EJERCICIOS DE CONTINUIDAD Y CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE FUNCIONES

1. Demostrar los siguientes apartados:
   a. Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] tal que fa)>g(a) y f(b)<g(b) entonces sus gráficas se cortan.
   b. La función $y=3x^5-4x^2+3x+2$ tiene al menos una raiz real
   c. La ecuación cosx-2x+1=0 tiene al menos una solución real.
2. Indicar, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes funciones están acotadas en su dominio:
   a) f:R------------>R x------------> |x| b) f: R----------->R x------------>$\frac{1}{1+x^2}$ c) f:[-1,1]--------->R x------------>$\frac{1}{2-x}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades: a) y=3|x|+5; b) y=$\begin{cases} x+2 \text{ si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} \text{ si } -1<x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; c) $y=\begin{cases} 4 \text{ si } x>0 \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$;
   d)$y=\begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x=0 \end{cases}$;*e)* $y=\begin{cases} x+2 \text{ si } x<1 \\ 4x-1 \text{ si} x>1 \end{cases}$;*f)* $y=\begin{cases} x^2 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$;*g)* $y=\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$
   h)y=$\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si } x=2 \end{cases}$; i) y=$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{|x|}{x} \text{ si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases}$ j) y=$\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ k)$y=\begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} \text{ si } x<0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } x>0 \end{cases}$

4. Dar un ejemplo de una función tal que la imagen de un intervalo cerrado no sea un intervalo cerrado. ¿Puede esa función ser continua?. Razona la respuesta.
5. Demostrar que la ecuación x=cosx tiene al menos una solución en el intervalo (0,1)
6. Demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene al menos una solución real.
7. Dada la función f(x)=tg(x) , se verifica que f(π/4) = 1 y f(3π/4)=-1, ¿garantiza eso que existe algún punto del intervalo (π/4, 3π/4) en el que tg(x)=0?. Razona la respuesta.
8. Demostrar que existe al menos un número real tal que senx=x-2
9. Si y=f(x) es continua en [1,9], f(1)=-5 y f(9)>0, ¿podemos asegurar que g(x)=f(x)+3 corta al eje OX en el intervalo (1,9)?
10. Si y=f(x) es una función definida en [a,b], continua en x=a y x=b y tal que f(a).f(b)<0 ¿podemos asegurar que existe un c perteneciente al intervalo(a,b) tal que f(c)=0, razona la respuesta.
11. Verdadero o falso: a) Toda función acotada en R es continua en R; b) Toda función continua en R es acotada en R; c) Toda función continua en [a,b] está acotada en dicho intervalo.

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b
    a) y=$\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si} x<-1 \\ ax+b \text{ si } -1 \leq x<2 \\ 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$; b) y=$\begin{cases} a(x-2)^2 \text{ si } x \leq 0 \\ bx+1 \text{ si } 0<x<5 \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$; c) y=$\begin{cases} x \text{ si } x<1 \\ ax+2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$
    d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si } x<0 \\ ax+b \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ x+a \text{ si } x>3 \end{cases}$; e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si } x=0 \end{cases}$; f) y=$\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ b \text{ si } x=2 \end{cases}$;

g) y= $\begin{cases} a\cos x \text{ si } x \le b \\ x^2 \text{ si } x>b \end{cases}$; h) y= $\begin{cases} ae^x - 1 \text{ si } x \le 0 \\ be^{-x} \text{ si } 0<x<1 \\ 3 \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} senx \text{ si } x \le -\pi/2 \\ msenx + n \text{ si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ 2\cos x \text{ si } x \ge \pi/2 \end{cases}$

13. Determinar los puntos y tipos de discontinuidad de las funciones f(x)=$\frac{1}{x+3}$ y g(x)=$\frac{1}{(x+3)^2}$ indicando gráficamente el comportamiento de cada una de ellas en un entorno de los puntos de discontinuidad

14. Se considera la función f(x)=$\begin{cases} Lx \text{ si } 0<x<1 \\ ax^2 + b \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$ Determinar los valores de a y b para que f sea continua en su dominio y f(2)=L3

15. ¿Para qué valores de x tiene sentido la expresión f(x)=$\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{8}$ ¿Es continua la función f en su dominio?

16. Probar que la función f(x)=x+senx-1 tiene al menos 1 raíz real.

17. Sea f(x)=x^7-3x^6+2sen(x.π/2) ¿Es cierto que f se anula en algún punto x comprendido entre 3 y 4? Enunciar el resultado teórico en el que se basa la respuesta.

18. Demuestra que las funciones y=e^x e y=1/x se cortan en la parte positiva del eje OX

19. Demuestra que la función $y = \frac{x^3 - x^2 - 3}{2x+1}$ tiene alguna raíz real

20¿Puede asegurar el teorema de Bolzano que la función y=secx tiene alguna raíz real en el intervalo [π/4,3π/4]?