ESPACIOS VECTORIALES

CONCEPTO DE OPERACIÓN. OPERACIÓN INTERNA Y EXTERNA

LLamamos operación a toda aplicación que asocia a pares de elementos del mismo o distinto conjunto un único elemento del mismo o de otro conjunto.

Así por ejemplo, la suma de números naturales da por resultado otro número natural y, por tanto es una aplicación $+: N \times N \longrightarrow N$

$$(a,b) \longrightarrow a+b$$

(Obsérvese que en este caso interviene un único conjunto numérico, diremos que la suma es una operación interna en N)

La resta de números naturales da por resultado un número entero, no necesariamente natural, por tanto la resta es una aplicación $-: N \times N \longrightarrow Z$

$$(a,b) \longrightarrow a-b$$

(En este caso intervienen 2 conjuntos: N y Z. Diremos que la resta es una operación externa en N)

La multiplicación de un vector por un número real da por resultado otro vector, por tanto el producto de un vector por un escalar es una aplicación $\cdot: R \times V \longrightarrow V$

$$(\lambda, v) \longrightarrow \lambda.v$$

(El producto por escalares es también una operación externa en el conjunto de los vectores)

Cuando en la operación interviene un único conjunto se llama operación o ley de composición interna, en caso contrario operación o ley de composición externa.

DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

Sea V un conjunto en el que se han definido dos operaciones, una interna a la que llamaremos suma $+: V \times V \longrightarrow V$

$$(x,y) \longrightarrow x+y$$

y otra externa $\cdot: R \times V \longrightarrow V$ a la que llamaremos producto por escalares

$$(\lambda, v) \longrightarrow \lambda.v$$

Diremos que V con la suma y el poducto por escalares, $(V,+, \cdot_R)$ constituye un espacio vectorial si se cumplen las ocho siguientes propiedades

PROPIEDADES DE LA SUMA

1. Asociativa $\forall x,y,z \in V$ (x+y)+z=x+(y+z)
2. Existencia del elemento neutro. Existe un elemento de V al que denotaremos por 0 tal que

$\forall x \in V$ x+0=0+x=x

3. Todo elemento de V tiene opuesto. $\forall x \in V, \exists -x \in V$ tal que $x+(-x)=0$

4. Conmutativa $\forall x, y \in V$ x+y=y+x

(Por cumplir estas propiedade decimos que V con la suma, (V+) constituye un grupo conmutativo)

PROPIEDADES DEL PRODUCTO POR ESCALARES

5.Distributiva respecto a la suma en V. $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in R$ λ(x+y)=λx+λy

6. Distributiva respecto a la suma en R $\forall x \in V; \forall \lambda, \beta \in R, (\lambda+\beta).x = \lambda x + \beta x$

7. pseudoasociativa $\forall x \in V$, $\forall \lambda, \mu \in R$ $(\lambda\mu)$x=$\lambda(\mu$.x)

8.$\forall x \in V$ 1.x=x

Si V es un espacio vectorial a los elementos de V se les llama vectores.

Hay muchos conjuntos matemáticos en los que podemos definir la suma y el producto de sus elementos por números reales y que cumplen estas propiedades, por lo que constituyen un espacio vectorial. Por ejemplo, de entre los objetos manejados en cursos anteriores constituyen espacios vectoriales los polinomios, las funciones, los números complejos, los vectores libres (segmentos orientados que sirven para representar magnitudes vectoriales, en contraposición con las magnitudes escalares representadas por números). Otros ejemplos de espacios vectoriales que manejaremos mucho en el presente curso son: R^2 (pares ordenados de números reales cuya representación geométrica vendría dada por el plano), R^3, (ternas ordenadas de números reales cuya representación geométrica sería el espacio) y, en general, R^n (n-plas ordenadas de números reales que no tiene una representación geométrica en el espacio tridimensional en el que vivimos pero tienen gran importancia en muchas áreas de las ciencias para representar conjuntos de datos).

Dependencia e independencia lineal. Bases.Dimensión

Definición

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una familia de vectores de V, diremos que el vector x $\in$V es combinación lineal de dicha familia si $\exists$ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ tal que

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

Proposición

El vector cero es combinación lineal de cualquier familia de vectores

En efecto $0 = 0v_1 + ov_2 + ... + 0v_n$

Definición

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una familia de vectores de V, diremos que dicha familia es linealmente independiente si la única forma de obtener el vector cero como combinación lineal de ella es con todos los escalares iguales a cero. Es decir:

$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

En caso contrario (es decir si hay más formas que esa de escribir el cero) diremos que los vectores son linealmente dependientes

Teorema

$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son L.D. $\Leftrightarrow$ alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás

Definición

Sea V un espacio vectorial decimos que una familia $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ constituye un sistema generador de V si $\forall x \in V$ x se puede escribir como combinación lineal de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Definición

Sea V un espacio vectorial decimos que una familia $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ es una base de V si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son sistema generador de V y linealmente independientes

Ejemplo: los vectores {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} constituyen una base de R^3 que llamamos base canónica

Definición

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V , dado que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son un sistema generador de V, se verificará que $\forall x \in V$ x se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base ; es decir $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ tales que:

$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. A $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ se les llama coordenadas de x en función de la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Teorema

Las coordenadas de un vector en función de una base son únicas

Demostración

Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de un espacio vectorial V y supongamos que un vector $x \in V$ se puede escribir de dos formas distintas en función de dicha base. Esto significará que:

$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$ y $x = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$; restando miembro a miembro las dos expresiones anteriores obtenemos: $0 = (\lambda_1 - \beta_1) v_1 + (\lambda_2 - \beta_2) v_2 + ... + (\lambda_n - \beta_n) v_n$ y como $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ son linealmente independientes se sigue que $(\lambda_1 - \beta_1) = (\lambda_2 - \beta_2) = .. = (\lambda_n - \beta_n) = 0$ luego $\lambda_1 = \beta_1$; $\lambda_2 = \beta_2$;... ..; $\lambda_n = \beta_n$; de lo que se deduce que la expresión del vector x en función de la base es única

Proposición

Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos

Definición

LLamamos dimensión de un espacio vectorial al número de elementos que tiene una cualquiera de sus bases

Ejemplo: R^3 será un espacio de dimensión 3 dado que sus bases tienen tres elementos

Otros proposiciones que tienen relación con la dimensión de un espacio vectorial son las siguientes:

1: En un espacio de dimensión n cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes constituyen una base

2: En un espacio vectorial de dimensión n cualquier conjunto de n vectores que sea sistema generador es base

3: en un espacio de dimensión n , n+1 vectores cualesquiera son linealmente dependientes

De las proposiciones 1 y 2 se sigue que una base de un E.V. es un conjunto minimal de generadores y un conjunto maximal de vectores independientes

DEFINICIÓN

Sea $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\} \subset V$ una familia de vectores del espacio vectorial V y B una base. Consideremos las coordenadas de cada uno de los vectores en función de la base B, diremos que dicha familia está escalonada si el número de ceros que precede al primer elemento no nulo en cada uno de los vectores es mayor que el del vector anterior. O bien si el número de ceros que siguen al último elemento no nulo en cada uno de los vectores es mayor que en el vector anterior

Ejemplos:

La familia {(1,2,-1,3), (0,2,-1,4),(0,0,3,2),(0,0,01)}$\in R^4$ es una familia escalonada.

La familia {(1,2,-1,3), (2,-1,4,0), (3,2,0,0), (6,0,0,0)}$\in R^4$ es una familia escalonada

Teorema

Si una familia de vectores está escalonada y no contiene al vector nulo es linealmente independiente.

Comprobémoslo con el ejemplo anterior

Intentamos poner el cero como C.L. de los elementos de la familia

$(0,0,0,0)=\lambda(1,2,-1,3)+\beta(0,2,-1,4)+\gamma(0,0,3,2)+\alpha(0,0,0,1)=(\lambda,2\lambda+2\beta,-\lambda-\beta+3\gamma,3\lambda+4\beta+2\gamma+\alpha)$

De quí deducimos que $\left\{\begin{array}{c} \lambda=0 \\ 2\lambda+2\beta=0 \\ -\lambda-\beta+3\gamma=0 \\ 3\lambda+4\beta+2\gamma+\alpha=0 \end{array}\right.$ Resolviendo el sistema por sustitución se sigue que $\lambda=\beta=\gamma=\alpha=0$ Por tanto los vectores son L.I.

Igual procedimiento se utilizaría para demostrarlo con una familia genérica cualquiera

Rango de una familia de vectores

Definición:

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\} \subset V$ una familia de vectores de V, llamamos rango de dicha familia al número máximo de vectores linealmente independientes que contiene.

Transformaciones de vectores que mantienen constante el rango

Las siguientes transformaciones en una familia de vectores mantienen la relación de dependencia e independencia entre ellos, y en consecuencia mantiene el rango de la familia

1. Si intercambiamos el orden de los vectores el rango no varía
2. Si multiplicamos uno de los vectores por un número distinto de cero el rango no varía
3. Si sumamos a uno de los vectores un múltiplo de otro el rango no varia.

4. Si una familia de vectores contiene el vector cero su rango es el mismo que el de la familia que se obtiene al eliminar dicho vector. (Es evidente ya que el vector cero es L.D. de cualquier familia de vectores)

Las familias obtenidas, a partir de una dada, utilizando alguna o varias de las transformaciones anteriores se dice que son equivalentes a la de partida.

Calculo del rango

Un método usual para calcular el rango de una familia de vectores consiste en encontrar, mediante la aplicación de las transformaciones del epígrafe anterior, una familia equivalente que sea escalonada y en la que ninguno de sus vectores sea nulo. El rango de la familia de partida será el mismo que el de la familia escalonada obtenida. Esta forma de cálculo del rango se conoce con el nombre de método de Gauss

Ejemplos

1. Dados los vectores $\{(3,2,1);(1,5,0);(4,7,1);(9,19,2)\}$ Halla su rango

SOLUCIÓN

a) Escalonamos los vectores con el fin de saber cuantos hay L.I.

(3,2,1)		(1,5,0)		(1,5,0)		(1,5,0)		(1,5,0)
(1,5,0)	~	(3,2,1)	~	(0,-13,1)	~	(0,-13,1)	~	(0,-13,1) Rango=2
(4,7,1)	(1)	(4,7,1)	(2)	(0,-13,1)	(3)	(0, 0, 0)	(4)	
(9,19,2)		(9,19,2)		(0,-26,2)		(0, 0, 0)		

(1) Cambiamos el 1º vector por el 2º

(2) 2º vector-3veces 1º, 3º vector-4 veces 1º, 4º vector-9 veces el 1º

(3) 3º vector-2º vector, 4º vector- 2veces 2º vector

(4) Eliminamos los vectores que se hacen cero

2. Estudiar el rango de los vectores $\{(1,1,1);(1,a,1);(1,1,a^2)\}$ para los distintos valores de a

SOLUCIÓN

Debemos saber cuántos vectores hay linealmente independientes según los diferentes valores de a. Para ello escalonamos los vectores

(1,1,1)		(1,1,1)
(1,a,1)	~	(0,a-1,0)
$(1,1,a^2)$		$(0,0,a^2-1)$

El segundo vector se anula para a=1 y el tercero para a= 1 y para a= -1 así pues:

Si a = 1 el rango es 1 (por anularse los vectores segundo y tercero)

Si a= -1 el rango es 2 (por anularse sólo el tercer vector)

Si a $\neq$1 y a $\neq$- 1 el rango es 3 (los tres vectores son L.I.)

3. -Dados los vectores a(1,1,0,m); b(3,-1,n,-1); c(-3,5,m,-4) Estudia su rango según los valores de m y n

SOLUCIÓN

(1,1,0,m) (1, 1, 0, m) (1, 1, 0, m)

(3,-1,n,-1) ~ (0,-4,n,-1-3m) ~ (0,-4, n, -1-3m)

(-3,5,m,-4) (0, 8,m,-4+3m) (0, 0,m+2n,-6-3m); los dos primeros son independientes por estar escalonados, luego para que los vectores sean dependientes ha de ocurrir que se anule el tercer vector, esto es -6-3m=0 y m+2n=0 , resolviendo: m= -2, n=1. Es decir

Si m= -2 y n=1 el rango es 2

Si m≠--2 o bien n≠1 el rango es 3

4. Estudiar, por el método de Gauss, el rango de la siguiente familia de vectores para los distintos valores de a : {(1,a,1,1);(1,1,a,a);(a,1,1,1)}

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{lcccc} (1,a,1,1) & & (1,a,1,1) & & (1,a,1,1) \\ (1,1,a,a) & \backsim & (0,\ 1-a,\ a-1,\ a-1) & \backsim & (0,1-a,a-1,a-1) \\ (a,1,1,1) & & (0,\ 1-a^2,1-a,1-a) & & (0,\ 0,\ 2-a-a^2,\ 2\text{-}a-a^2) \end{array}$$

En la primera equivalencia restamos al segundo vector el primero y al tercer vector el primero multiplicado pora; en la segunda equivalencia restamos al tercer vector el segundo multiplicado por a+1 téngase en cuenta que (1-a)(1+a)=1-a^2

resolviendo la ecuación 2-a-a^2=0 da dos soluciones a=1 y a=-2

Para a=1 los dos últimos vectores se anulan luego el rango es 1

Para a=-2 se anula el tercero pero no los dos primeros luego el rango es 2

Para a≠ 1 y a≠ -2 el rango es 3

EJERCICIOS

1. Calcula el rango de los vectores {(1,t,-1,2),(2,-1,t,5),(4,-2,-6,10)} para los distintos valores de t

Sol: para t=-3 el rango es 2 para t≠-3 el rango es 3.

2. Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores según los valores del parámetro t: a) {(1,-1,0,2),(2,0,1,-2),(3,1,1,t)} b){(2,-2,0,0),(1,5,3,3),(1,1,t,1),(2,6,4,4)}

Sol: 2a) rg=3 $\forall t \in R$; 2b) si t=1 rg=2, si $t \neq 1$ rg=3

3. Calcula el rango de las siguientes familias de vectores para los distintos valores de m: a){(1,2,3);(1,-3,1);(2,1,m)} ; b){a,2,1),(1,2,3), (-1,3,2)}; c) {(2m,1,1),(2,m,1),(2,1,m)}; d) {(1,1,1,1),(3,0,0,-1);(1,m,m,1)}; e) {(1,m,1,-1),(0,1,m-1,0),(1,1,m,-1)}; f) {(0,-1,m,3),(0,m,-2-m,3),(m-2,-1,-2,3)}

Soluciones: a) si m=24/5 rg=2, si m≠24/5 rg=3

B) si a= -1 Rg=2; si a=≠ -1 Rg=3

C) si m=1 Rg=1; si m=-2 Rg=2; si m≠1 y m≠2 Rg=3

D) si m=1 Rg=2, si m≠1 Rg=3

E) si m=0 Rg=2, si m=1 Rg=2; si m≠0 y m≠1 Rg=3

F) si m=-1 Rg=2 si m≠-1 Rg=3