TEMA III : SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición

Se llama ecuación lineal sobre el cuerpo de los números reales a toda expresión del tipo: $a_1x_1+a_2x_2+.......+a_nx_n=b$ en la que los números a_i (coeficientes) y b (término independiente) son números reales conocidos y los x_i (incógnitas o variables) son indeterminados.

Ejemplo: $2x+3y-2z=4$

Definición

Dada la ecuación lineal $a_1x_1+a_2x_2+.......+a_nx_n=b$ llamaremos solución de dicha ecuación a toda enepla de números reales $(s_1 , s_2 , ...,s_n) \in R^n$ tal que al tomar $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, ..., $x_n=s_n$ se satisface la igualdad, es decir $a_1s_1+a_2s_2+......+a_ns_n=b$

Por ejemplo: dada la ecuación x+y-z=0 las ternas (0,0,0), (1,1,2), (-1,1,0), etc son soluciones de dicha ecuación. La ecuación tiene infinitas soluciones de las que las ternas dadas son algunos ejemplos.

Las soluciones de una ecuación pueden obtenerse fácilmente, hay tres casos:

Caso 1: " alguno de los coeficientes es no nulo"

Se despeja la incónita con coeficiente no nulo en función de las demás

Ejemplo: $3x-y+z=5 \Rightarrow 3x=5+y-z \Rightarrow x=5/3+y/3-z/3$; para cada valor de y , z obtenemos un valor de x , estos tres valores forman una solución de la ecuación. Así para $y=1, z=1 \Rightarrow x=5/3$ con lo que (5/3,1,1) es una **solución particular** de la ecuación

Al conjunto de todas las soluciones de la ecuación se le llama solución general. En nuestro caso la solución general vendría dada por:

$$\begin{cases} x = 5/3 + 1/3\lambda - 1/3\beta \\ y = \lambda \\ z = \beta \end{cases}$$

Para cada valor de los parámetros λ y β se obtiene una solución particular

Caso 2

Todos los coeficientes $a_i=0$ y $b\neq 0$, entonces la ecuación es del tipo $0x_1+0x_2+....+0x_n=b\neq 0$

No hay ninguna enepla de números reales que verifique esto, por lo tanto la ecuación no tiene solución

Caso3

Todos los coeficientes $a_i=0$ y b=0 entonces la ecuación es del tipo $0x_1+0x_2+....+0x_n=0 \Rightarrow$ cualquier enepla de números reales es solución de la ecuación

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto finito de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+.......+a_{1n}x_n=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+.......+a_{2n}x_n=b_2$ Sistema de m ecuaciones y n incógnitas

....

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+.......+a_{mn}x_n=b_m$

Definición Una enepla $(s_1 , s_2 , ...,s_n) \in R^n$ es una solución del sistema si es solución de todas las ecuaciones lineales que lo componen, se suele llamar también solución particular. Al conjunto de todas las soluciones se le llama solución general o conjunto solución.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y+z \\ 3(1-y+z)-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y+z \\ -4y+4z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y+z \\ 4z=-1+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ z=\frac{-1}{4}+y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\lambda \\ z=-\frac{1}{4}+\lambda \end{cases}$$

Esta es la solución general del sistema, para cada valor de λ obtenemos una solución particular. Así, para λ=0 obtenemos la solución (3/4,0,-1/4);
para λ=1 obtenemos la solución (3/4,1,3/4) ; etc

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales se llama compatible si posee al menos una solución , en caso contrario se llama incompatible.
Ejemplo: El sistema obtenido en el ejemplo anterior es compatible.

El sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \end{cases}$ es incompatible ya que al solucionarlo obtenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ 2(1-y-z)+2y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ 2-2y-2z+2y+2z)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ 0=1 \end{cases}$$

Dado que la 2ª ecuación no tiene solución el sistema es incompatible.

<u>Notación matricial de un sistema</u>

Dado el sistema

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+.......+a_{1n}x_n=b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+.......+a_{2n}x_n=b_2$ Sistema de m ecuaciones y n incógnitas
....
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+.......+a_{mn}x_n=b_m$

Consideremos las matrices:

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$ X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$ El sistema puede escribirse como un producto de matrices $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$ o bien AX=B

En estas condiciones una enepla (s_1 ,s_2 ,......, s_n) será solución del sistema si al considerar la matriz $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ .. \\ s_n \end{pmatrix}$ se verifica AS=B

La matriz A recibe el nombre de matriz de los coeficientes o matriz del sistema
LLamaremos matriz ampliada a la matriz:

$$AM=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & .... & ... & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Si el sistema AX=B es cuadrado (mismo número de ecuaciones y de incógnitas) y $|A|\neq 0$ la matriz A tiene inversa y una de las formas de resolver el sistema sería tratarlo como una ecuación matricial. Es decir, $X=A^{-1}.B$.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Definición

Un sistema de ecuaciones se dice homogéneo si todos sus términos independientes son iguales a cero :AX=0

Proposición

Un sistema homogéneo es siempre compatible

Demostración

En efecto, la solución $(0,0,....,0)\in R^n$ es solución del sistema y en consecuencia este es compatible por tener al menos una solución.. Dicha solución se denomina solución trivial, cualquier solución distinta de esta se llamará solución distinta de cero o no trivial.

Proposición

Dado el sistema homogéneo AX=0 Si $(s_1 , s_2 , ...,s_n)$ es solución del sistema también $\lambda(s_1 , s_2 , ...,s_n)$ es solución del sistema

En consecuencia, si un sistema homogéneo tiene alguna solución distinta de la trivial tendría infinitas soluciones.

Es decir, un sistema homógeneo puede tener solución única (la trivial), y se llamará determinado, o tener infinitas soluciones, le llamaremos indeterminado

Ejemplo 1: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ 2(-y-z)-3y+z=0 \\ -y-z-4y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ -5y-z=0 \\ -5y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$ SCD

Ejemplo 2: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-5y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z \\ 2(-y+z)-3y+z=0 \\ 5(-y+z)-5y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z \\ -5y+3z=0 \\ -10y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-y+\frac{5y}{3} \\ z=\frac{5y}{3} \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2y}{3} \\ z=\frac{5y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2/3\lambda \\ y=\lambda \\ z=5/3\lambda \end{cases}$ SCI

Definición

Dado un sistema de ecuaciones lineales, llamaremos sistema homogéneo asociado, al sistema que se obtiene a partir del dado, sustitiyendo todos los términos independientes por ceros Ej:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x+y=0 \\ -3x+y=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y=0 \\ -3x+y=0 \end{cases}$$

Sistema original Sistema homogéneo asociado

NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA

Consideremos el sistema $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$ y su sistema hogéneo asociado $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

Vamos a resolver ambos sistemas e intentar deducir alguna relación entre sus respectivas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2y-z \\ 3(2y-z)+y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2y-z \\ 7y-2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2y-z \\ z=\frac{7}{2}y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\frac{3}{2}y \\ z=\frac{7}{2}y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{7}{2}\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+z=4 \\ 3x+y+z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4+2y-z \\ 3(4+2y-z)+y+z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4+2y-z \\ 7y-2z=-11 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4+2y-z \\ z=\frac{11}{2}+\frac{7}{2}y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y \\ z=\frac{11}{2}+\frac{7}{2}y \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{11}{2}+\frac{7}{2}\lambda \end{array}\right.$$

Si en la solución general hacemos λ=0 obtenmos la solución particular (-3/2,0,-11/2), si a esa solución particular le sumamos las soluciones de su sistema homogéneo asociado obtenemos, como puede observarse, la solución general.
Esta relación entre las soluciones de un sistema y las de su homogéneo asociado queda descrita en el siguiente teorema

Teorema
Dado un sistema de ecuaciones lineales, AX=B compatible, el conjunto de soluciones del sistema puede obtenerse sumando a una solución particular todas las soluciones de su sistema homogéneo asociado AX=0.

NOTA:
Como habíamos visto antes, un sistema homogéneo unicamente puede tener solución única o infinitas soluciones. Por ello teniendo en cuenta el teorema anterior, cualquier sistema compatible tendrá también una sola o infinitas soluciones dependiendo de como sea su homogéneo asociado.
Es decir: un sistema compatible tendrá:
a) solución única si el sistema homogéneo asociado tiene como única solución la trivial
b) infinitas soluciones si el homogéneo asociado tiene alguna solución distinta de cero.

Definición
Un sistema compatible se dice determinado si tiene solución única e indeterminado si tiene infinitas soluciones.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

De acuerdo con sus soluciones un sistema puede clasificarse según el siguiente esquema:

$$\text{Sistemas}\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{c}\text{Compatibles}\\ \text{(con solución)}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{Determinados (solución única)}\\ \text{Indeterminados (infinitas soluciones)}\end{array}\right. \\ \begin{array}{c}\text{Incompatibles}\\ \text{(sin solución)}\end{array} \end{array}\right.$$

Ejemplo: Clasificar el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x-y=1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x-y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x-1+x+z=2 \\ y=1+x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} z=3-2x \\ y=-1+x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=3-2\lambda \end{array}\right.$$

El sistema es compatible indeterminado.(infinitas soluciones) Para cada valor de λ se obtiene una solución.

La terna (0,-1,3) constituye una solución particular y $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.

<u>SISTEMAS EQUIVALENTES</u>

<u>Definición</u>

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución, es decir si toda solución de uno es solución del otro y recíprocamente

-La cuestión de equivalencia de sistemas es muy importante, pues para hallar las soluciones de un sistema se suele sustituir este por otro equivalente y más fácil de resolver.

-Se obtienen sistemas equivalentes a uno dado de las siguientes formas:

a) si se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en las restantes (es la base del método de sustitución)
b) si se sustituye una ecuación por una combinación lineal de ella con otras del sistema (es la base del método de reducción). Obsérvese que la simple multiplicación de una ecuación por un número distinto de cero es ya una combinación lineal y de aquí que una ecuación pueda multiplicarse por un número distinto de cero, resultando un sistema equvalente
c) si se añade o se suprime una ecuación que sea combinación lineal de las demás. En particular si una ecuación es de la forma $0x_1+0x_2+....+0x_n=0$ puede suprimirse. Este método permite eliminar ecuaciones superfluas
d) si se intercambia el orden de las ecuaciones o de las incógnitas

<u>MÉTODO DE GAUSS</u>

Dado un sistema de ecuaciones con n incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga n incógnitas, la segunda n-1, la tecera n-2 y así sucesivamente hasta llegar a la última .

Una vez realizado este proceso se resuelve la última ecuación y por sustitución regresiva se van resolviendo las restantes (penúltima, antepenúltima y así sucesivamente hasta la primera)

Ejemplo 1

$\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{cases}$ En primer lugar eliminamos x en las ecuaciones E_2, E_3, y E_4 mediante las operaciones E_2-E_1 ; E_3-E_1 ; E_4+E_1 con lo que obtenemos $\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ -2y+2z \quad =10 \\ 2z-2t=14 \\ 2y+2t=-12 \end{cases}$ A continuación eliminamos y en E_4 haciendo E_4+E_2 y queda $\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ -2y+2z=10 \\ 2z-2t=14 \\ 2z+2t=-2 \end{cases}$ Por último eliminamos z de la ecuación E_4 restándole E_3 $\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ -2y+2z=10 \\ 2z-2t=14 \\ 4t=-16 \end{cases}$

Hemos obtenido así un sistema escalonado equivalente al inicial. Por sucesivas sustituciones se van obteniendo los valores de las incógnitas: De la 4ª ecuación t=-4; sustituyendo t en la 3ª, z=3 ; llevando el valor de z a la 2ª, y=-2 y por último sustituyendo t, z e y en la 1ª, x=1

De igual forma se procedería si el sistema fuese indeterminado, sólo que en este caso la última ecuación tendría más de una incógnita y la solución se obtendría dando los valores de una incógnitas en función de los de las otras.
Una forma más cómoda de utilizar el método de Gauss es mediante la matriz ampliada del sistema , haciendo en ella ceros escalonados.
En el ejemplo anterior la matriz ampliada y las operaciones que realizamos con ella son:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -16 \end{array}\right)$$

La última fila de la matriz obtenida equivale a la ecuación 4t=-16 , la anterior a la ecuación 2z-2t=14 y así sucesivamente.

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+2z=4 \\ 5x-3y+5z=7 \end{cases} ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 10 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

(1) La última fila puede suprimirse al ser todos sus coeficientes y el término independiente iguales a cero. Queda por lo tanto el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y=-1/4+5/4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5/4-1/4z \\ y=-1/4+5/4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5/4-1/4\lambda \\ y=-1/4+5/4\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{SCI}$$

Ejemplo 3

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x-y+2z=5 \\ 2y-4z=3 \end{cases} ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ La última fila significa:

0x+0y+0z=4 lo que es imposible, por lo tanto el sistema es incompatible.

Ejemplo 4: Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores del parámetro m

$$\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases} ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m \end{array}\right)$$

Si m=1 la tercera ecuación quedaría 0x+0y+0z=1, por lo que el sistema es incompatible

Si m=0 la matriz no está escalonada. Al escalonarla la última ecuación puede suprimirse al quedar 0=0: $:\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Por lo que el sistema es indeterminado y al resolverlo obtenemos: $\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-y \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$

Si m≠0 y m≠1 el sistema es compatible determinado. Vamos a resolverlo para estos casos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ my+z=0 \\ (m-1)z=m \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1+y \\ y=-z/m \\ z=\frac{m}{m-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-y \\ y=\frac{-1}{m-1} \\ z=\frac{m}{m-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\frac{m}{m-1} \\ y=\frac{-1}{m-1} \\ z=\frac{m}{m-1} \end{array}\right.$$

Ejemplo 5: Discutir y resolver el siguiente sistema en función de los valores del parámetro k

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k+1 \end{array}\right. ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

Si k=1 el sistema es incompatible al ser la última ecuación 0=1

Para k≠1 el sistema es compatible determinado. Vamos a resolverlo para esos valores:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+kz=1 \\ -y+(1-k^2)z=0 \\ (1-k)z=k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-y-kz \\ y=(1-k^2)z \\ z=\frac{k}{1-k} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-y-kz \\ y=\frac{(1-k^2)k}{(1-k)} \\ z=\frac{k}{1-k} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\frac{k^3-k^2-2k+1}{1-k} \\ y=(1+k)k \\ z=\frac{k}{1-k} \end{array}\right.$$

<u>TEOREMA DE ROUCHÉ- FRÖBENIUS</u>

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si se verifica que el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. Supuesto que esto ocurre, el sistema será determinado si el rango es igual al número de incógnitas e indeterminado en caso contrario.

Si rg (A) = rg (AM) = nº incógnitas el sistema es compatible determinado
Si rg (A) = rg (AM) < nº incógnitas el sistema es compatible indeterminado
Si rg (A) ≠rg (AM) el sistema es incompatible

NOTA: El teorema de Rouché nos da un método para discutir un sistema pero no para resolverlo. Sin embargo, El método de Gauss sirve para resolver y discutir el sistema al mismo tiempo.

Ejemplo 1: Discutir el sistema $\left\{\begin{array}{c} 2x+3y+z=4 \\ x-2y+z=-2 \\ 8x+5y+5z=1 \end{array}\right.$

Debemos estudiar el rango de la matriz A del sistema y de la matriz Ampliada AM

A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y lo orlamos $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto RgA=2

AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$ Dado que AM contiene a la matriz A podemos partir del mismo menor que, en este caso podría orlarse de dos formas distintas. La primera forma coincide con la realizada en A y ya sabemos que da cero. Procedemos a orlarlo de la segunda manera posible:

s $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Por lo que RgAM=3. En consecuencia RgA≠ RgAM⇒ Sistema Incompatible

Ejemplo 2: Discutir el sistema $\left\{\begin{array}{c} 3x+2y-z=1 \\ 4x+y+z=5 \\ -2x-3y+3z=3 \end{array}\right.$

AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$ Partimos del menorr $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos de la única forma posible en A: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto RgA=2. Orlamos ahora el menor de la otra forma en que es posible en la AM: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ En consecuencia RgAM=2

Por lo tanto RgA=RgAM=2<nº incógnitas⇒ Sstema compatible indeterminado.

Ejemplo 3: Discutir el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ -3x+y+2z=-5 \end{array}\right.$; AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right)$ Partimos del menor

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$Lo orlamos de la única forma posible en A: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ Esto quiere decir que RgA=3, por lo tanto RgAM también ha de ser 3 ya que no puede ser mayor al no tener más que tres filas. En consecuencia: RgA=RgAM=3=nº incógnitas ⇒ S.C.D.

Ejemplo 4: Discutir el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{array}\right.$ según los distintos valores del parámetro m.

AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{array}\right)$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1$ y lo orlamos de la única forma posible en A $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ Para m=0 ó m=1 de m RgA=2, para los restantes valores de m RgA=3 y por lo tanto también lo es RgAM

Orlamos el menor de partida de la otra forma posible en la matriz AM

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ m+1 & m & m+1 \end{vmatrix} = m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$ En consecia para m=0 RgAM=2

Resumiendo: si m=1 RgA=2 y RgAM=3 S.I.

Si m=0 RgA=RgAM=2<nº incógnitas. S.C.I.

Si m≠ 0 y m≠1 RgA=RgAM=3=nº incógnitas. S.C.D.

REGLA DE CRAMER

Consideremos el sistema AX=B de n ecuaciones lineales y n incógnitas.

El sistema es compatible determinado $\Leftrightarrow$ | A | $\neq$0 y en este caso la solución del sistema viene dada por $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$; $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$;..........; $x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ Siendo A_i la matriz que se obtiene al reemplazar la columna i de la matriz A por la columna de términos independientes.

A este tipo de sistemas se les conoce con el nombre de sistemas de Cramer

NOTAS:

∨La regla no nos dice nada sobre la compatibilidad del sistema en el caso de que | A | =0

∨La regla sólo nos habla de sistemas del mismo número de ecuaciones que de incógnitas

Ejemplo1 : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 2; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{-1}{3}$

$$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{2}{3}$$

NOTA

La regla de Cramer puede también aplicarse a sistemas compatibles determinados con más ecuaciones que incógnitas después de eliminar las ecuaciones superfluas

Ejemplo2 :

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-5y=4 \\ 4x+6y=10 \end{cases} ; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -13 \neq 0; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg(A)=rg(AM)=2}$$

Eliminamos la última ecuación dado que es dependiente de las demás y aplicamos Cramer al sistema resultante

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-5y=4 \end{cases} ; x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{-13} = \dfrac{37}{13} ; \; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-13} = \dfrac{-3}{13}$$

NOTA

En el caso de sistemas indeterminados, una vez eliminadas las ecuaciones superfluas y trasladando a los términos independientes las incógnitas que no intervienen en el rango, puede utilizarse Cramer para obtener el valor de las otras incógnitas en función de estas.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 4x+y+z=5 \\ 7x+3y \quad =6 \end{cases} \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg(A)=2;}$$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rg(AM)=2 El sistema es por lo tanto compatible indeterminado

La última ecuación es dependiente de las otras dos por lo que la eliminamos y fijándonos en el menor de orden 2 ≠0 vemos que la incógnita que no interviene en dicho menor es la z. Trasladamos dicha incógnita a la columna de términos independientes, obteniendo:

$$\begin{cases} 3x+2y=1+z \\ 4x+y=5-z \end{cases} \; ; \; x=\frac{\begin{vmatrix} 1+az & 2 \\ 5-z & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9+3z}{-5} \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 4 & 5-z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{11-7z}{-5}$$

Solución$\begin{cases} x=\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\lambda \\ y=\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Ejemplo 4.

Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a, resolverlo para todos los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x-y=2 \\ ax+y+2z=0 \\ x-y+az=1 \end{cases}$

La matriz ampliada as AM=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Partimos del menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que el rango mínimo que puede tener la matriz A es 2

Lo orlamos de la única forma posible en A: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$=$a^2$+a=0⇒ $\begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$

Lo orlamos ahora de la otra forma posible en la matriz AM $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}$=2a+2=0⇒a=-1

Por lo tanto:

Si a=0 rgA=2 y rgAM=3 SI
Si a=-1 rgA=rgAM=2 SCI
Si a≠0 y a≠ -1 rgA=rgAm=3 SCD

Pasamos ahora a resolver el sistema y hemos de hacerlo por separado en los casos determinados e indeterminados

Para a=-1 rgA=rgAM=2 SCI. Sustituyendo a por ese valor el sistema queda $\begin{cases} x-y=2 \\ -x+y+2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ Como el rango es 2 debemos eliminar la ecuación supérflua (eliminamos la tercera porque es la que no intervino en el rango). Por tanto el sistema queda: $\begin{cases} x-y=2 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$ Resolvíendolo tenemos la solución general: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1 \end{cases}$

Para a≠0 y a≠ -1 rgA=rgAm=3 SCD (se trata de infinitos sistemas, uno por cada valor de a, que tienen todos ellos solución única. Es evidente que por tanto la solución deberá quedar también en función del parámetro a). Al ser sistemas compatibles determinados los resolvemos utilizando la regla de Cramer. Así

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a+2}{a^2+a}=\frac{2}{a}; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2a^2+2}{a^2+a}=\frac{-2(a-1)}{a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a-1}{a^2+a}=\frac{-1}{a}$$

EJERCICIOS (soluciones al finalizar los enunciados)

CUESTIONES

1.-Dado el sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 6x-4y+z=4 \end{cases}$

a)Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea incompatible

b)Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea compatible indeterminado

c)Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea compatible determinado

Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso

2.-¿Puede un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tener exactamente dos soluciones? ¿ Y uno de tres ecuaciones con tres incógnitas? ¿Puede un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas tener solución única? .

3.-Razonar sin resolverlo si el siguiente sistema de ecuaciones es incompatible, determinado o indeterminado $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=4 \end{cases}$

4.-Si en un sistema de ecuaciones lineales hay tantas ecuaciones como incógnitas entonces es determinado. ¿ Es cierta esta afirmación?

5.-Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas ¿ Es necesariamente incompatible?

6.-Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más incógnitas que ecuaciones ¿ Es necesariamente compatible?

7.- ¿ Qué se puede decir de un sistema de ecuaciones lineales compatible si tiene más incógnitas que ecuaciones?

8.-Sin resolver clasifica el siguiente sistema $\left\{\begin{array}{c} 2x+y=4 \\ x+z=4 \\ 3x+y+z=8 \end{array}\right.$

9.-En un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas los coeficientes y el término independiente de la primera ecuación son proporcionales a los correspondientes de la segunda ¿ Cómo es el sistema?

10-En un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas, los coeficientes de la primera ecuación son proporcionales a los correspondientes de la segunda, pero no los términos independientes ¿ Cómo es el sistema?

11.-Comentar la siguiente afirmación: “ Dos sistemas de ecuaciones equivalentes tienen siempre el mismo número de ecuaciones y de incógnitas”

12.-Si a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, incompatible, le agregamos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que sea compatible determinado? ¿ e indeterminado? Justifica la respuesta

13.-Si a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas compatible indeterminado, le agregamos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que sea compatible determinado? ¿y que siga siendo indeterminado? ¿ E incompatible? Justifica la respuesta

14.-El determinante de un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas es igual a cero. ¿ Puede ser el sistema incompatible? ¿ y compatible determinado?

15.-Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a dos, ¿ puede ser compatible el sistema? ¿ Puede ser compatible y determinado? ¿ Puede ser incompatible?. Razona las respuestas a poder ser con ejemplos concretos

16.-Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas ¿ puede ser compatible determinado? En caso afirmativo poner un ejemplo

17.-El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1 ¿ Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada?

18.-Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es homogéneo y el rango de la matriz de los coeficientes es 2. Si se interpretan las ecuaciones como rectas ¿ tienen algún punto común?. Razona la respuesta.

19.- Sean S y S’ dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que difieren únicamente en los términos independientes. Si S tiene infinitas soluciones ¿ Puede S’ tener solución única? ¿Puede S’ ser incompatible?. Razona las respuestas

20. Obtener la condición para que la suma de dos soluciones de un sistema sea tambien solución del mismo. ¿ Es condición necesaria y suficiente?

21.-Sea S un sistema de m ecuaciones y n incógnitas compatible y determinado. Sea S' el sistema que se obtiene a partir de S eliminando una de sus ecuaciones. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. ¿Puede ocurrir que $m < n$
b. ¿Puede ser S' equivalente a S?
c. ¿Puede ser S' incompatible?
d. Si $m = n$ y S' es compatible ¿Es S' determinado o indeterminado?
e. La misma cuestión del apartado anterior pero siendo $m > n$

22. En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de los coeficientes es igual a cero. ¿Puede ser compatible? ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?
23. El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a tres ¿Qué puedes decir de su solución? Razona la respuesta.
24. Si A y C son matrices inversas y |A|=4 ¿Cuánto vale |C|? ¿Qué puedes decir del sistema de ecuaciones lineales AX=B ?
25. Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas AX=B y AX=B' tienen una misma matriz de los coeficientes A, ¿puede ser incompatible uno de los sistemas si el otro es compatible determinado? ¿y si el otro es compatible indeterminado?

<u>EJERCICIOS</u>

1.- Discutir y resolver cuando sea posible, por el método de Gauss, los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{c} 2x-y-z=1 \\ x+y-2z=4 \\ x-y+z=-8 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{c} x+y+2z=1 \\ x-y-z=4 \\ 5x-y+z=14 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ 3x+y+z=-1 \\ -5x-3z=3 \\ 7x+4y+z=3 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{c} x+y-z=2 \\ mx+y+z=1 \\ x-y+3z=1 \\ 4x+2y=m \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{c} x-3y+4z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ 4x-5y+5z=0 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{c} bx+y+z=1 \\ x+by+z=b \\ x+y+bz=b^2 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=1 \\ x+ky+kz+kt=1 \\ x+ky+2z+4t=1 \\ x+ky+2z+3t=2 \end{array}\right.$

2.- Hállese la relación entre a y b de forma que sea compatible el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+2y=a \\ 3x-y=a-b \\ x-y=4 \end{array}\right.$

3.-Dado el sistema $\left\{\begin{array}{c} (m^2-1)x+(m+1)^2y=m+1 \\ (m+1)x+(m-1)y=m+1 \end{array}\right.$ Discutirlo para los distintos valores de m y resolverlo en los casos de compatibilidad.

4.-Discutir según los valores del parámetro el sistema: $\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ y+z=0 \\ x+(1+t)y+tz=t+1 \end{array}\right.$

5.- Discutir según los valores de los parámetros los siguientes sistemas y resolverlos cuando sea posible: a) $\left\{\begin{array}{c} 3x-ay+3z=4 \\ ax+y-z=2 \\ x-y+z=1 \\ ax+4y-z=5 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{c} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x+y+az=0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{c} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{c} ax+2z=0 \\ ay-z=0 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=2a \\ x+y+(1+a)z=0 \end{array}\right.$

i) $\left\{\begin{array}{c} 11x+7y+17z=0 \\ x-y+mz=0 \\ 2x+my-z=0 \end{array}\right.$ j) $\left\{\begin{array}{c} ax+y-z=1 \\ x-ay+z=4 \\ x+y+az=b \end{array}\right.$

6.- Estudia para que valores de k se puede aplicar la regla de Cramer a los sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{c} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+y+kz=7 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{c} x+3y+2z=-2 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+kz=-1 \end{array}\right.$. Resuélvelos por dicho método en todos los casos posibles.

7.-Estudiar y resolver, según los valores de m, el sistema homogéneo: $\left\{\begin{array}{c} 2x-my+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ mx-y+13z=0 \end{array}\right.$.

8.-Resuelve, utilizando la regla de Cramer, el sistema: $\left\{\begin{array}{c} x-12y-3z-3t=5 \\ 2x-y+z+t=2 \\ x+3y+z-t=1 \end{array}\right.$

9. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{c} mx+y+z=0 \\ x-my-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right.$. Resuélvelo en los casos de compatibilidad

10. Sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m-1 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales, discutelo, por el método de Gauss, para los distintos valore del parámetro m**.**

SOLUCIONES:
Cuestiones:

1. a) Basta añadir una ecuación en la que los coeficientes de las incógnitas sean combinación lineal de las 2 ecuaciones que tenemos y que en la que el término indeendiente no siga la misma proporcionalidad. Ejemplo: 9x-6y+2z=1
   b) Basta añadir una ecuación que sea C.L. De las otras dos. Ejemplo: 6x-4y+2z=10
   c) Habría que añadir una ecuación que fuese linalmente independiente con las otras dos. Ejemplo: 3x+y-5z=1
   Geométricamente tenemos 2 planos que se cortan en una recta r. En el apartado a añadimos un plano que corta a los otros dos en rectas distintas: s y t (por lo que los tres planos no tienen puntos en común), en el caso b añadimos un tercer plano que corta a los otros dos en la misma recta r (por lo que todos los puntos de r son comunes a los tres planos), en el caso c añadimos un plano que corta a los otros dos en un mismo punto (dicho punto es la única solución común a los tres).
2. A) No, los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener 1 solución, infinitas o no tener solución.
   B) La msma contestación. C) No. Si teiene 2 ecuaciones el RgA puede valer 1 o 2, en cualquier caso menor que el número de incógnitas. Por tanto, será SCI si rgA=rgAM y SI si rgA<RgAM
3. El sistema es incompatible al ser RgA=1 y RgAM=2

4. No. Solo sería determinado si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al número de incógnitas y el hecho de que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas no garantiza que el RgA también coincida.
5. Falso, aunque el número de ecuaciones sea mayor que el número de incógnitas el RgA puede ser igual al RgAM. Ejemplo: $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+2y=1 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$ La tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos.
6. Falso, puede ser RgA<RgAM . Ejemplo: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=1 \end{cases}$ RgA=1 y RgAM=2
7. Que es indeterminado ya que RgA=RgAM (por ser compatible), menor que el número de incógnitas al serlo el número de ecuaciones.
8. SCI RgA=RgAM=2<nº incógnitas. Al ser la tercera ecuación combinación lineal de las otras dos: $3^{era}=1^{era}+2^{a}$
9. SCI ya que RGA=RgAM=1<nº incógnitas
10. S.I: RgA=1 y RgAM=2
11. La afirmación es falsa ya que obtenemos un sistema equivalente si añadimos una ecuación que sea combinación lineal de las demás, por lo que dos sistemas equivalentes pueden tener un número diferente de ecuaciones. La afirmación en cambio si es cierta en lo que se refiere al número de incógnitas; dos sistemas equivalentes tienen las mismas soluciones y por tanto, si las soluciones de una de ellos pertenecen a R^n, entonces las soluciones del segundo también pertenecen a R^n, lo que es eqivalente a decir que ambos tienen n incógnitas.
12. Que el sistema de partida sea incompatible significa que no hay ninguna solución que satisfaga a la vez las dos ecuaciones del sistema, por lo tanto no podemos lograr que esas dos ecuaciones tengan una solución común al añadir nuevas ecuaciones. En consecuencia el nuevo sistema seguirá siendo incompatible, no puede ser compatible determinado ni indeterminado.
13. Nos están diciendo que RgA=RgAM=1. Si agregamos una ecuación linealmente independiente de las demás el sistema sería compatible determinado. Si la ecuación que añadimos es combinación lineal de las otras dos el sistema seguría siendo indeterminado. Por último, si añadimos una ecuación cuyos coeficientes son combinación lineal de los coeficientes de las otras dos y cuyo término independiente no sigue la misma proporcionalidad el nuevo sistema sería incompatible. Así pues podemos conseguir cualquiera de las tres condiciones que nos pide el enunciado.
14. |A|=0⇒ RgA<nº de incógnitas. Por lo tanto, el sistema será SCI si el RgAm=RgA y S.I: si RgAM>RgA, pero no puede ser compatible determinado.
15. Si, siempre que RgA=RgAM=2, Ejemplo: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+3z=4 \end{cases}$ El sistema no puede ser SCD al ser RgA<nº de incógnitas. Puede ser compatible indeterminado como el del ejemplo o incompatible si RgA=2 y RgAM=3 Ejemplo: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$
16. Verdadero si RgA=RgAM=2. Es decir, si una de sus ecuaciones es combinación lineal de las demás. Ejemplo $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 6x+2y-z=3 \\ 7x+y+z=4 \end{cases}$

17. Como máximo puede ser rgAM=2. La diferencia entre los rangos de A y AM puede ser como máximo de 1 unidad ya que la matriz AM se obtiene a partir de A al añadirle 1 única columna.
18. Si el sistema es homogéneo rgA=RgAM, como nos dicen que ese rango es 2=nº de incógnitas el sistema es determinado, es decir tiene solución única. Pero sabemos que una de las soluciones del cualquier sistema homogéneo es la solución trivial. Por tanto en este caso esa es la única solución que tiene el sistema.
Si se interpretan las ecuaciones como rectas en el plano, dichas rectas se cortarán en el origen de coordenadas.
19. Si S y S' se diferencian únicamente en los términos independientes, la matriz A de ambos sistemas es la misma y dado que nos dicen que S es indeterminado $\Rightarrow$el RgA=1. Entonces, en S' puede ocurrir: RgA=RgAM=1 SCI o bien RgA=1 y RgAM=2 SI. S' sin embargo no puede ser determinado porque para ello debería ocurrir que RgA=2, lo que sabemos que no es cierto.
20. Sea el sistema AX=B y sean S_1 y S_2 soluciones de dicho Sistema. $\underset{(1)}{\Rightarrow}\left\{\begin{array}{l} AS_1=B \\ AS_2=B \end{array}\right.$ Nos piden que estudiemos la condición para que S_1+S_2 sea también solución del sistema.
S_1+S_2 es solución del sistema$\Leftrightarrow A(S_1+S_2)=B\Leftrightarrow AS_1+AS_2=B\underset{2}{\Leftrightarrow}B+B=B\Leftrightarrow 2B=B\Leftrightarrow B=0\Leftrightarrow$ el sistema es hogéneo.
(2) Tenemos en cuenta en esa equivalencia que S_1 y S_2 cumplen la expresión (1)
21. Dado que S es SCD y tiene m ecuaciones y n incógnitas se sigue que en S RgA=RgAM=n
    a) ¿puede ser m<n? No ya que el rgA=n
    b) ¿Pueden ser S y S' sistemas equivalentes? Si, siempre que el sistema tuviese mayor número de ecuaciones que de incógnitas y la ecuación que hemos eliminado fuese combinación lineal de las demás. Es decir, si hemos elimnado una ecuación supérflua.
    c) ¿Puede ser S' incompatible? No. Al ser S compatible hay al menos 1 solución que satisface al mismo tiempo a todas las ecuaciones de S y, por lo tanto, esa solución satisface también las ecuaciones de S' que están todas ellas contenidas en las de S.
    d) Si m=n y S' es compatible es S determinado o indeterminado? Indeterminado. Sabemos que, al ser S un SCD, rgA=rgAM=n, si el número de ecuaciones también es igual a n todas ellas son linealmente independientes. Por tanto, al eliminar una de las ecuaciones para obtener S' en el nuevo sistema se verificará RgA=RgAM=n-1<nº de incógnitas.
    e) si m>n S' podría ser SCD , si la que eliminamos era una ecuación combinación lineal de las demás, o SCI si eliminamos una linealmente independiente del resto.
22. $|A|=0\Rightarrow$ RgA<nº de incógnitas, por lo tanto puede ser un sistema compatible o incompatible, dependiendo del RgAm, pero no puede ser determinado. No es un sistema de Cramer al ser $|A|=0$
23. Todo sistema homogéneo es compatible ya que en él RgA=RgAM. Si RgA=3=nº incognitas el sistema es compatible determinado.
24. $|A|=4$ y A y C inversas$\Rightarrow A.C=I\Rightarrow|A.C|=|A|.|C|=1\Rightarrow 4.|C|=1\Rightarrow|C|=1/4$
Dado que nos dicen que A es inversible $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$ Por lo tanto el sistema es SCD
25. Los sistemas tienen una misma matriz A, si uno de ellos es SCD$\Rightarrow$ RgA=4 y por lo tanto el otro sistema tiene que ser necesariamente compatible determinado, al ser RgA=nº incógnitas. Sin embargo, si uno de los sistemas es SCI querra decir que RgA<4 y, en consecuencia, la matriz ampliada del otro sistema puede tener un Rg mayor que el de A .

EJERCICIOS

$$1a)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -y = 5 \Rightarrow y = -5 \\ 3z - 2y = -12 \Rightarrow z = -22/3 \\ x - 2z + y = 4 \Rightarrow x = -17/3 \end{array} \right.$$ SCD Solución (-17/3,-5,-22/3)

$$b)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2y - 3z = 3 \Rightarrow y = -3/2 - 3/2z \\ x + y + 2z = 1 \Rightarrow x = 5/2 - 1/2z \end{array} \right.$$ B)SCI

Conjunto solución $\left\{ \begin{array}{r} x = 5/2 - 1/2\lambda \\ y = -3/2 - 3/2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

$$c)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & -3 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 10 & -8 & 8 \\ 0 & -10 & 8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$ SI la última ecuación 0x+0y+0z=4 no tiene ninguna solución

$$d)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 1+m & 1-2m \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & m-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 1+m & 1-2m \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

Si $m \neq 7$ el sistema es incompatible al serlo la última ecuación.
Para m=7 el sistema no esta escalonado, procedemos a escalonarlo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & -13 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -4z = -10 \Rightarrow z = 10/4 = 5/2 \\ -2y + 4z = -1 \Rightarrow y = 11/2 \\ x + y - z = 2 \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$ SCD solución (-1,11/2,5/2)

e) El sistema es homogéneo y por lo tanto es compatible. Tenemos únicamente que decidir si es determinado o indeterminado y hallar su solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y=0 \Rightarrow y=0 \\ -11z+5y=0 \Rightarrow z=0 \\ x+4z-3y=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad \text{SCD Solución } (0,0,0)$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 1 & b & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & b-1 & 1-b & b-b^2 \\ 0 & 1-b & 1-b^2 & 1-b^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & b-1 & 1-b & b-b^2 \\ 0 & 0 & 2-b-b^2 & 1-b^3-b^2+b \end{array}\right)$

$2-b-b^2=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-2 \end{cases}$; $1-b^3-b^2+b=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=-1 \end{cases}$. En consecuencia:

Si b=-2 el sistema es incompatible por quedar la última ecuación 0=-13

Si b=1 el sistema es compatible indeterminado, las filas 2ª y 3ª se anulan y la primera queda:

$x+y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda-\beta \\ y=\lambda \\ z=\beta \end{cases}$ sería la solución del sistema.

Si $b\neq 1$ y $b\neq -2$, el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución por sustitución regresiva y una vez simplificada queda: $\begin{cases} x=\dfrac{-b-1}{b+2} \\ y=\dfrac{1}{b+2} \\ z=\dfrac{b^2+2b+1}{b+2} \end{cases}$

g) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k & k & 1 \\ 1 & k & 2 & 4 & 1 \\ 1 & k & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 4-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 3-k & 1 \end{array}\right) \sim$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 4-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ si k=1 la 2ª fila se anula y el sistema es SCI. Sustituimos en la matriz para hallar la solución: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ z+3t=0 \Rightarrow z=3 \\ x+y+z+t=1 \Rightarrow x=-1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \\ t=-1 \end{cases}$

Si k=2 las últimas 2 filas no están escalonadas. Al sustituir y escalonar obtenemos:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Sistema incompatible

Si $k\neq 1$ y $k\neq 2$ el sistema es compatible determinado. Resolviendo por sustitución regresiva se obtiene la siguiente solución en función de k: $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{-2}{2-k} \\ z=\dfrac{4-k}{2-k} \\ t=-1 \end{cases}$

2- AM=$\left(\left\{\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & a-b \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right.\right)$ El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ por lo que RgA=2 pues ese menor no puede orlarse dentro de la matriz A. El menor si puede orlarse dentro de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & a-b \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ =-28+a-3b=0 ya que para que el sistema sea compatible el RgAM tiene que ser tambíen igual a 2.$\Rightarrow$ a=28+3b para que el sistema sea compatible.

3.$\left(\begin{array}{cc|c} m^2-1 & (m+1)^2 & m+1 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{array}\right)$ Dado que todos los menores de orden 1 dependen de m partimos de uno cualquiera de ellos, por ejemplo del menor m+1 que solo se anula para m=-1

Orlamos el menor de la única forma posible en la mtriz A $\begin{vmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{vmatrix} = -4m^2-4m=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$ Por tanto si m=0 ó m=-1 RgA=1 (en ambos casos hay algún menor de orden 1$\neq 0$

Si m$\neq 0$ y m$\neq$-1 RgA=2$\Rightarrow$RgAM=2

Orlamos el menor de la otra forma posible dentro de la matriz AM:

$\begin{vmatrix} m^2-1 & m+1 \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix} = m^3-3m-2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m=2 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Por tanto: si m=0 RgA=1, RgAM=2 S.I.

Si m=-1 RgA=RgAM=1. S.C.I

Si m$\neq$0 y m$\neq$-1 RgA=RgAm=2 S.C.D

Vamos a resolver el sistema en los casos de compatibilidad:

Para m=-1 el sistema queda $\left\{\begin{array}{c} 0x+0y+0z=0 \\ -2y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \end{array}\right.$

Para m$\neq$0 y m$\neq$-1 el sistema es $\left\{\begin{array}{c} (m^2-1)x+(m+1)^2y=m+1 \\ (m+1)x+(m-1)y=m+1 \end{array}\right.$ Resolviéndolo por Cramer y simplificando se obtiene:

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} m+1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{vmatrix}}{-4m^2-4m} \dfrac{-m^3-2m^2-3m-2}{-4m^2-4m} = \dfrac{m^2+m+2}{4m}$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} m^2-1 & m+1 \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{-4m^2-4m} = \dfrac{m^3-3m-2}{-4m^2-4m} = = \dfrac{-m^2+m+2}{4m}$

4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right)$ Partimos del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos en A $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+t & t \end{vmatrix} = 0 \forall t \in R$

Lo orlamos de la otra forma posible en la matriz AM: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t+1 \end{vmatrix} = t = 0$

En consecuencia, para t=0 RgA=2=RgAm<nº incógnitas S.C.I.;

para t$\neq$0 RgA=2 y RgAM=3 S.I.

5. NOTA: como no nos piden que discutamos o resolvamos los sistemas por ningún método específico utilizaremos lo que resulta más cómodo, esto es: el método de Gauss para aquellos sistemas en que la matriz Ampliada sea de orden 4x4 y Rouché para discutirlos cuando el orden de la matriz sea menor que ese resolviéndolos por Cramer cuando sea posible.

a)AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & -1-a & 2-a \\ 0 & -a+3 & 0 & 1 \\ 0 & 4+a & -1-a & 5-a \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 2-a \\ 0 & 0 & -a+3 & 1 \\ 0 & -1-a & 4+a & 5-a \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 2-a \\ 0 & 0 & -a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \end{array} \underset{(2)}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 2-a \\ 0 & 0 & -a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a+3 & 1 \end{array}\right) \end{array} \sim\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1+a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right) \end{array}$$

(1) Intercambiamos la 2ª y 3ª columnas
(2) Dividimos la tercera ecuación por 3
Por tanto si a $\neq 2$ el sistema es incompatible al serlo la 4ª ecuación.
Si a=2 El sistema es compatible determinado.

Hallamos su solución. Para a=2 el sistema escalonado es: $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ -3y+3z=0 \\ z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$

b) AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a^2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 1-a & a^2-a \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 3a-6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1+a & 1-a & a^2-a \\ 0 & 5 & -5 & 3a-6 \end{array}\right) \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1+a & 1-a & a^2-a \\ 0 & 5 & -5 & 3a-6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3+a & a^2+1 \\ 0 & 0 & 5 & 3a-1 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 15+5a & 5a^2+5 \\ 0 & 0 & 15+5a & 3a^2+8a-3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 15+5a & 5a^2+5 \\ 0 & 0 & 0 & -2a^2+8a-8 \end{array}\right)$$

(1) multiplicamos la tercera fila por 5 y la 4ª por (3+a)
El sistema solo puede ser compatible si el término indepndiente de la 4ª ecuación se hace cero, ya que en esa ecuación se hacen cero los coeficientes de todas las incógnitas.
$-2a^2+8a-8=0 \Rightarrow a=2$ Por tanto: si a $\neq$2 el sistema es incompatible; si a=2 el sistema es compatible determinado. Vamos a resolverlo para este valor de a. El sistema escalonado es:

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ y-2z=-1 \\ 25z=25 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

c) El sistema es homogéneo y, por lo tanto, compatible para cualquier valor de a. Estudiamos el RgA para discutir si es determinado o indeterminado.

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = -5a-10=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow$

Si a=-2 RgA=RgAm=2. S.C.I.
Si a $\neq$-2 RgA=RgAM=3 S.C.D. En este caso, al ser homogéneo, la única solución es (0,0,0)

Vamos a resolverlo para a=-2. En primer lugar eliminamos la tercera ecuación, por ser la que no interviene en el menor que nos ha dado el rango, y pasamos la incógnita z para el lugar de los términos independientes (al ser la incógnita que no pertenece a ese menor).

El sistema queda: $\left\{\begin{array}{l} x+2y=-z \\ 2x-y=3z \end{array}\right|$ Resolviendolo se obtiene la solución general: $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right|$

d)AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -11 & 9 & a \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos en A $\begin{vmatrix} 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$RgA=2$\forall$a$\in$R

Lo orlamos de la otra forma posible en la matriz AM $\begin{vmatrix} 5 & -11 & a \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -8+2a=0 \Rightarrow a=4$

En consecuencia, si a=4 RgA=RgAm=2. S.C.I. Si a $\neq$4 RgA=2 y RgAm =3. S.I.

Lo resolvemos para a=4. En primer lugar eliminamos la 3ª ecuación, por ser la que no interviene en el Rango, y pasamos la incógnita z para el miembro de los términos independientes (incógnita que no pertenece al menor que nos ha dado el rango). El sistema queda: $\left\{\begin{array}{l} 5x-11y=4-9z \\ x-3y=2-5z \end{array}\right.$ Resolviendo se obtiene la solución general: $\left\{\begin{array}{l} x=-5/2+7\lambda \\ y=-3/2+4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$

e)AM= $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos en la matriz A $\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2+a=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$

Si a=0 ´0 a=-1 RgA =2

Si a$\neq$0 y a$\neq$-1 RgA=3$\Rightarrow$ RgAM=3

Orlamos el menor de la otra forma posible dentro de la AM: $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5a=0 \Rightarrow a=0$

Por tanto, si a=0 RgA=RgAM= S.C.I.

Si a=-1 RgA=2 y RgAM=3 S.I.

Si a$\neq$0 y a$\neq$-1 RgA=RgAM=3 S.C.D.

Lo resolvemos para a=0. Primero debemos eliminar la primera ecuación, que es la que no interviene en el rango, y pasar la incógnita "y" para el miembro de los términos independientes, al ser la incógnita que no interviene en el menor que nos ha dado el rango. El sistema queda: $\left\{\begin{array}{l} -z=0 \\ x+z=5-3y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$

Lo resolvemos ahora por Cramer para a$\neq$0 y a$\neq$-1. |A|=a^2+a (hecho antes)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{a^2+a} = \frac{-10a}{a^2+a} = \frac{-10}{a+1};\ y=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{a^2+a} = \frac{5a}{a^2+a} = \frac{5}{a+1};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{a^2+a} = \frac{5a^2}{a^2+a} = \frac{5a}{a+1}$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1+a & 0 \end{array}\right)$ En A no hay ningún menor de orden 2 que no dependa del parámetro.

Partimos del menor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix}$ y lo orlamos en la matriz A:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. Si a≠0 RgA=3=RgAM S.C.D.

Si a=0 debemos estudiar los rangos. Am=$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, por lo que RgA=1 y RgAM=2. S.I.

Lo resolvemos por Cramer para a≠0. |A|=a^2 (hecho antes)

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 1+a & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix}}{a^2} = \dfrac{-a^2+2a}{a^2} = \dfrac{-a+2}{a}$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 0 & 1+a \end{vmatrix}}{a^2} = \dfrac{2a^2-a}{a^2} = \dfrac{2a-1}{a}$;

z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{a^2} = \dfrac{-a}{a^2} = \dfrac{-1}{a}$

g) Sistema homogéneo por lo que es comptible. Estudiamos el rango de A para discutir si es determinado o indeterminado.

A=$\begin{pmatrix} 11 & 7 & 17 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & m & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos $\begin{vmatrix} 11 & 7 & 17 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & m & -1 \end{vmatrix} = -11m^2+31m+52 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -13/11 \end{cases}$

Si m≠4 y m≠-13/11 RgA=3. S.C.D. Al ser homogéneo la única solución es (0,0,0)

Si m=4 ó m=-13/11 RgA=2. S.C.I. Vamos a resolverlo en estos dos casos en función de m:

En primer lugar eliminamos la 3ª ecuación, que no interviene en el rango, y pasamos la incógnita z para el miembro de los términos independientes, al ser la incógnita que no interviene en el menor que nos ha dado el rango. El sistema queda:

$\begin{cases} 11x+7y=-17z \\ x-y=-mz \end{cases}$ Resolviendo $\begin{cases} x = \dfrac{-7m-17}{18}\lambda \\ y = \dfrac{11m-17}{18}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ Dando a m los valores m=4 y m=-13/11 obtenemos la solución general del sistema para dichos valores de m.

h) AM=$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right)$ En A no hay ningún menor de orden dos que no dependa de a.

Partimos del menor principal $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}$ Lo orlamos en A $\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^3-3a = 0 \Rightarrow a = 0$

Para a≠0 RgA=3⇒ RgAM=3.$\forall b \in R$ S.C.D.

Para a=0 RgA=2 ya que el menor principal es distinto de cero para ese valor de a. Orlamos este menor de la otra forma posible en la AM $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 4 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 5-b = 0 \Rightarrow b = 5$

Es decir Si a≠0 S.C.D. $\forall b \in R$

Si a=0 y b=5 RgA=RgAM=2 S.C.I.

Si a=0 y b≠5 RgA=2 y RgAM=3 S.I.

Lo resolvemos por Cramer para a≠0. |A|=-a^3-3a

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\4&-a&1\\b&1&a\end{vmatrix}}{-a^3-3a}=\frac{-a^2-ab-4a+b-5}{-a^3-3a}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}a&1&-1\\1&4&1\\1&b&a\end{vmatrix}}{-a^3-3a}=\frac{4a^2-ab-a-b+5}{-a^3-3a};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&4\\1&1&b\end{vmatrix}}{-a^3-3a}=\frac{-a^2b-3a-b+5}{-a^3-3a}$$

Resolvemos ahora para a=0 y b=5. El sistema es indeterminado de rango 2 y hemos partido del menor principal, por lo que en primer lugar eliminamos la tercera ecuación y pasamos la incógnita "z" para el segundo miembro. El sistema queda: $\begin{cases}y=1+z\\x=4-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-\lambda\\y=1+\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

6. a) AM=$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\2&-1&1&5\\3&1&k&7\end{array}\right)$; $\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0$ Lo orlamos en A $\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\3&1&k\end{vmatrix}=-5k=0\Rightarrow k=0$

Lo orlamos de la otra forma posible en la AM $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&5\\3&1&7\end{vmatrix}=-5\neq 0$

Por lo tanto si k=0 RgA=2 RgAM=3 S.I.

Si k≠0 RgA=RgAM=3 S.C.D. Lo resolvemos por Cramer para este caso. |A|=-5k

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-1\\5&-1&1\\7&1&k\end{vmatrix}}{-5k}=\frac{-11k+1}{-5k}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&5&1\\3&7&k\end{vmatrix}}{-5k}=\frac{3k-3}{-5k}\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&5\\3&1&7\end{vmatrix}}{-5k}=\frac{-5}{-5k}=\frac{1}{k}$$

b)AM=$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&-2\\2&1&-1&1\\3&-2&k&-1\end{array}\right)$; $\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$ Lo orlamos en A $\begin{vmatrix}1&3&2\\2&1&-1\\3&-2&k\end{vmatrix}=-5k-25=0\Rightarrow k=-5$

Lo orlamos de la otra forma posible en la AM $\begin{vmatrix}1&3&-2\\2&1&1\\3&-2&-1\end{vmatrix}=30\neq 0$

Por lo tanto si k=-5 RgA=2 RgAM=3 S.I.

Si k≠-5 RgA=RgAM=3 S.C.D. Lo resolvemos por Cramer para este caso. |A|=-5k-25

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2&3&2\\1&1&-1\\-1&-2&k\end{vmatrix}}{-5k-25}=\frac{-5k+5}{-5k-25}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&-2&2\\2&1&-1\\3&-1&k\end{vmatrix}}{-5k-25}=\frac{5k-5}{-5k-25}\ ;z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&-2\\2&1&1\\3&-2&-1\end{vmatrix}}{-5k-25}=\frac{30}{-5k-25}=$$

7. Al ser homogéneo el sistema es compatible. Estudiamos el rango de A para decidir si es determinado o indeterminado.

A=$\begin{pmatrix}2&-m&4\\1&1&7\\m&-1&13\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}1&7\\-1&13\end{vmatrix}\neq 0$ Lo orlmos $\begin{vmatrix}2&-m&4\\1&1&7\\m&-1&13\end{vmatrix}=-7m^2+9m+36=0\Rightarrow\begin{cases}m=3\\m=-12/7\end{cases}$

Si m≠3 y m≠-12/7 RgA=3. S.C.D. Su única solución es (0,0,0)

Si m=3 o m=-12/7 RgA=2 S.C.I. Lo resolvemos en función de m para estos dos valores.

En primer lugar eliminamos la primera ecuación y pasamos para el segundo miembro la incógnita "x" (véase el menor que nos ha dado el rango). El sistema queda $\begin{cases}y+7z=-x\\-y+13z=-mx\end{cases}$

Resolviéndolo tenemos: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{-13+7m}{20}\lambda \\ z=\dfrac{-1-m}{20}\lambda \end{cases}$ y dando a m los valores m=3 y m=-12/7 obtenemos la solución general del sistema para esos valores de m.

8. AM=$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -12 & -3 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ Lo orlamos $\begin{vmatrix} 1 & -12 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$ Por lo tanto, RgA=RgAM=3<nº incógnitas. SCI

La incógnita t no interviene en el rango, por tanto la pasamos al segundo miembro. El sistema queda: $\begin{cases} x-12y-3z=5+3t \\ 2x-y+z=2-t \\ x+3y+z=1+t \end{cases}$ Ahora podemos resolverlo por Cramer en función de t.

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 5+3t & -12 & -3 \\ 2-t & -1 & 1 \\ 1+t & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{29}{13}+\frac{30}{13}\lambda$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5+3t & -3 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 1 & 1+t & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{4}{13}+\frac{14}{13}\lambda$; z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -12 & 5+3t \\ 2 & -1 & 2-t \\ 1 & 3 & 1+t \end{vmatrix}}{-13} = -\frac{28}{13}-\frac{59}{13}\lambda$; t=$\lambda$

9. AM$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Partimos del menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Lo orlamos de la única forma posible en A $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2+3m-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$

Podemos garantizar por tanto que:
Si m=1 Rg(A)=2
Si m=2 Rg(A)=2
Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 2 Rg(A)=3 y, en consecuencia Rg(AM)=3

Orlamos ahora el menor de partida de la otra forma posible en la matriz AM:

$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2-m=0 \Rightarrow m=2$. Esto significa que para m=2 el Rg(AM) =2 (por ser cero los dos menores de orden tres estudiados), para m≠2 Rg(AM)=3

En consecuencia concluimos:
Si m=1 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI
Si m=2 Rg(A)=Rg(AM)=2. SCI
Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 2 Rg(A)=Rg(AM)=3. SCD

Nos piden ahora que lo resolvamos en los casos compatibles.
Lo hacemos primero para el caso indeterminado, m=2. Al haber 3 ecuaciones y ser el Rango 2, una de las ecuaciones es supérflua y podemos eliminarla, lo hacemos con la primera ecuación ya que es la que no pertenece al menor de orden 2 que determinó el rango.
Cogiendo las ecuaciones segunda y tercera, sustituyendo m por 2, y pasando para el término independiente la incógnita y, que tampoco intervino en el rango, obtenemos:

$\begin{cases} x-z=1+2y \\ 2x+z=-y \end{cases}$ Resolvemos por Cramer x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1+2y & -1 \\ -y & 1 \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{1+y}{3}$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2y \\ 2 & -y \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{-2-5y}{3}$

Solución del sistema: $\begin{cases} x=1/3+1/3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2/3-5/3\lambda \end{cases}$

Resolvemos ahora los casos determinados, esto es $\forall m\in R tq m\neq 1 y m\neq 2$ Aplicamos la regla de Cramer.

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2}=\dfrac{0}{-m^2+3m-2}=0$; y=$\dfrac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2}=\dfrac{m-2}{-m^2+3m-2}=\dfrac{m-2}{-(m-1)(m-2)}=\dfrac{-1}{m-1}$

z=$\dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-m^2+3m-2}=\dfrac{2-m}{-m^2+3m-2}=\dfrac{-(m-2)}{-(m-1)(m-2)}=\dfrac{1}{m-1}$

Solución: (0, $\dfrac{-1}{m-1},\dfrac{1}{m-1}$)

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m-1 \end{pmatrix} \underset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & m & m & m-2 \end{pmatrix} \underset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & m-2 \end{pmatrix}$ 1: Fila3-Fila1; 2:Fila3-Fila2

Una vez escalonada la matriz procedemos a discutir el sistema para los distintos valores de m. Si analizamos la última fila, observamos que para m=1 la última ecuazión quedaría: 0x+0y+0z=-1, por lo tanto para m=1 el sistema es incompatible. (Podríamos haberlo pensado utilizando el teorema de Rouché: la última fila de A es (0,0,0) y, por tanto el rg(A)=2, la última de la matriz AM es (0,0,0,-1), esta matriz tiene por tanto 3 filas que son vectores escalonados y, en consecuencia, Rg(AM)=3 S.I.)
Analizamos ahora la 2ª fila; si m=0 la 2ª y 3ª filas no están escalonadas, tenemos que ver entonces que ocurre con las matrices A y AM para dicho valor. Sustituimos por m=0 y obtenemos que la matriz quedaría:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 3. Fila3+Fila2

Como vemos la última fila sería 0x+0y+0z=-2, por tanto el sistema es incompatible para m=0
En consecuencia concluimos:

Si m=1 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI

Si m=0 Rg(A)=2 y Rg(AM)=3. SI

Si m $\neq$ 1 y m $\neq$ 0 Rg(A)=Rg(AM)=3. SCD