{mxn},\ \forall\lambda\in R$ $\lambda\bullet(A+B)=\lambda\bullet A+\lambda\bullet B$
6. Distributiva respecto a la suma de números $\forall A,\in M_{mxn},\ \forall\lambda,\mu\in R$ $(\lambda+\mu)\bullet A=\lambda\bullet A+\mu\bullet A$
7. Pseudoasociativa $\forall A,\in M_{mxn},\ \forall\lambda,\mu\in R$ $(\lambda\bullet\mu)\bullet A=\lambda\bullet(\mu\bullet A)$
8. $1\bullet A=A\ \forall A\in M_{mxn}$

De la propiedades de la suma y del producto por escalares se sigue que $(M_{mxn},+,\bullet_\lambda)$ es un espacio vectorial sobre R

PROPOSICIÓN

$\forall A\in M_{mxn}$ y $\forall\lambda\in R$, $(\lambda.A)^t=\lambda.A^t$

EJEMPLO 1: Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $2\bullet A+3\bullet B=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Dado que las matrices solo se pueden sumar si son del mismo orden, tanto A como B han de ser matrices cuadradas de orden 2. Sean $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} l & m \\ n & o \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l & m \\ n & o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+l & y+m \\ z+n & t+o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$2A+3B=2\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} l & m \\ n & o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+3l & 2y+3m \\ 2z+3n & 2t+3o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ De la igualdad de matrices se obtiene un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas cuya solución nos da los términos de las matrices A y B. No obstante, este sistema podría dividirse en 4 sistemas de dos incógnitas cada uno, tomando las 2 ecuaciones en las que intervienen cada una incógnitas. Obtenemos así los siguientes sistemas:

:$\begin{cases} x+l=5 \\ 2x+3l=13 \end{cases}$; $\begin{cases} y+m=3 \\ 2y+3m=8 \end{cases}$; $\begin{cases} z+n=1 \\ 2z+3n=2 \end{cases}$; $\begin{cases} t+o=0 \\ 2t+3o=-1 \end{cases}$ Resolviéndolos

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 2: Comprobar si las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ son LD o LI

Las matrices serán LD o LI según sea o no única la solución de la ecuación $(0)=\lambda A+\beta B+\delta C$

Es decir, debemos resolver el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ o, lo que es lo mismo: $\left\{ \begin{array}{l} 0 = 2\beta + 4\delta \\ 0 = 2\lambda + \beta + 4\delta \\ 0 = \lambda + 3\beta + 7\delta \\ 0 = 5\lambda - \beta + 3\delta \end{array} \right.$, Una vez resuelto obtenemos que el sistema tiene infinitas soluciones: $\{(\lambda, \beta, \delta) \,/\, \lambda = -\delta;\ \beta = -2\delta;\ \delta \in \mathbb{R}\}$ Y, por tanto, las matrices son LD.

EJEMPLO 3: Encontrar una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales:

A) Matrices de orden 2

B) Matrices simétricas de orden 2

C) Matrices antisimétricas de orden 2

A) Las matrices de orden 2 son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ siendo a,b,c,d números reales. Es fácil demostrar que las matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son LI y también que son Sistema Generador. En consecuencia, el espacio vectorial de las matrices de orden 2 tiene dimensión 4 y las matrices anteriormente indicadas constituyen una base del mismo.

B) Las matrices simétricas de orden 2 son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con a,b y c números reales. Es fácil demostrar que el conjunto de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ constituyen un sistema generador de este tipo de matrices y que son LI, por lo que constituirían una base. Eso significa que la dimensión de ese espacio vectorial es igual a 3.

C) Las matrices antisimétricas de orden 2 son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ siendo a un número real. Una base de estas matrices sería la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es fácil comprobar que es un sistema generador y, evidentemente, es LI al ser una única matriz y no ser nula. La dimensión de este espacio es por lo tanto igual a 1

EJERCICIOS RESUELTOS 5-12

7.3. *PRODUCTO DE MATRICES.*

La definición de las operaciones con matrices que hemos visto hasta ahora son bastante intuitivas y siguen pautas operatorias de sobra conocidas. Vamos a continuación a definir el producto de matrices. Esta operación no es en principio tan intuitiva, sin embargo su originalidad ha convertido el álgebra matricial en un potente recurso para el análisis de todo tipo de datos.

Producto de una matriz fila por una matriz columna

Un comercio de electrodomésticos necesita comprar 5 lavadoras, 3 frigorificos y 6 televisores. Su proveedor le cobra 320 euros por cada lavadora, 350 por cada frigorífico y 280 por cada televisor. ¿Cual es el gasto total del comerciante?

Evidentemente lo único que tenemos que hacer es multiplicar el número de aparatos de cada tipo por su precio y sumar los costes:
5x320+3x350+6x280=1600+1050+1680=4330 euros
Veamos como puede plantearse el problema como un producto de matrices.
Consideremos la matriz fila que recoge las necesidades del comeriante: $A=(5,3,6)\in M_{1x3}$

Asimismo la matriz columna que refleja los precios unitarios de los aparatos $B=\begin{pmatrix} 320 \\ 350 \\ 280 \end{pmatrix}\in M_{3x1}$.

Definimos A.B como una matriz de orden 1x1 de la siguiente forma:

$$A.B= (5,3,6).\begin{pmatrix} 320 \\ 350 \\ 280 \end{pmatrix}=(5x320+3x350+6x280)=(4330)$$

NOTA: Observa que para poder multiplicarlas es preciso que el númer de columnas de A coincida con el número de filas de B

Producto de dos matrices cualesquiera

Veamos como este tipo de producto puede ayudarnos en problemas un poco más complejos. Supongamos que tenemos dos comerciantes distintos que pueden adquirir sus productos a tres proveedores diferentes.

Las necesidades de existencias de los dos comercios queda recogida en la siguiente tabla:

	Lavadoras	Frigoríficos	Televisores
Comercio 1	5	3	6
Comercio 2	8	4	8

Los tres proveedores les ofrecen los siguientes precios:

	Proveedor 1	Proveedor 2	Proveedor 3
Lavadora	320	330	315
Frigorífico	350	340	350
Televisor	280	270	290

¿Con qué proveedor le sale la compra más barata a cada comerciante?
Para contestar a esta pregunta hemos de analizar por separado el coste total para cada comercio con cada uno de los proveedores:
1^{er} Comercio
5x320+3x350+6x280=1600+1050+1680=4330 euros con el 1^{er} proveedor
5x330+3x340+6x270=1650+1020+1620=4290 euros con el 2º proveedor
5x315+3x350+6x290=1575+1050+1740=4365 euros con el 3^{er} proveedor

2 Comercio
8x320+4x350+8x280=2560+1400+2240=6200 euros con el 1^{er} proveedor
8x330+4x340+8x270=2640+1360+2160=6160 euros con el 2º proveedor
8x315+4x350+8x290=2520+1400+2320=6240 euros con el 3^{er} proveedor

Así pues el primer comerciante debe adquirir sus productos al primer proveedor mientras que al segundo le conviene más el 2º proveedor

Podríamos haber planteado este problema como el producto de las dos matrices, siguiendo las mismas pautas que en el primer ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 320 & 330 & 315 \\ 350 & 340 & 350 \\ 280 & 270 & 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.320+3.350+6.280 & 5.330+3.340+6.270 & 5.315+3x.350+6.290 \\ 8.320+4.350+8.280 & 8.330+4.340+8.270 & 8.315+4.350+8.290 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4330 & 4290 & 4365 \\ 6200 & 6160 & 6240 \end{pmatrix}$$

El elemento a_{11} de la matriz producto se obtiene multiplicando los elementos de la primera fila de la matriz A(necesidades del primer comercio) por los de la primera columna de la matriz B (precio unitario que da el primer proveedor) y sumando los resultados. Esto hace que el elemento a_{11} refleje el coste total del primer comerciante si compra sus productos al primer proveedor. De igual forma a_{12} reflejaría el coste del primer comerciante con el segundo proveedor, $a_{1,3}$ primer comerciante con tercer proveedor, $a_{2,1}$ 2º comerciante con primer proveedor y así sucesivamente.

NOTAS

-Obsérvese que para poder multiplicar las matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda. Esto hace que no siempre pueda realizarse el producto de matrices.

-Obsérvese además que la matriz producto tiene el mismo número de filas que la primera matriz que multiplicamos y el mismo número de columnas que la segunda.

-Es decir, el producto es posible si $A \in M_{mxp}$ y $B \in M_{pxn}$. La matriz producto $A.B \in M_{mxn}$

DEFINICIÓN

Sea $A=(a_{i,j}) \in M_{mxp}$ y $B=(b_{i,j}) \in M_{pxn}$. Definimos su producto A.B como una nueva matriz $C=(c_{i,j}) \in M_{mxn}$ tal que $c_{i,j}= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{k,j}\ \forall i \in \{1,2....m\}\ \forall j \in \{1,2......n\}$

Es decir, el elemento de la fila i columna j de la matriz C se obtiene sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila i de la matriz A por los respectivos elementos de la columna j de la matriz B

Así pues, el producto de matrices,es una operación externa

$$\bullet : M_{mxn} x M_{nxp} \longrightarrow M_{mxp}$$
$$(A\ ,\ B) \longrightarrow C$$

Obsérvese que para poder efectuar el producto A•B es necesario que el número de columnas de la matriz A coincida con el número de filas de la matriz B. Esto implica que, en general, si existe el producto A•B no tiene por qué existir B•A.

Sin embargo, si las matrices son cuadradas y del mismo orden, siempre existen A•B y B•A.

El producto de matrices es una operación interna para las matrices cuadradas.

$$\bullet : M_m x M_m \longrightarrow M_m$$
$$(A\ ,\ B) \longrightarrow C$$

EJEMPLOS

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+12+10 & 27+2+40 \\ 4+42+0 & 9+7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 69 \\ 46 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Los consumos anuales de tres familias a, b y c, en pan, carne y mantequilla vienen dados en la matriz A. Los precios de esos mismos productos en los años 1998, 1999, 2000, 2001 vienen dados en la matriz B. Calcular, en función de A Y B el gasto total de cada familia en los distintos años

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} & \text{pan} & \text{carne} & \text{manteq} \\ a & 430 & 157 & 8 \\ b & 545 & 210 & 1 \\ c & 120 & 80 & 3 \end{pmatrix} \quad B_{3x4} = \begin{pmatrix} & 1998 & 1999 & 2000 & 2001 \\ \text{pan} & 145 & 156 & 171 & 180 \\ \text{carne} & 1300 & 1300 & 1350 & 1400 \\ \text{manteq} & 1500 & 1630 & 1600 & 1800 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

La matriz A.B nos dará el gasto por año de cada familia

$$A.B= \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 145 & 156 & 171 & 180 \\ 1300 & 1300 & 1350 & 1400 \\ 1500 & 1630 & 1600 & 1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1998 & 1999 & 2000 & 2001 \\ a & 278450 & 284220 & 298280 & 311600 \\ b & 353525 & 359650 & 378295 & 393900 \\ c & 125900 & 127610 & 133320 & 139000 \end{pmatrix}$$

(consumo familia x producto).(precio producto x año)= (gasto total familia por año)

3. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula A^n siendo n un número natural cualquiera y Halla A^{350}-A^{250}

SOLUCIÓN

$A^1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3.3 & 1 \end{pmatrix}$

Podemos concluir que $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

$A^{350}-A^{250}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3.350 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3.250 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3(350-250) & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

4.Sea A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Encuentra la regla para calcular A^n siendo n un número natural

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^3=A^2.A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$

Entonces: $A^4=A^3.A=I.A=A$; $A^5=A^3.A^2=I.A^2=A^2$; $A^6=A^3.A^3=I.I=I$. y, en general, $A^n=A^r$ siendo r el resto que resulta al dividir n entre 3.

5. Dadas las matrices A$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ Calcula X tal que: AX+B=C

Solución: Para que X pueda cumplir las condiciones debe ser una matriz 2x2, X=$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$(en otro caso no podría multiplicarse por A y sumar su resultado con B).

AX+B=C$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Realizando las operaciones e igualando e igualando las matrices se obtiene un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Al resolverlo tenemos: X=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES.

1. Asociativa $\forall A\in M_{mxn}, B\in M_{nxp}, C\in M_{pxq}$ A.(B.C)=(A.B).C
2. Distributiva respecto a la suma de matrices $\forall$ $A\in M_{mxn}$, $B,C\in M_{nxp}$ A.(B+C)=A.B+A.C
3. $\forall A\in M_{mxn}, B\in M_{nxp}$ y $\forall\lambda\in R$ λ(A.B)=(λA).B=A.(λB)
4. $\forall A\in M_{mxn}$ A.I_n =A y I_m.A=A . Obsérvese que esto no significa que el producto de matrices tenga la propiedad de existencia de elemento neutro puesto que I_n solo podrá multiplicarse por A por la derecha e I_m solo podrá multiplicarse por la izquierda.
   En el caso de matrices cuadradas si se verifica la existencia de elemento neutro pues:
   $\forall$ $A\in M_n$ A.I_n =I_n .A=A
5. $\forall A\in M_{mxn}, B\in M_{nxp}$ $(A.B)^t = B^t . A^t$

NOTA 1

El producto de matrices no es conmutativo.

a) En primer lugar hay casos en los cuales es posible efectuar A.B, y no B.A

EJEMPLO: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$. Sin embargo no es posible efectuar B.A.

b) En los casos en que es posible efectuar A.B y B.A, no siempre da el mismo resultado. A veces ni siquiera son del mismo orden.

EJEMPLO: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}, B\cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 12 & 0 & 6 \\ 15 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.A.B $\neq$ B.A

c) En el caso de las matrices cuadradas, tampoco se verifica la propiedad conmutativa.

EJEMPLO:Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. A.B $\neq$ B.A

¡Esto hace que tengamos que tener mucho cuidado en mantener el orden en que aparecen las matrices que van a multiplicarse, debiendo fijarnos si la matriz A está multiplicada por la matriz B por la izquierda o por la derecha!.

NOTA 2

En matrices no se verifican algunas propiedades usuales en los números reales, lo que exige cierto cuidado en sus operaciones. Veamos algunos ejemplos

1. En los números reales a.b=0$\Rightarrow$a=0 ó b=0. Sin embargo hay matrices no nulas cuyo producto es la matruz nula. Es decir, en matrices A.B=0 $\not\Rightarrow$A=0 ó B=0

EJEMPLO Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A≠(0) y B≠(0); sin embargo A.B=(0).

2. En los números reales a.b=a.c⇒b=c. Esta propiedad la utilizamos muchas veces para simplificar una expresión o una ecuación. En matrices A.B=A.C⇏B=C, por tanto no podemos simplificar.

EJEMPLO: Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; A.B=A.C=$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ y sin embargo B ≠ C

3 Tampoco son ciertas en matrices las igualdades notables:

$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$

$(A- B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB$

$(A+B).(A-B) \neq A^2 - B^2$

Demostrarlo como ejercicio teniendo en cuenta la no conmutatividad del producto

EJERCICIOS RESUELTOS 13-32

8. MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

DEFINICIÓN

Sea A una matriz cuadrada de orden n , diremos que A es inversible si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, a la que denotaremos por A^{-1}, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$. A la matriz A^{-1} se le denomina inversa de A.

No toda matriz cuadrada posee inversa. Las matrices que tienen inversa se llaman inversibles o regulares y las que no la tienen no inversibles o singulares.
Más adelante caracterizaremos las matrices que son inversibles y explicaremos un método sencillo para el cálculo de la matriz inversa.

EJEMPLO1: Las matrices A=$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ son inversas ya que se verifica que

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2**:** Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Decide si es inversible y en caso afirmativo halla su inversa.

Solución: Supongamos que A es inversible, en ese caso existirá una matriz B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq AB=BA=I

$$A.B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Por tanto } \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 2a=0 \\ 2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1/2 \\ c=1 \\ d=-1/2 \end{cases}$$

La matriz B= $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ verifica que AB=I, para que sea inversa de A debe verificar también que BA=I, comprobémoslo: $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego A es inversible y $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 3: Dada la matriz A== $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Decide si es inversible y en caso afirmativo halla su inversa

Solución: Supongamos que A es inversible, en ese caso existirá una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq A.B=B.A=I

A.B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ Dado que este sistema de ecuaciones no tiene solución A no es inversile

NOTA: Más adelante veremos como hallar la inversa de una matriz sin tener que resolver un sistema de ecuaciones.

.

EJERCICIO RESUELTO Nº 33

9. *RANGO DE UNA MATRIZ.*

DEFINICIÓN

LLamamos rango de filas de una matriz A al número máximo de vectores fila linealmente independientes de dicha matriz

LLamamos rango de columnas de una matriz A al número máximo de vectores columna linealmente independientes de dicha matriz

Ejemplo Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. El rango por filas de A es 2 ya que los vectores fila (1,0,3) y (2,1,-1) son linealmente independientes y el vector (3,1,2) es C.L. de ellos al ser (3,1,2)=(1,0,3)+(2,1,-1). El rango por columnas es también 2 ya que los vectores columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes y el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es C.L: de ellos al ser $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $=3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}-7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

TEOREMA

En cualquier matriz A se verifica que el rango de filas de A coincide con el rango de colummnas

DEFINICIÓN

LLamamos rango de A, rg(A), al rango común de sus filas y sus columnas

TRANSFORMACIONES QUE MANTIENEN EL RANGO DE UNA MATRIZ

1. Si en una matriz se intercambian entre sí dos filas o dos columnas el rango no varía
2. Si en una matriz una fila o columna es el vector cero, su rango es el mismo que el de la matriz que se obtiene al eliminar dicha fila o columna.
3. Si en una matriz se multiplica una fila o columna por un número distinto de cero el rango no varía.
4. Si sumamos a una fila o columna de una matriz un múltiplo de otra el rango no varía.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Un método para calcular el rango de una matriz consiste en transformarla, mediante las operaciones indicadas en el epígrafe anterior, en una matriz escalonada del mismo rango. El rango de la matriz será obviamente el número de filas no nulas que resulten tras dicha transformación. Esta forma de calcular el rango se conoce con el nombre de método de Gauss, más adelante veremos una forma más sencilla mediante el uso de determinantes.

EJEMPLO 1:Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ aplicando el método de Gauss

Solución

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & -7 & -3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -14 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

(1) 2ª fila-3veces 1ª, 3ª fila-3veces 1ª, 4ª fila-6veces 1ª
(2) Intercambiamos la 2ª columna por la 4ª
(3) 3ª fila-2ª, 4ª fila-3veces 2ª
(4) Intercambiamos la 3ª fila por la 4ª. Los vectores quedan escalonados y ninguno se anula.

EJEMPLO 2

Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 9 & 19 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

$$\text{a) Rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 9 & 19 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \text{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 9 & 19 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \text{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & -26 & 2 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

(1) Intercambiamos las dos primeras filas (2) 2ª fila-3veces 1ª; 3ª fila-4 veces 1ª; 4ª fila-9veces 1ª

(3) 3ª fila-1ª; 4ª fila-2veces 1ª.

EJEMPLO 3: Calcula el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ para los distintos valores del parámetro a

$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$ Si a=1 RgA=1; si a=-1 RgA=2; si a≠1 y a≠-1 RgA=3

(1) 2º fila -1ª fila; 3ª fila -1ª fila

EJEMPLO 4 Calcula el rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix}$, para los distintos valores de m.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix} \underset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & m & m \end{pmatrix} \underset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$$

1: Fila3-Fila1; 2:Fila3-Fila2

Si m=1 la última fila se hace cero y por lo tanto el rango es 2

Si m=0 la matriz no está escalonada. Sustituimos por ese valor de m y la escalonamos::

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Fila3-Fila2) Dado que la última fila se anula el rango también es dos.

En resumen: Si m=1 Rg(A)=2

Si m=0 Rg(A)=2

Si m≠0 y m≠1 Rg(A)=3

EJERCICIOS RESUELTOS 34-36

10. Ejercicios resueltos (soluciones al final de los enunciados)

1. Indica de qué tipo es cada una de las siguientes matrices:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Obtén: A^t, B^t, C^t, -A, -B y -C.

2. Dar un ejemplo de una matriz de orden 4 que sea simétrica y de otra que sea antisimétrica.

3. ¿Las matrices escalares son triangulares? ¿Y las matrices diagonales?
4 ¿Es posible encontrar una matriz triangular que sea simétrica? Si la respuesta es afirmativa pon un ejemplo y si es negativa explica la razón.

5. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula: 3A+2B.

6. Calcula las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:
$3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:
$2\bullet A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A - 3\bullet B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Siendo X e Y matrices que verifican $2X+3Y=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; $X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar X e Y

9. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema:
$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $2\bullet A + 3\bullet B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$ Determinar x e y para que A,B,C sean linealmente dependientes.

11. Estudia si la matriz A+B es simétrica, siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

12. Determina una matriz X que verifique: A+X=B, siendo: $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

13. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto A.B, o bien B.A, sea una matriz de una sola fila? Pon un ejemplo con una matriz $A \in M_{3x4}$

14. Calcula el producto A.B siendo: $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

15. Dada la matriz: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula X^2 y X^3.

16. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula una matriz X tal que AX+B=2C

17. Resolver el siguiente sistema de ecuciones matriciales: $\begin{cases} X-3Y=A \\ 2X+3Y=B \end{cases}$ Siendo A= $\begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$

18. Calcula A^n en cada uno de los siguientes casos.
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^7.

20 Calcula A^n en cada uno de los siguientes casos. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Halla todas las matrices $A \in M_{2x2}$ tales que $A^2=(0)$.

22. Sabiendo que $A^2+A=I$, calcula la matriz $(A+I)^2-(A+I)$.

23. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halla A^n, para $n \in N$

24. Siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla B^n, para $n \in N$

25. Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S(sencillas), N(normales), y L (lujo). Cada vivienda del tipo S tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña; cada vivienda del tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas; y cada vivienda del tipo L tiene 4 grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.
Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada una de las medianas 2 cristales y 4 bisagras y cada una de las pequeñas 1 cristal y 2 bisagras
a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada tipo de vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana
b) Calcular la matriz que expresa el número de cristales y bisagras necesarias para cada tipo de vivienda

26. En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modadidades: grupos normales y grupos reducidos. La matriz A= $\begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas de cada grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la

segunda a los de alemán y las filas a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente. Las columnas de la matriz B= $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix}$ reflejan el porcentaje de estudiantes - común para ambos idiomas- que siguen curso reducido - primera fila- y curso normal - segunda fila- para cada uno de los niveles

a) obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma

b) sabiendo que la academia cobra 3000 pts. por persona en grupos reducidos y 2000 pts. por persona en grupo normal, halla la cantidad ingresada en cada uno de los idiomas

27. Una matriz se dice ortogonal si A.A^t=I, comprobar que es ortogonal la matriz A= $\begin{pmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{pmatrix}$

28. . Hallar la expresión de todas las matrices cuadradas de orden 2 tales que

A.$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.A

29. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcula A^n; idem para la matriz B= $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

30. Determina los valores de a,b de forma que la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique A^2=A

31. Sean A= $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación A.X^t =B+X

32. Sea A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$. Y X una matriz de orden 2. Hallar el valor de a para que el problema A.X=0 tenga soluciones distintas de la trivial. Determinar, para ese valor de a, como ha de ser la matriz X

33. Halla la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

34. Determinar el valor que ha de tener x para que valga 3 el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & x \end{pmatrix}$

35. Calcula el rango de: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 5 \\ -3 & -3 & -9 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

36. Discutir el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de los parámetros

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -a^2+3 \\ a & 1 & 1 & -a^2+3 \end{pmatrix}$;d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a^2 \end{pmatrix}$

11. Soluciones ejercicios resueltos

1. A triangular superior; B Diagonal, simétrica; C Rectangular horizontal

2. Para que A sea simétrica debe verificar $a_{ij}=a_{ji} \forall i,j \in \{1,2,3,4\}$ Ej. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -8 & 2 \\ -1 & -8 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Para que A sea antisimétrica debe verificar $a_{ij}= - a_{ji} \forall i,j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$; $a_{ii}=0$ $_i\forall i, \in \{1,2,3,4\}$

Ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -5 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Si, ambas son triangulares superior e inferior.

4. Si, todas las que son diagonales Ej: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

5. $3A+2B=3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=.\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 21 \\ 4 & 7 & 16 & 5 \\ 15 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

6. Dado que solo es posible la suma de matrices del mismo orden, tanto A como B han de ser matrices de orden 2x2. Sea A=$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3x+2m & 3y+2n \\ 3z+2o & 3t+2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $2A + B = \begin{pmatrix} 2x+m & 2y+n \\ 2z+o & 2t+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Igualando los términos que ocupan el mismo orden obtenemos un sistema de 8 ecuaciones y 8 incógnitas. Escogiendo las ecuaciones que tienen las mismas incógnitas podemos resolver el sistema anterior entendiéndolo como 4 sistemas de 2 incógnitas cada uno:

$\begin{cases} 3x+2m=2 \\ 2x+m=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3y+2n=1 \\ 2y+n=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3z+2o=-1 \\ 2z+o=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3t+2p=4 \\ 2t+p=0 \end{cases}$ Resolviendo esos sistemas obtenemos:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

7. Por la misma razón del ejercicio anterior, tanto A como B han de ser matrices de orden 2x3.

Sea A=$\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & r & s \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} l & m & n \\ o & p & q \end{pmatrix}$

$2\bullet A + B = \begin{pmatrix} 2x+l & 2y+m & 2z+n \\ 2t+0 & 2r+p & 2s+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A - 3\bullet B = \begin{pmatrix} x-3l & y-3m & z-3n \\ t-3o & e-3p & s-3q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; resolviendo los 6 sistemas de dos incógnitas a los que dan lugar estas igualdades se obtiene:

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{7} & \frac{8}{7} \\ 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

8. 2X+3Y=$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; X-Y=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; Por tanto X e Y han de ser matrices cuadradas de orden 2

Sea X=$\begin{pmatrix} r & s \\ z & t \end{pmatrix}$ e Y=$\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$; 2X+3Y=$\begin{pmatrix} 2r+3m & 2s+3n \\ 2z+3o & 2t+3p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$;

X-Y=$\begin{pmatrix} r-m & s-n \\ z-o & t-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; resolviendo los 4 sistemas de 2 incógnitas a los que dan lugar estas igualdades obtenemos:$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/5 & 3 \end{pmatrix}$; Y=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/5 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se hace igual que los anterioresSol: A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices: A=$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; C=$\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$ Determinar x e y para que A,B,C sean linealmente dependientes

Sabemos que si A,B y C son linealmente dependientes, al menos una de ellas puede escribirse como combinación lineal de las demás. Supongamos que C es combinación lineal de A y B, tenemos C=λA+γB. Esto es equivalente a decir que $\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 9 & x \\ -3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda+2\gamma & 2\lambda+3\gamma \\ -4\lambda+\gamma & \lambda+5\gamma \end{pmatrix}$- Resolviendo las ecuaciones a las que dan lugar obtenemos: x=33, y=48.

Nota: esos valores no son únicos ya que podrían obtenerse valores distintos al suponer A C.L. De B y C o B C.L. De A y C)

11. A+B=$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, no es simétrica

12. A+X=B$\Rightarrow$X=B-A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

13. Si. A$\in M_{mxn}$ y B$\in M_{1xm} \Rightarrow B.A \in M_{1xn}$ Ejemplo: A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

B.A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

14. A.B = $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 71 & 20 \\ 19 & 19 & 30 \\ 14 & 60 & 10 \end{pmatrix}$

15. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. En primer lugar debemos pensar el orden que debe tener la matriz X. Tenemos que poder realizar el Producto AX, esto significa que el número de filas de X debe coincidir con el número de columnas de A, es decir tiene dos filas. Por otra parte, AX debe ser de orden 2x3 puesto que tiene que poder sumarse con B, esto implica que X ha de tener 3 columnas. Por lo tanto X es una matriz 2x3.

Supongamos que X=$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$; Vamos a realizar por orden las operaciones que nos indican para proceder a igualar al final. AX=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a-d & b-e & c-f \end{pmatrix}$;

AX+B=$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a-d & b-e & c-f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 & 2b+1 & 2c \\ a-d-1 & b-e+2 & c-f+1 \end{pmatrix} = 2C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como para que 2 matrices sean iguales han de serlo todos sus términos, igualando obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2a+3=8 \\ 2b+1=-2 \\ 2c=4 \\ a-d-1=0 \\ b-e+2=0 \\ c-f+1=2 \end{cases}$ y resolviéndolo obtenemos: a=5/2, b= -3/2, c=2, d=3/2, e=1/2, f=1. Por tanto X= $\begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

17. En este caso conviene utilizar primero el método de reducción. Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema obtenemos 3X=A+B Por lo que X=1/3(A+B). Múltiplicndo la primera ecuación por 2 y cambiando de signo a la segunda obtenemos: $\begin{cases} 2X-6Y=2A \\ -2X-3Y=-B \end{cases}$ y sumando miembro a miembro: -9y=2A-B entonces Y=-1/9(2A-B)

Así pues realizamos A+B=$\begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$; X=1/3(A+B)=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Realizamos ahora 2A-B=2.$\begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 & -27 \\ 0 & -45 \end{pmatrix}$; Y=-1/9(2A-B)=$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

18. a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (La ley de formación es evidente al resolver A^2 y A^3)

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n-1 & 4^n \end{pmatrix}$. (Al calcular A, A^2 y A^3 la ley de formación resulta sencilla para todos los elementos de la matriz excepto para a_{21}. Obsérvese que en todas esas matrices se verifica que $a_{21}=a_{22}-1$, por lo que si $a_{22}=4^n$ se verificará que $a_{21}=4^n-1$

19. : $A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. a) $A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases}$

La 2º ecuación es equivalente a : b(a+d)=0 y solo es posible si b=0 ó a=-d
La 3ª ecuacuación es equivalente a: c(a+d)=0 y solo es posible si c=0 ó a=-d

Por tanto, para que se cumplan las dos, podría ocurrir: $\begin{cases} 1.\ b=0 \text{ y } c=0 \\ 2.\ b=0 \text{ y } a=-d \\ 3.\ a=-d \text{ y } c=0 \\ 4.\ a=-d \text{ y } a=-d \end{cases}$

Analicemos por separado cada uno de esos casos:

1. Si b=0 y c=0, sustituyendo en la 1ª obtenemos a=0 y sustituyendo en la 4ª obtenemos d=0
   Luego $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Sustituyendo en la 1ª obtenemos a=0 y en la 4º obtenemos d=0 luego $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$
3. Sustituyendo en la 1ª obtenemos a=0 y en la 4º obtenemos d=0 luego $A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Sustituyendo en la 1ª obtenemos $c=-\frac{a^2}{b}$, sustituyendo en la 4ªª obtenemos lo mismo, luego
   $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

Resumiendo, las matrices posibles son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; y $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ $\forall b \neq 0$

22.Sabemos que $A^2+A=I$, nos piden calcular
$(A+I)^2-(A+I)=A^2+AI+IA+I^2-(A+I)=A^2+A+A+I-A-I=A^2+A=I$

23. Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halla A^n, para $n\in N$.

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3=A^2.A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto . $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. Siendo $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla B^n, para $n\in N$.

$B^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$

En cnsecuencia, $B^n=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}=3^{n-1}\bullet B.$

25. a) Tamaño de ventana x Tipo de vivienda $\begin{pmatrix}1&2&4\\7&9&10\\1&2&3\end{pmatrix}$

Cristales y bisagras x Tamaño ventana $\begin{pmatrix}4&2&1\\8&4&2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4&2&1\\8&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\7&9&10\\1&2&3\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}19&28&39\\38&56&78\end{pmatrix}$ Esta matriz nos da Cristales y bisagras x Tipo de vivienda

26 $A=\begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0,2&0,25&0,4&0,75\\0,8&0,75&0,6&0,25\end{pmatrix}$

Nivel x Idiom *Modalidad x Nivel*

a) Matriz modalidad -Idioma será la matriz BxA= $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\textit{Inglés} & \textit{Alemán}\end{array}\\ \begin{array}{c}\textit{reducido}\\ \textit{normal}\end{array} & \begin{pmatrix}215&149\\345&281\end{pmatrix}\end{array}$

b) $\begin{pmatrix}3000&2000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}215&149\\345&281\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.335.000&1.009.000\end{pmatrix}$

Precio x Modalidad *Modalidad x Idioma* *Precio x Idioma*

27. $A.A^t=\begin{pmatrix}\cos x&senx\\-senx&\cos x\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos x&-senx\\senx&\cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2x+sen^2x&0\\0&sen^2x+\cos^2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

28. Hallar la expresión de todas las matrices cuadradas de orden 2 tales que

Sea A= $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$; A.$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&x\\t&z\end{pmatrix}$; .$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.A=.$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z&t\\x&y\end{pmatrix}$

Dado que son iguales obtenemos $\begin{cases}y=z\\x=t\end{cases}$ Por lo que A=$\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}\forall x,y\in R$

29. Dada la matriz A=$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ Calcula A^n;

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ De lo que concluimos que $A^n=$

$=\begin{pmatrix} 1 & n-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$; $B^2=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$; $B^3=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a^3 & 4a^3 \\ 4a^3 & 4a^3 \end{pmatrix}$

En consecuencia: $B^3=\begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \\ 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$

30. Determina los valores de a,b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2=A$

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$ Como tiene que ser igua a A, igualando término a término, obtenemos : $\begin{cases} 4-a=2 \\ -2-b=-1 \\ 2a+ab=a \\ -a+b^2=b \end{cases}$ De la 1ª ecuación se sigue a=2, de la segunda que b=-1

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 3ª y 4ª vemos que resultan verdaderas. Por tanto la solución es: a=2, b=-1 (NOTA: si al sustituir a y b en la 3ª y 4ª ecuaciones no nos diese una identidad, el sistema no tendría solución)

31. Sean $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Resolver la ecuación $A.X^t=B+X$

Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $AX^t=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a-b & 5c-d \\ -2a+b & -2c+d \end{pmatrix}$Axt=..

$B+X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+a & b \\ 4+c & 6+d \end{pmatrix}$; Igualamos obteniendo: $\begin{cases} 5a-b=2+a \\ 5c-d=b \\ -2a+b=4+c \\ -2c+d=6+d \end{cases}$ Resolviendo,

$X=\begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ -3 & -19 \end{pmatrix}$

32. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$. Y X una matriz de orden 2. Hallar el valor de a para que el problema A.X=0 tenga soluciones distintas de la trivial. Determinar para ese valor de a como ha de ser la matriz X.

Sea $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $A.X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ 2x+az & 2y+at \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+3z=0 \\ 2x+az=0 \\ y+3t=0 \\ 2y+at=0 \end{cases}$

- En la primera ecuación se tiene: x+3z=0⇒x=-3z ; sustituyendo en la 2ª ecuación queda: 2(-3z)+az=0⇒-6z+az=0⇒(-6+a)z=0. Entonces: a=6 ó z=0 y como x=-3z x=0.
- En la tercera ecuación se tiene: y+3t=0⇒y=-3t ; sustituyendo en la 4ª ecuación queda: 2(-3t)+at=0⇒-6t+at=0⇒(-6+a)t=0. Entonces: a=6 ó t=0 y como y=-3t y=0.

De lo estudiado se sigue que o bien a=-6 ó x=y=z=t=0 (solución trivial). Por tanto a=6 para que el problema tenga soluciones distintas de la trivial. Sustituyendo este valor de a en el sistema obtenemos: $\begin{cases} x+3z=0 \\ 2x+6z=0 \\ y+3t=0 \\ 2y+6t=0 \end{cases}$ la 2ª ecuación es equivalente a la 1ª y la 4ª lo es a la tercera, en consecuencia podemos suprimirlas quedando el sistema $\begin{cases} x+3z=0 \\ y+3t=0 \end{cases}$, del que se deduce: x=-3z e y=-3t, entonces la matriz X es: $X=\begin{pmatrix} -3z & -3t \\ z & t \end{pmatrix}$

33. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $A.A^{-1}=I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ x+z=0 \\ 2y+t=0 \\ y+t=1 \end{cases}$ Resolviendo: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

34. Determinar el valor que ha de tener x para que valga 3 el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & x \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & x \end{pmatrix} \underset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & 12 & x-12 \end{pmatrix} \underset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & x-10 \end{pmatrix} \underset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-6 \end{pmatrix}$$

1: F2-2F1, F3-3F1, F4-4F1; 2: F3-F2, F4-F2; 3: F4-2F3

Para que el rango sea 3 la última fila debe hacerse cero por lo que x=6

35. a) $$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 5 \\ -3 & -3 & -9 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -16 & 13 \end{pmatrix} \underset{3}{=}$$

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -16 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$$ 1: F2-2F1, F3+3F1; 2: F4-2F2; 3: intercambio F4 y F3

b) $$Rg\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 1 \\ 0 & -15 & 1 \end{pmatrix} \underset{3}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$$

1: intercambio F1 y F2; 2 : F2-5F1, F3-2F1, F4-3F1, F5-4F1; 3: F4-F2, F5-F2

36. Discutir el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de los parámetros

a) Rg$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \underset{3}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$

1: intercambio F1 y F2; 2: F2-a.F1; F3-F1; 3: F3+F2

Miramos en donde se hace cero la última fila: 2-a-a^2=0$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$

Si a =1 las filas 2ª y ·3ª se hacen cero, luego el rango es 1; si a=-2 la última fila es cero luego el rango es 2. Por ello concluimos: si a=1 RgA=1; si a=-2 RgA=2; si a≠1 y a≠-2 RgA=3

$b)$ Rg$\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 2+a & 2-a \end{pmatrix} \underset{3}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & 4-2a \end{pmatrix}$

1: intercambio F3 y F1 ; 2: F2-2F1, F3-a.F1; 3: F3-F2

4-2a=0⇒a=2, para ese valor la última fila se anula y las restantes no, luego el rango es 2

Para a=-2 la matriz no esta escalonada, sustituimos por ese valor y escalonamos:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (F3+2F2). Por tanto para a=-2 el rango es 2

Concluimos: si a=2 RgA=2 si a=-2 RgA=2; si a≠2 y a≠-2 RgA=3

C) $Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -a^2+3 \\ a & 1 & 1 & -a^2+3 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a-1 & 1-a & -a^2+1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a^2-2a+3 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a-1 & 1-a & -a^2+1 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & -2a^2-2a+4 \end{pmatrix}$

1: F2-F1, F3-aF1; 2: F3+F2

$2-a^2-a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$; $-2a^2-2a+4=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$

Para a=1 y a=-2 se anula la última fila y debemos estudir el rango, en los demás valores el rango es 3. Sustituyendo por a=1 y a=-2 obtenemos:

si a=1 RgA=1, si a=-2 RgA=2, si a≠1 y a≠-2 RgA=3

d)$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & -2 & x \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1-x \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & x \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1: F3-F1; 2: intercambio columnas 2 y 3

Si x=1 la matriz no está escalonada, al sustituir por ese valor y escalonarla se anula la última fila. Por tanto:si x=1 RgA=2, si x≠1 RgA=3

e)$Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-m & -1-2m & m-2 \\ 0 & m-3 & -5 & m-2 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & -1-2m & 1-m \\ 0 & m-2 & -5 & m-3 \end{pmatrix} \underset{3}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & -1-2m & 1-m \\ 0 & 0 & -4+2m & 2m-4 \end{pmatrix}$

1: F2-mF1; F3-3F1; 2: Intercambio columnas 2 y 4; 3: F3-F2

$-4+2m=0 \Rightarrow m=2$; Para ese valor se anula la última fila. Para los demás valores no se anula ninguna.

Entonces: si m=2 RgA=2 si m≠2 RgA=3

F) $Rg\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a^2 \end{pmatrix} \underset{1}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1 \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a^2 \end{pmatrix} \underset{2}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1 \\ 0 & -a^2-2a & -a \\ 0 & -a & -a^2 \end{pmatrix} \underset{3}{=} Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & -a & -a^2-2a \\ 0 & -a^2 & -a \end{pmatrix} \underset{4}{=}$

$= Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & -a & -a^2-2a \\ 0 & 0 & -a^3-2a^2-a \end{pmatrix}$ 1: Intercambio F2 y F1; 2: F2-(1+a)F1, F3-F2; 3: Intercambio columnas 2 y 3; 4: F3+a.F2

$-a^3-2a^2-a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$ Para a =0 se anulan la 2ª y 3ª filas, para a=-1 solo la tercera.

Si a=0 RgA=1, si a=-1 RgA=2, si a≠0 y a≠-1 RgA=3

12. EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD DE MATRICES (con soluciones)

1. Dada la matriz A $=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar, según los valores del parámetro λ, el rango de la matriz $A.A^t-\lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2

b) Determina la matriz $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $A.A^t.X=6X$

Sol: a) $Rg(A.A^t-\lambda I)=1$ si $\lambda=0$ ó $\lambda=6$; $Rg(A.A^t-\lambda I)=1$ si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$

b) $X=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ $x \in R$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) determina según los valores del parámetro k el rango de las matrices A.B y B.A

b) para el valor k=0 determina las matrices X qie verifican $A.B.X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol: a) Rg(AB)=1 si k=-2; rg(A.B)=2 si k≠-2; Rg(B.A)=2 $\forall$ k∈R

b) $X=\begin{pmatrix} \lambda \\ -4\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in R$

3. a)Calcula todas las matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que su inversa sea A-2I, siendo y la matriz identidad de orden 2

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i) calcula su rango según los valores del parámetro m ii) Para el valor m=-1 calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol; a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) i) si m=-3 ò m=-1 Rg(M)=2; si m≠-3 y m≠-1 rg(M)=3

ii) X= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in$R

4. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, según los valores del parámetro a, el rango de A. Calcula si existe la inversa de A para a=0

b) para a=0 calcula la matriz B que verifica A.B.A^{-1}-A=2I

c)Para a=1 calcula todas las matrices X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que AX= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol: a) para a=1 Rg(A)=2; para a≠1 Rg(A)=3

b) B=A+2I= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; c)X= $\begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in$R

5. a)Calcula los valores de a,b,c para que la matriz A= $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique (A-2I)^2 =0 siendo y la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

b) ¿Cuál es la solución del sistema homogéneo de 2 ecuaciones y 2 incógnitas que tiene por matriz de los coeficientes una de las matrices del apartado anterior?

c) Para a=b=c=2 Calcula la matriz X que verifica AX=B siendo B = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Sol: a) a=2, b∈R, c=2; b) dado que el determinante de la matriz A es distinto de 0, su rango es 2. En consecuencia rg(A)=rg(AM)=nº de incognitas, SCD y al ser un sistema homogéneo la única solución es la trivial (0,0); c) $\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$

6. a) Define menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada

b) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i) Calcula, según los valores del parámetro λ, el rango de la matriz A-λI, siendo y la matriz identidad de orden 3; ii) Calcula la matriz X que verifica: XA-2A=3X

Sol: a) teoría; b) i) para λ=0, λ=1 y λ=2 Rg(A-λI,)=2; para λ≠0, λ ≠1 y λ≠2Rg(A-λI,)=3

ii) X= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

7. a)Estudia, según los valores de m. El rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b)¿Coincide A con su inversa para algún valor de m?

c) Determina una matriz simétrica de orden 2 tal que X.$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y el determinante de 3X=-9

Sol: a) si m=1 o m=-1 Rg(A)=2; si m≠ 1 y m≠-1 Rg(A)=3; b) tendría que ocurrir que A.A=I

$A^2=\begin{pmatrix} m^2+4 & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$ como $m^2+4 \neq 1 \forall m \in R$ no existe ningún valor de m que cumpla lo pedido. c)X= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. Sea A=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Sea B^t la traspuesta de B e y la matriz identidad de orden 3

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de la matriz $A.B^t+\lambda I$

b) Calcula la matriz X que verifica $A\text{-}B^t\text{-}X\text{-}X=2B$

Sol: a) $Rg(A.B^t+\lambda I)=3$ si $\lambda \neq 0$, $Rg(A.B^t+\lambda I)=1$ si $\lambda = 0$

B) X=$\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. a) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2=4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M-2I)^2X=I$, siendo y la matriz identidad de orden 2

b)Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2=4B$. Si alguna es inversible calcula su inversa.

c) ¿Cuando se dice que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica las respuestas.

Sol: a) X=$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$; b) al resolver el sistema obtenemos como soluciones: y=0 x=$\begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$; x=2 $\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$ Por tanto las matrices que obtenemos son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. De ellas la única que es inversible es $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y su inversa es: $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ c) teoría de sistemas de ecuaciones)

10. a)Dada la matriz M=$\begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula los valores de m para que la matriz onversa de M sea $\frac{1}{4}$M

B) Dadas las matrices A(-1,0,1); B(3,0,1) y C(4,-2,0) Calcula la matriz X que verifica : $B^t.A.X+C^t=X$, siendo B^t y C^t las matrices traspuestas de B y C respectivamente.

Sol: a) m=-1, b) X=$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$

11. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) ¿qué relación existe entre su invers A^{-1} y su traspuesta A^t?; b) Estudia según los valores de λ el rango de $A-\lambda I$, siendo y la matriz identidad de orden 3.

Solución: a) $A^{-1}=A^t$; b) Si$\lambda = 1$ $Rg(A-\lambda I)=2$; Si $\lambda \neq 1$ $Rg(A-\lambda I)=3$

13. EJERCICIOS DE RECOPILACION DEL TEMA (con soluciones)

1. En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a los pacientes de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilenta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralenta	10	5	10	10	15

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Nº de días	3	7	5	12	20

Calcula, con ayuda del producto de matrices, las unidades de cada clase que le fue administrada a los pacientes.

Solución. La matriz de necesidades diarias es: $A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.

La matriz columna que expresa el número de días es: $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Para hallar el número de unidades de cada clase administradas a los pacientes calculemos:

$$A \bullet D = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 735 \\ 535 \end{pmatrix}.$$

2. En un hospital oncológico se aplica a un grupo de cuatro pacientes un tratamiento de quimioterapia mediante un protocolo CMF (C=ciclofosfamida, M=metrotexate, F=5-fluoracilo). Las cantidades diarias que necesita cada paciente de cada uno de los compuestos varían según la superficie total corporal, del siguiente modo:
Paciente 1: 1200 mg de C, 80 mg de M y 1200 mg de F.
Paciente 2: 900 mg de C, 60 mg de M y 950 mg de F.
Paciente 3: 1100 mg de C, 70 mg de M y 1000 mg de F.
Paciente 4: 1150 mg de C, 80 mg de M y 1100 mg de F.
Teniendo en cuenta que el tratamiento se va a aplicar durante tres semanas a los pacientes 1, 3 y 4 y dos semanas al paciente 2, hallar la matriz de necesidades diarias y las cantidades de cada compuesto necesarias para poder atender correctamente los tratamientos de los cuatro pacientes.

Solución. La matriz de necesidades diarias es

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4
Ciclofosfamida	1200	900	1100	1150
Metrotexate	80	60	70	80
5-fluoracilo	1200	950	1000	1100

$$A = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 1100 & 1150 \\ 80 & 60 & 70 & 80 \\ 1200 & 950 & 1000 & 1100 \end{pmatrix}$$

Si representamos por D el vector columna que expresa el número de días que cada paciente debe seguir el tratamiento, se tiene: $D = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix}$. Las necesidades totales de cada compuesto se obtienen multiplicando la matriz A por la D:

$$A \bullet D = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 1100 & 1150 \\ 80 & 60 & 70 & 80 \\ 1200 & 950 & 1000 & 1100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ 21 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85\,050 \\ 5\,670 \\ 82\,600 \end{pmatrix}$$

Así pues, se necesitan: 85.050 mg de ciclofosfamida, 5.670 de metrotexate y 82.600 mg de 5-fluoracilo.

3.. Escribe explícitamente la matriz cuyos términos son: $a_{ij} = (i-j-1)^3$, i,j=1,2,3.

Solución. $\begin{pmatrix} -1 & -8 & -27 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Determina a y b para que las siguientes matrices sean linealmente dependientes.

$A=\begin{pmatrix} 11 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.Solución. ($A=\lambda B+\delta C$, despejando a=139/21, b=41/21, estos valores no son los únicos válidos).

5. Halla la matriz X que cumpla X•A+B=C, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.Solución. $X = \begin{pmatrix} -5/4 & -1 & 7/2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Halla la matriz X que cumpla A•X•B+C=D, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Solución. $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Calcula A^n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A^3=A^2.A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$. Por inducción deducimos que $A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

8.Halla todas las matrices X que satisfacen la ecuación: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Solución</u>. $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall$a,b,c$\in R$.

9. Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

   a) Halla la matriz: $3 \bullet A^t \bullet A - 2 \bullet I_2$.

   b) Resuelve la siguiente igualdad matricial: $A \bullet X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   <u>Solución</u>. a) $\begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Halla todas las matrices X que cumplan: $X \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet X$. <u>Solución</u>. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\forall$a,b$\in R$.