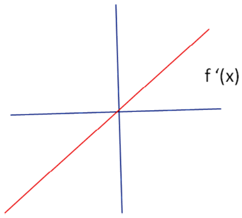
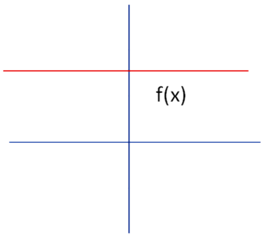
Boletín derivabilidad: relación entre las gráficas de una funciones y sus funciones derivadas primera y segunda

1. La gráfica de la función f’(x) es :

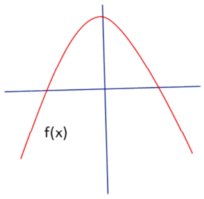


Indica, razonando la respuesta, ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función f(x)?

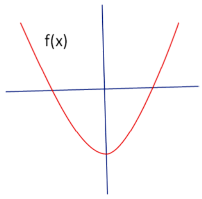
a)



b)

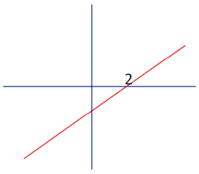


c)

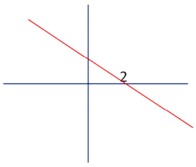


2. ¿cuál de estas gráficas corresponde a la de la derivada de una función que tiene un máximo en x=2? Razona la respuesta

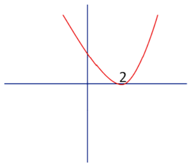
a)



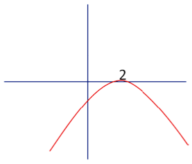
b)



c)

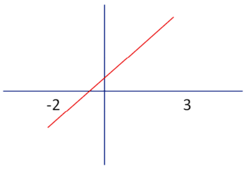


d)

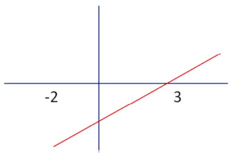


3. ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la de la derivada de una función creciente en el intervalo (-2,3)? Razona la respuesta:

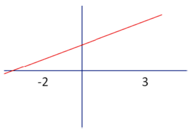
a)



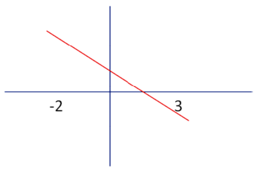
b



c)

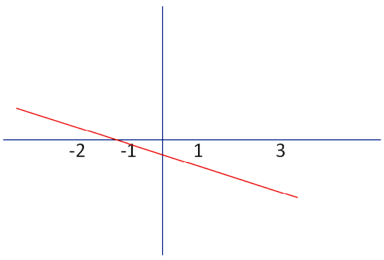


d)

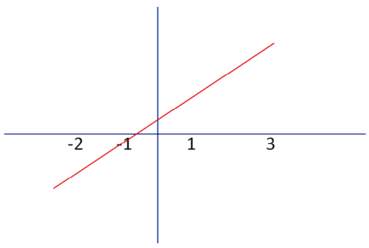


4. ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la derivada segunda de una función cóncava en (-2,-1) y convexa en (1,3)?

a)

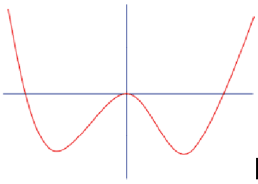
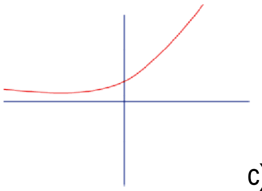
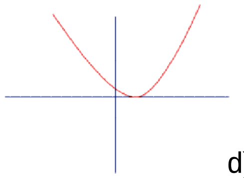
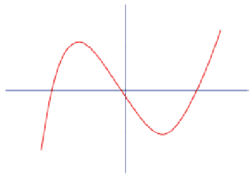


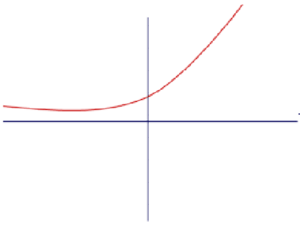
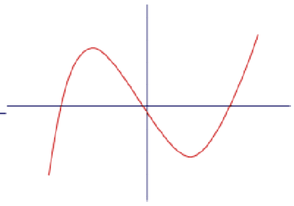
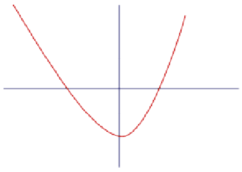
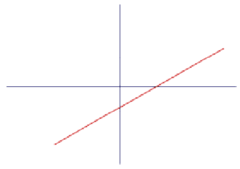
b)



Boletín derivabilidad: relación entre las gráficas de una funciones y sus funciones derivadas primera y segunda

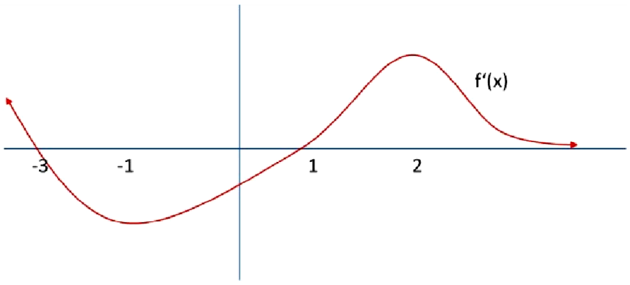
5. Las gráficas a, b, c y d corresponden a las de cuatro funciones, asocia cada a su correspondiente función derivada (de la 1 a la 4) razonando tu respuesta.

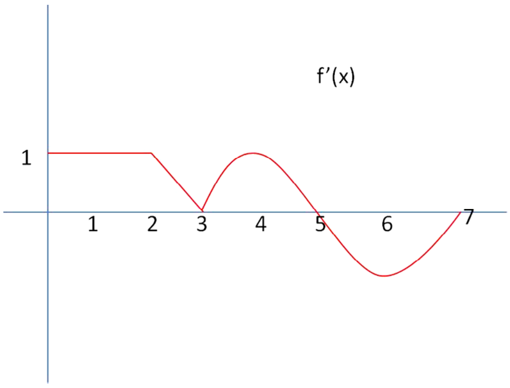
a)  b)  c)  d) 

1. 2. 3. 4.

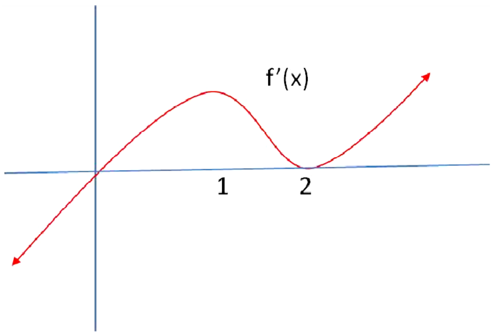
6. De una función f(x) se sabe que su máximo absoluto alcanza el valor 3; tiene un mínimo relativo en un punto en que corta al eje OX y la gráfica de su derivada es la que aparece en la figura. Haz una representación aproximada de f(x)





7. Estudiar el comportamiento de una función f(x) en el intervalo [0,7] y representarla, de forma aproximada, en dicho intervalo, sabiendo que su función derivada tiene la siguiente gráfica

8. Una función f(x) tiene por derivada la función f'(x) dada en la figura. Halla los intervalos de crecimiento, decrecimiento, extremos relativos e intervalos de curvatura de f(x)



Boletín derivabilidad: relación entre las gráficas de una funciones y sus funciones derivadas primera y segunda

SOLUCIONES:

1. Dado que f ‘(x)<0 en el intervalo (-∞,0) f es decreciente en dicho intervalo. Al ser f ‘(x)>0 en (0,∞) f es creciente en dicho intervalo. La única gráfica qe verifica ambos supuestos es la c.

2. Por tener un extremo en x=2   f’(2)=0. Al ser un máximo pasa en ese punto de crecer a decrecer luego a la izd de x=2 f’(x) debe ser positiva y a la derecha de x=2 debe ser negativa, la única gráfica que verifica todos los supuestos es la b.

3. Solo puede ser la gráfica c ya que al ser la función creciente en (-2,3) la derivada debe ser ≥0 en ese intervalo.

4. Cóncava en (-2,-1) luego f’’(x)≤ 0 en dicho intervalo. Convexa en (1,3) luego f’’(x)≥0 en dicho intervalo, en consecuencia es la gráfica b

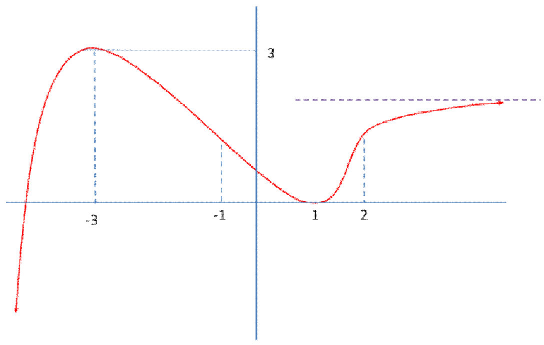
5. La gráfica a decrece en un intervalo, a continuación crece, vuelve a decrecer y finalmente crece otra vez, buscamos por tanto una función derivada que debe ser primero negativa, después positiva, otra vez negativa y finalmente positiva. Es decir la derivada de la función a es la gráfica 2.

La gráfica b es crecente en todo R por tanto su derivada ha de ser ≥0 en todo R, en consecuencia se trata de la gráfica 1.

La gráfica c decrece en un intervalo y crece después hasta el infinito. Buscamos una derivada que sea negativa hasta un punto y positiva a partir de ahí, se trata por tanto de la gráfica 4.

Por último, la gráfica d es creciente en un intervalo, decreciente en otro y después creciente , su derivada debe ser positiva al principio, pasar a ser negativa y finalmente ser positiva de nuevo. Corresponde en consecuencia a la gráfica 3

6. De la gráfica de la derivada obtenemos los siguientes datos: 1) f crece en (-∞,-3)U(1,∞) al ser f’>0 en dichos intervalos; f decrece en (-3,1) al ser f’ negativa. De los intervalos de crecimiento deducimos que en x=1 hay un mínimo relativo y en x=-3 un máximo relativo. Dado que nos dicen que corta al eje OX en su mínimo el punto de corte con el eje OX se dará en x=1. Como alcanza un máximo absoluto y sin embargo es creciente en (1,∞), debe tener una asíntota horizontal por la derecha en alguna recta y=a con a<3 y su máximo relativo ha de ser también máximo absoluto alcanzando el valor 3 de altura, es decir (-3,3) es un máximo absoluto y relativo. Por otra parte f’’(-1)=0 siendo f’ decreciente a la izd de este punto (lo que indica que la función es cóncava) y f’ creciente a la derecha del punto(lo que indica que f es convexa), así pues x=-1 es un punto de inflexión en el que la función pasa de cóncava a convexa. Lo mismo ocurre con x=2 pero analizando el crecimiento y decrecimiento de f’ a la izd y derecha de x=2 observamos que en este caso la función cambia en este punto de convexa a cóncava. En la gráfica puede verse un ejemplo de función que cumpliría los criterios enumerados.

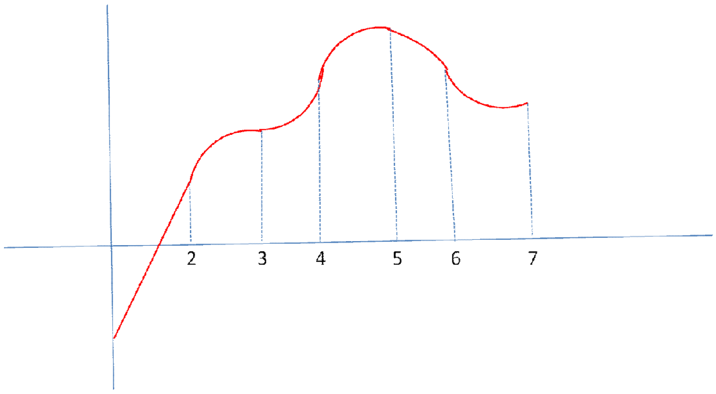


Boletín derivabilidad: relación entre las gráficas de una funciones y sus funciones derivadas primera y segunda

7. De la observación de la gráfica de la derivada podemos obtener los siguientes datos:

- En el intervalo (0,2) la derivada es positiva por tanto la función es creciente, como además la derivada es constante en ese intervalo la función debe ser una recta.
- En el intervalo (2,3) la derivada es positiva por lo que la función es creciente, como además la derivada es decreciente la función debe ser cóncava en dicho intervalo
- En el intervalo (3,4) la derivada es positiva por lo que f es creciente pero además f' es creciente por lo que f debe ser convexa en dicho intervalo
- En (4,5) f'>0 por lo que f es creciente, f' es decreciente por lo que f es cóncava
- En (5,6) f'<0 por lo que f es decreciente y f' es decreciente por lo que f es cóncava
- En (6,7) f'<0 luego f es decreciente pero f' es creciente por lo que f es convexa.

Un ejemplo podría ser el siguiente:



8. Intervalos de crecimiento: en (-∞,0) f'<0 por tanto f es decreciente; en (0,∞) f'>0 por tanto f es creciente. En x=0 hay un máximo relativo.
   Intervalos de concavidad: En (-∞,1) f' es creciente por lo que f es convexa; en (1,2) f' es decreciente por lo que f es cóncava; en (2,∞) f' es creciente por lo que f es convexa. En x=1 y x=2 hay puntos de inflexión