SOLUCIONES EJERCICIOS CONTINUIDAD

1. Demostrar:
   a. Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] tal que fa)>g(a) y f(b)<g(b) entonces sus gráficas se cortan.
   b. La función $y=3x^5-4x^2+3x+2$ tiene al menos una raiz real
   c. La ecuación cosx-2x+1=0 tiene al menos una solución real.

a) Consideremos la función h(x)=f(x)-g(x). La función h es continua en [a,b] por ser resta de funciones continuas, ademas h(a)=f(a)-g(a)>0 (al ser f(a)>que g(a)); h(b)=f(b)-g(b)<0, en consecuencia h cumple el teorema de Bolzano en [a,b]$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.q h(c)=0$\Rightarrow$f(c)-g(c)=0$\Rightarrow$ f(c)=g(c), por lo tanto en x=c las gráficas de f y g se cortan.

b) f(-1)=-8<0; f(0)=2>0; f es continua en el intervalo [-1,0] por ser una función polinómica, en consecuencia, aplicando el teorema de Bolzano $\exists c \in (-1,0)$ t.q f(c)=0 y por lo tanto tiene al menos 1 raíz real.

c) Consideremos la función y=cosx-2x+1 en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$;
$f(-\pi/2)=\pi+1>0$; $f(\pi/2)=-\pi+1<0$ f es continua en $[-\pi/2,\pi/2]$ por serlo en R luego, por el teorema de Bolzano $\exists c \in (-\pi/2, \pi/2)$ t.q f(c)=0 . El punto x=c es una solución de la ecuación de partida.

2. Indicar, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes funciones están acotadas en su dominio:

a) f:R------------>R
x------------> |x|

b) f:R----------->R
x------------>$\frac{1}{1+x^2}$

c) f: [-1,1]------------>R
x------------>$\frac{1}{2-x}$

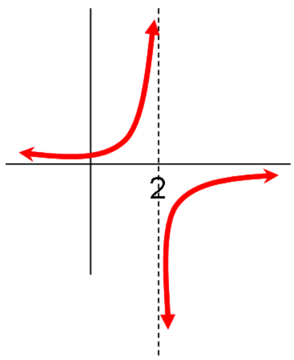
A) la función y=|x| está acotada inferiormente siendo m=0 una cota inferior, sin embargo no está acotada superiormente ya que $\lim_{x\to\infty}|x|=\infty$

B) La función y=$\frac{1}{1+x^2}$ está acotada en R. Veamos como podemos hallar alguna cota.

f(0)=1 y f(x)=$\frac{1}{1+x^2} < 1 \forall x \neq 0$ por lo que M=1 es una cota superior

F(x)=$\frac{1}{1+x^2} > 0$ $\forall$x$\in R$ por lo que m=0 es una cota inferior.

C) La función y=$\frac{1}{2-x}$ no está acotada ni superior ni inferiormente en R al ser x=2 una Asíntota vertical y $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty$; $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}=-\infty$. Sin embargo si está acotada en el intervalo [-1,1] . Si observamos su gráfica vemos que en dicho intervalo la función es creciente y, por lo tanto, f(-1)=1/3 es cota inferior y f(1)=1 es cota superior.



3.Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades:

a) y=3|x|+5=$\begin{cases} -3x+5 \text{ si x<0} \\ 3x+5 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ La función es continua en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ por estar definida en cada uno de ellos como una función polinómica. El único punto que podría tener problema es x=0. 5; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-3x+5)=5$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x+5)=5$; f(0)=5 Luego f es continua en R

b) y= $\begin{cases} x+2 \text{ si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} \text{ si } -1<x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; Las funciones y=x+2 e y=x^2 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(0,\infty)$ en los que están definidas. La función y=-1/x es continua en R-{0}, y por lo tanto lo es en el intervalo (-1,0). Así pues los únicos puntos en los que la función que nos dan puede tener problemas de continuidad es en x=-1 y en x=0

Continuidad en x=-1: ; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(x+2) = 1; \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}(-1/x) = 1;$ f(-1)$\nexists$. Por lo tanto la función presenta en x=-1 una discontinudad evitable.

Continuidad en x=0: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(-1/x) = \infty; \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$ Por lo tanto la función presenta en x=0 una discontinuidad asintótica. f es continua en R-{-1,0}

c) $y = \begin{cases} 4 \text{ si } x>0 \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ Tanto la función y=4 como y=3x-1 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(0,\infty)$ y $(-\infty,0)$ Debemos estudiar la continuidad en x=0: : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(3x-1) = -1; \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 4 = 4$ Luego f presenta en x=0 una discontinuidad de salto finito y es continua en R-{0}

d)$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x=0 \end{cases}$; La función y=1/x^2 es continua en R-{0}. Estudiamos la continuidad en x=0 de la función dada : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(1/x^2) = +\infty;$ f(0)=3 Luego f presenta en x=0 una discontinuidad asintótica y es continua en R-{0}

e) $y = \begin{cases} x+2 \text{ si } x<1 \\ 4x-1 \text{ si} x>1 \end{cases}$ Las 2 funciones que componen a f(x) son continuas en todo R por ser polinómicas, por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0,\infty)$. Así, el único punto problemático que presenta nuestra función es x=1:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x+2) = 3; \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(4x-1) = 3;$ f(1)$\nexists$ Entonces: en x=1 la función es discontinua evitable, en R-{1} f es continua.

f) $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ y=0 es continua en $(-\infty, 0)$ por serlo en R; y=x^2 es continua en $(0,\infty)$ por la misma razón. Estudiamos la continuidad en x=0 : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(0) = 0;$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$; f(0)=0$\Rightarrow$ f es continua en todo R

g) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ La función y=1/x es continua en $(-\infty, 1)$-{0}. La función y=$\frac{1}{x-2}$ es continua en $(1,\infty)$-{2}. Además en x=1 hay un cambio de función , por lo tanto tenemos que estudiar la función en esos 3 puntos.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(1/x) = \infty \Rightarrow$ f tiene en x=0 una discontinuidad asintótica

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}(\frac{1}{x-2}) = \infty \Rightarrow$ f presenta en x=2 una discontinuidad asintótica

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(1/x) = 1; \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(\frac{1}{x-2}) = -1 \Rightarrow$ En x=1 f es discontinua de salto finito. f es continua en R-{0,1,2} h)y=$\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si } x=2 \end{cases}$ La función y=$\frac{x^3-8}{x^2-4}$ es continua en R-{-2, 2} y por lo tanto f también lo es.

Continuidad en x=-2 $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{-16}{0} = \infty$ luego en x=-2 f es discontinua asintótica.

Continuidad en x=2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \infty$ Factorizamos los dos polinomios obteniendo: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$; $x^2-4=(x-2)(x+2)$. En consecuencia:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3$; f(2)=3. Por lo tanto f es continua en x=2

En resumen f es continua en R-{-2} y es discontinua asintótica en x=-2.

i) y=$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{|x|}{x} \text{ si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{-x}{x} \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x}{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ -1 \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases}$

La función y=$\frac{1}{x-3}$ es continua en $(-\infty,-3)$ por serlo en R-{3}, las funciones y=-1, y=1 e y=$\frac{x^2}{9}$ son continuas respectivamente en (-3,0) y (0,3) y (3,∞) por serlo en R. En consecuencia, los puntos problemáticos de nuestra función son x=0, x=-3 y x=3.

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} (\frac{1}{x-3}) = -1/6$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} -1 = -1$ Discontinua de salto finito en x=-3

$\lim\limits_{x\to -0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} (-1) = -1$; $\lim\limits_{x\to -0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -0^+} 1 = 1$ Discontinua de salto finito en x=0

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2}{9} = 1$; $f(3) = 1$ continua en x=3

La función es continua en R-{-3,0}

j) y=$\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ Hallamos el dominio de la función: $x^3+7x-8=0 \Rightarrow x=1$ luego D=R-{1}

; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3+7x-8} = \frac{0}{0}$ y factorizando: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3+7x-8} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+8)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)}{(x^2+x+8)} = \frac{2}{10}$;

f(1) no existe⇒ f es discontinua evitable en x=1 y continua en su dominio.

k)$y = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} \text{ si } x<0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } x>0 \end{cases}$ El único punto problemático de la función es x=0 ya que las funciones y=$\frac{e^x}{e^x+1}$ e y=$\frac{x^2+1}{2}$ son continuas en todo R.

$\lim\limits_{x\to -0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -0^-} (\frac{e^x}{e^x+1}) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to -0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -0^+} \frac{x^2+1}{2} = \frac{1}{2}$; f(0)∄ luego f presenta una discontinuidad evitable en x=0, siendo continua en R-{0}, es decir en s dominio.

4. Dar un ejemplo de una función tal que la imagen de un intervalo cerrado no sea un intervalo cerrado. ¿Puede esa función ser continua?. Razona la respuesta.

Contestaremos primero a la segunda cuestión, Del teorema de Weirstrass se sigue que si f es continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo y su máximo absolutos en dicho intervalo,

sean m y M; y del teorema de los valores intermedios para funciones continuas se sigue que f tiene que alcanzar todos los valores comprendidos entre m y M. En definitiva, la imagen de ese intervalo será el intervalo cerrado [m,M]. Por lo tanto, la función que nos piden no puede ser continua en el intervalo al que nos referimos.
Una vez visto esto, sabemos que hemos de buscar una función discontinua en un intervalo, por ejemplo: $y=\begin{cases} 6 \text{ si } -1 \le x \le 0 \\ 2 \text{ si } x<0 \le 1 \end{cases}$ la imagen del intervalo [-1,1] es el conjunto {2,6} que no es un intervalo.

5. Demostrar que la ecuación x=cosx tiene al menos una solución en el intervalo (0,1)
x=cosx⇔ x-cosx=0. Tomamos la función f(x)=x-cosx que es continua en [0,1]; f(0)=-cos0=-1, f(1)=1-cos1>0 (ya que cos1<1) Por lo tanto la función cumple en ese intervalo el teorema de Bolzano. Es decir $\exists c \in (0,1)$ t.q f(c)=0 dicho punto c es una solución de la ecuación de partida.

6. Demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene al menos una solución real.
Consideremos la función $f(x)=x^3+x^2-7x+1$; f(-1)=8>0; f(1)=-4<0; f es continua en [-1,1] al ser una función polinómica, por lo tanto cumple el teorema de Bolzano en ese intervalo. Es decir $\exists c \in (-1,1)$ t.q f(c)=0 dicho punto c es una solución de la ecuación de partida.

7. Dada la función f(x)=tg(x) , se verifica que $f(\pi/4)=1$ y $f(3\pi/4)=-1$, ¿garantiza eso que existe algún punto del intervalo $(\pi/4, 3\pi/4)$ en el que tg(x)=0?. Razona la respuesta
La función y=tgx no es continua en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ al ser discontinua de salto infinito en $x=\pi/2$ ($\lim_{x\to\pi/2} tgx = \lim_{x\to\pi/2} \frac{senx}{\cos x} = \frac{1}{0} = \infty$). Por lo tanto no cumple el teorema de Bolzano en dicho intervalo. En consecuencia, el hecho de que la imagen en los extremos sea de distinto signo no garantiza que la función tenga una raíz en el intervalo.

8. Demostrar que existe al menos un número real tal que senx=x-2
senx=x-2⇔ $senx - x + 2 = 0$. Consideremos la función f(x)=senx-x+2; f(0)=2>0;
$f(\pi)=sen\pi - \pi + 2 = -\pi + 2 < 0$; la función f es continua en el intervalo$[0,\pi]$ por serlo en R, por tanto cumple el teorema de Bolzano; es decir $\exists c \in (0,\pi)$ t.q f(c)=0 dicho punto c es una solución de la ecuación de partida.

9. Si y=f(x) es continua en [1,9], f(1)=-5 y f(9)>0, ¿podemos asegurar que g(x)=f(x)+3 corta al eje OX en el intervalo (1,9)?
Si f(x) es continua en el intervalo [1,9], g(x)=f(x)+3 también es continua en dicho intervalo por ser suma de funciones continuas. Por otra parte, g(1)=f(1)+3=-5+3=-2<0; g(9)=f(9)+3>0 al ser f(9)>0. En consecuencia g cumple el teorema de bolzano en el intervalo [1,9] y, por lo tanto, $\exists c \in (1,9)$ t.q g(c)=0, es decir g corta al eje OX en x=c

10. Si y=f(x) es una función definida en [a,b], continua en x=a y x=b y tal que f(a).f(b)<0 ¿podemos asegurar que existe un c perteneciente al intervalo(a,b) tal que f(c)=0, razona la respuesta.
No ya que el teorema de Bolzano exige la continuidad en el intervalo [a,b] y lo único que nos garantizan las hipótesis del problema es la continuidad en los extremos pero no en el interior del intervalo.

11. Verdadero o falso: a) Toda función acotada en R es continua en R; b) Toda función continua en R es acotada en R; c) Toda función continua en [a,b] está acotada en dicho intervalo

a) falso, una función discontinua puede estar acotada en R. Por ejemplo: $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ 3 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

La función es discontinua en x=0 al no coincidir los límites laterales en dicho punto, sin embargo la función está acotada en R, siendo m=1 una cota inferior y M=3 una superior.

b)Falso, consideremos por ejemplo la función $y=x^3$; $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ por lo tanto no está acotada superior ni inferiormente en R y, sin embargo, la función es continua en R por ser una función polinómica.

c) Verdadero. El teorema de acotación para funciones continuas garantiza que si f es continua en [a,b] f está acotada en dicho intervalo y el teorema de weirstrass garantiza además que f alcanza en dicho intervalo su mínimo y máximo absolutos.

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b

a) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si} x<-1 \\ ax+b \text{ si } -1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$; La función y=1/x es continua en $(-\infty,-1)$ al serlo en R-{0}; las funciones y=ax+b e y=2 son continuas en los intervalos en los que están definidas al serlo en R. Por tanto los únicos problemas de continuidad de esta función pueden estar en x=-1 y x=2.

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x} = -1$; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} (ax+b) = -a+b$; f(-1)=-a+b$\Rightarrow -a+b=-1$ para que f sea continua en x=-1

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} (ax+b) = 2a+b$;$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} 2 = 2$; f(2)=2$\Rightarrow 2a+b=2$ para que f sea continua en x=2. Entonces, para que f sea continua en R ha de verificarse:

$$\begin{cases} -a+b=-1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

b) $y=\begin{cases} a(x-2)^2 \text{ si } x \leq 0 \\ bx+1 \text{ si } 0<x<5 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$; Las funciones $y=a(x-2)^2$ e y=bx+1 son continuas en todo R para cualquier valor de a y b, al ser funciones polinómicas, en consecuencia lo son en el intervalo en el que están definidas. La función y=1/x es continua en $(5,\infty)$ por serlo en R-{0}. Hay que estudiar entonces únicamente la continuidad en x=0 y x=5

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} a(x-2)^2 = 4a$;$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (bx+1) = 1$; f(0)=4a$\Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=1/4$ para este valor de a f es continua en x=0

$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} (bx+1) = 5b+1$;$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} 1/x = 1/5$; f(5)=1/5$\Rightarrow 5b+1=1/5$

$\Rightarrow b=-4/25$ Para ese valor es continua en x=5.

Por tanto para a=1/4 y b=-4/25 es continua en R

c) $y=\begin{cases} x \text{ si } x<1 \\ ax+2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ Tanto la función y=x como la función y=ax+2 son continuas en su interlo de definición por serlo en R.

Continuidad en x=1: $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x = 1$;$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (ax+2) = a+2$; f(1)=a+2$\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=a+2 \Rightarrow a=-1$. Para ese valor de a f es continua en R

d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si x<0} \\ ax+b \text{ si } 0 \le x \le 3 \\ x+a \text{ si x>3} \end{cases}$; Todas las funciones que componen f son polinómicas y por tanto continuas en el intervalo en el que están definidas. Veamos la continuidad en x=0 y x=3: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 4-x = 4$;$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(ax+b) = b$; f(0)=b$\Rightarrow b=4$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$;$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+a) = 3+a; f(3) = 3+b \Rightarrow 3a+b = 3+a \Rightarrow$
3a+4=3+a$\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-1/2$

e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si x} \ne 0 \\ a \text{ si x=0} \end{cases}$; 8x³+3x=0$\Rightarrow x(8x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$ Por lo tanto la función y=$\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$ es continua en R-{0} y en consecuencia nuestra función también lo es. Veamos la continuidad en x=0: : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \frac{0}{0}$;
$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(8x^2+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x+1}{(8x^2+3)} = \frac{1}{3}$; f(0)=a. Para que f sea continua a=1/3

f) y=$\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si x} \ne 2 \\ b \text{ si x=2} \end{cases}$ La función y=$\frac{ax^3-16}{x-2}$ es continua en R-{2}, por lo tanto también lo es la función que nos ocupa. Veamos la continuidad en x=2:: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{ax^3-16}{x-2} = \frac{8a-16}{0}$;
Si 8a-16 es distinto de cero ese límite sería infinito y la función presentaría en x=2 una discontinuidad de asintótica para cualquier valor de b. La única posibilidad de que ese límite exista es que sea del tipo 0/0 y, por lo tanto que 8a-16=0$\Rightarrow a=2$.
Para ese valor de a: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^3-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x^2+4x+8)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(2x^2+4x+8) = 24$;f(2)=b
Luego b=24 y a=2 para que f sea continua

g) y= $\begin{cases} a\text{cosx si x} \le b \\ x^2 \text{ si x>b} \end{cases}$; Las funciones y=acosx e y=x² son continuas en R y por lo tanto en los intervalos en los que están definidas. Veamos la continuidad en x=b
$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} a\cos x = a\cos b$; $\lim_{x\to b+} f(x) = \lim_{x\to b^+} x^2 = b^2 \Rightarrow a\cos b = b^2 \Rightarrow a = \frac{b^2}{\cos b}$
La función es continua $\forall b \in R$ t q cosb≠ 0 siempre que para ese valor de b sea $a = \frac{b^2}{\cos b}$
En definitiva b puede tomar cuaquier valor excepto$\begin{cases} \pi/2 + 2k\pi \\ 3\pi/2 + 2k\pi \end{cases}$ $k \in Z;\ a = \frac{b^2}{\cos b}$

h) y= $\begin{cases} ae^x - 1 \text{ si x} \le 0 \\ be^{-x} \text{ xi 0<x<1} \\ 3 \text{ si x} \ge 1 \end{cases}$ Todas las funciones que intervienen en la composiión de f son continuas en todo R, por tanto los únicos puntos problemáticos son x=0 y x=1
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(ae^x - 1) = a-1$;$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(be^{-x}) = b$; f(0)=a-1$\Rightarrow a-1=b$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(be^{-x}) = b/e$;$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3) = 3$; f(1)=3$\Rightarrow b/e = 3 \Rightarrow b = 3e$
Como a-1=b$\Rightarrow a = b+1 = 3e+1$
b=3e, a=3e+1 para que f sea continua en R

I)$\begin{cases} senx \text{ si x} \le -\pi/2 \\ msenx + n \text{ si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ 2\cos x \text{ si x} \ge \pi/2 \end{cases}$ Todas las funciones que componen f son continuas en R

Estudiemos la continuidad en x=.$\pi/2$ y en x=$\pi/2$

$\lim\limits_{x\to-\pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi/2^-}$ (senx)=sen(-π/2) $= -1$; $\lim\limits_{x\to-\pi/2+} f(x) = \lim\limits_{x\to-\pi/2^+}$ (msenx+n)=-m+n;

f($-\pi/2$) $= -1 \Rightarrow$ para que f sea continua en x=.$\pi/2$ debe verificarse que -m+n=-1

(msenx+n)-= $m+n$; $\lim\limits_{x\to\pi/2+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^+}$ (2cosx)=0$\Rightarrow$ $m+n=0$ para que sea continua en x=$\pi/2$

Para que f sea continua han de cumplirse las dos condiciones:

$$\begin{cases} -m+n=-1 \\ m+n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1/2 \\ n=-1/2 \end{cases}$$

13. Determinar los puntos y tipos de discontinuidad de las funciones f(x)=$\dfrac{1}{x+3}$ y g(x)=$\dfrac{1}{(x+3)^2}$ indicando gráficamente el comportamiento de cada una de ellas en un entorno de los puntos de discontinuidad.

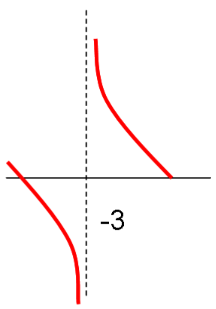
Dominio de f(x)=R-{-3}; $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0} = \infty$ en x=3 f posee una discontinuidad asintótica

Dominio de g(x)=R-{-3}; $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = \lim\limits_{x\to-3} \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{0} = \infty$ en x=3 f posee una discontinuidad asintótica

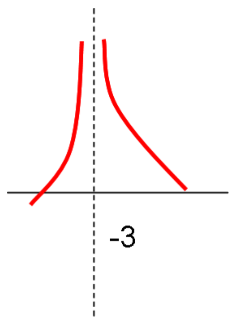
Veamos el comportamiento de ambas funciones en un entorno de x=3

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-3+} \frac{1}{x+3} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-3^-} \frac{1}{(x+3)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-3+} \frac{1}{(x+3)^2} = +\infty$



f(x)



g(x)

14. Se considera la función f(x)=$\begin{cases} Lx \text{ si } 0<x<1 \\ ax^2+b \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$ Determinar los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y f(2)=L3

La función y=Lx es continua en (0,1) por serlo en (0,∞); la función y=ax^2+b es continua en (1,∞) por serlo en todo R. Falta por tanto estudiar la continuidad en x=1

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} Lx = L1 = 0$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (ax^2+b) = a+b$; f(1)=a+b$\Rightarrow$ $0 = a+b$

f(2)=4a+b=L3. Uniendo las dos condiciones tenemos:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=L3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ 4a-a=L3 \end{cases} \Rightarrow 3a = L3 \Rightarrow a = L3/3; b=-a \Rightarrow b=-L3/3$$

15. ¿Para qué valores de x tiene sentido la expresión f(x)=$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-\sqrt{8}$ ¿Es continua la función f en su dominio?

$\begin{cases} 4+x\geq 0 \Rightarrow x\geq -4 \\ 4-x\geq 0 \Rightarrow 4\geq x \end{cases}$ $\Rightarrow$ El dominio de la función es el intervalo [-4,4]. La función es continua en dicho intervalo serlo en el intervalo (-4,4), por ser suma de funciones elementales, y ser continua por la derecha en x=-4 y continua por la izd en x=4.

16. Probar que la función f(x)=x+senx-1 tiene al menos 1 raíz real.

F(0)=-1<0; $f(\pi/2)=\pi/2>0$; f es continua en el intervalo $[0,\pi/2]$ al serlo en R. En consecuencia podemos aplicar el teorema de Bolzano que garantixa la existencia de un punto c perteneciente a $(0,\pi/2)$ en el que f(c)=0 y, por lo tanto, x=c es una raíz de esa función.

17. Sea f(x)=$x^7-3x^6+2\mathrm{sen}(x.\pi/2)$ ¿Es cierto que f se anula en algún punto x comprendido entre 3 y 4? Enunciar el resultado teórico en el que se basa la respuesta.

F(3)=$2\mathrm{sen}(3\pi/2)=-2<0$. f(4)=$4096+2\mathrm{sen}2\pi=4096>0$ f es continua en [3,4] por serlo en R, por lo tanto por el teorema de Bolzano f se anula en el intervalo (3,4).

Enunciado del teorema de Bolzano: sea f continua en [a,b] y tal que f(a).f(b)<0$\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ t.q f(c)=0

18. Demuestra que las funciones y=e^x e y=1/x se cortan en la parte positiva del eje OX

Demostrar que esas funciones se cortan en la parte positiva del eje OX es equivalente a comprobar que la función y=e^x-1/x se hace cero en el intervalo $(0,\infty)$. Para ello, buscaremos dos puntos positivos en los que las imágenes de esa función tengan distinto signo:

F(0'5)=$e^{0'5}$- 1/0'5<0; f(1)=e-1>0; la función y=e^x-1/x es continua en el intervalo [0'5,1] por serlo en $(0,\infty)$, y las imágenes de los extremos de dicho intervalo tienen signo distinto, aplicando el teorema de Bolzano deducimos que $\exists c\in$ (0'5,1) tq f(c)=0.

19. Demuestra que la función $y=\dfrac{x^3-x^2-3}{2x+1}$ tiene alguna raíz real

f(0)=-3<0; f(2)=1>0; la función es continua en [0,2] por serlo en $(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,\infty)$. Por lo tanto cumple en ese intervalo el teorema de Bolzano. En consecuencia tiene una raíz real en el intervalo (0,2)

20¿Puede asegurar el teorema de Bolzano que la función y=secx tiene alguna raíz real en el intervalo [π/4,3π/4]?

Aunque sec(π/4)>0 y sec (3π/4)<0, la función tiene una discontinuidad asintótica en x=π/2, por lo que no es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo [π/4,3π/4]