TIPOS DE EJERCICIOS PARA PREPARAR EL EXAMEN DE FUNCIONES 4º ESO

1. Dominios de funciones de los siguientes tipos: a) polinómicas, b)racionales (cociente de polinomios) c) funciones con radicales en el numerador o denominador, d) funciones a trozos e) funciones logarítmicas

2. Estudio de las características de una función a partir de su gráfica: Dominio, imagen, raíces, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos, intervalos de concavidad y convexidad, asíntotas.

3. Composición de funciones y cálculo de la función inversa.

4. A partir de la gráfica de la función y=f(x), dibujar la gráfica de las funciones: y=f(x)+k; y=f(x+k); y=-f(x); y=f(-x);b y=|f(x)|

5. Representación gráfica de los siguientes tipos de funciones: a) rectas, b) parábolas; c)función raíz cuadrada, d) hipérbolas; f) Función valor absoluto de una función polinómica de grado 1 o 2, deduciendo su fórmula, g)funciones a trozos compuestas por algunas de las funciones de los tipos anteriores, h) funciones del tipo $y=\frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$ (recta a la que le falta un punto)i) funciones logarítmicas y exponenciales de base a>1 y 0<a<1; j)funciones circulares

6. Calculo de las asíntotas verticales y horizontales de funciones racionales

7. Estudio de la continuidad y tipos de discontinuidades de funciones definidas a trozos. Cálculo de valores a y b para que una función dada, que depende de ellos, sea continua en R.

8. Cálculo de límites indeterminados del tipo ∞/∞ en funciones racionales o en las que intervengan radicales. Cálculo de límites del tipo 0/0 en funciones racionales
9. Cálculo de logarítmos de números que se puedan escribir como potencia de la base del logarítmo, aplicación de las propiedades de los logaritmos a expresines algebraicas, resolución de ecuaciones logarítmicas

Ejemplos de los tipos de ejercicios que pueden entrar en el examen de funciones.

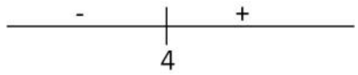
1. DOMINIOS

Ejemplo 1: Calcula el dominio de la función y=$3x^5-2x^2+x+2$: Su dominio es D(f)=R.

Ejemplo 2: Calcula el dominio de y=$\frac{3x-7}{x^2-9}$. El denominador no puede ser cero, buscamos sus raíces: $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow$D(f)=R-{-3,3}

Ejemplo 3: Calcula el dominio de y=$\sqrt{2x-8}$; El radicando debe ser mayor o igual que cero.

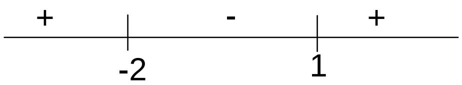
Resolvemos la inecuación $2x-8\geq 0$; $2x-8=0\Rightarrow x=4$, dando valores obtenemos D(f)=$[4,\infty)$



Ejemplo 4: Calcula el dominio de y=$\sqrt{x^2+x-2}$

El radicando debe ser $\geq$ que cero. Para resolver la inecuación $x^2+x-2\geq 0$

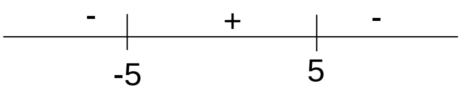
Estudiamos primero las soluciones de la ecuación $x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$ Ahora damos valores en los subintervalos en los que esos don números dividen a la recta real, obteniendo:



Por lo que D(f)=$(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$ Se toman los extremos porque en ellos el radicando es igual a cero

Ejemplo 5: Calcula el dominio de y=$\frac{\sqrt{-x^2+25}}{x-4}$ El radicando tiene que ser$\geq$ que cero:

$-x^2+25\geq 0$. Resolvemos la ecuación $-x^2+25=0\Rightarrow x=\pm 5$ y damos valores



Por tanto la raíz existe en el intervalo [-5,5]. Pero el denominador no puede ser cero; $x-4=0\Rightarrow x=4$
Por tanto D(f)=[-5,5]-{4}

Ejemplo 6: Calcula el dominio de la función y=$\begin{cases} \frac{2x+4}{x-3} \text{ si } x<0 & (-\infty,0) \\ \sqrt{x-1} \text{ si } 0\leq x\leq 3 & [1,3] \\ \frac{3x-1}{x^2-16} \text{ si } x>3 & (3,\infty)-\{4\} \end{cases}$

La función y=$\frac{2x+4}{x-3}$ solo tiene problema cuando x=3, pero al estar definida para x<0 no tiene ningún problema en su intervalo de definición.

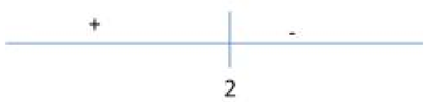
La función y=$\sqrt{x-1}$ solo existirá para aquellos números que hagan el radicando mayor o igual que cero (esto sería de $[1,\infty)$) pero que pertenezcan al intervalo donde está definida (es decir en [0,3]) Por tanto nos servirá el intervalo [1,3]

La función y=$\frac{3x-1}{x^2-16}$ solo tiene problema en los puntos que anulan al denominador: x=-4 y x=4, como estaba definida en $(3,\infty)$, existirá en $(3,\infty)$-{4}. En resumen, el dominio de la función será: $(-\infty,0)\cup[1,\infty)-\{4\}$

Ejemplo 7: calcula el dominio de la función y=L(-x+2)

-x+2 debe ser positivo. -x+2=0, x=2; damos valores

obtenemos que D=$(-\infty,2)$



Ejemplo 8: y=$\frac{L(x^2-16)}{x-8}$**;** x^2-16 debe ser positivo**;** x^2-16=0⇒x=±4

Dando valores el numerador es positivo en

$(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$; pero el denominador no puede ser cero por lo que no nos sirve el valor x=8

Por tanto D=$(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$- {8}

2. Características de las funciones a partir de su gráfica: hay suficientes ejercicios resueltos de este tipo en el boletín y

3. Composición de funciones y cálculo de la función inversa:

Ejemplo 1: Dadas las funciones; f(x)=3x-4; g(x)=$\frac{x+1}{x-2}$; h(x)=$\sqrt{x+2}$ halla (g∘f) (x) y (f∘h)(x)

$g\circ f(x)=g(3x-4)=\frac{3x-4+1}{3x-4+2}=\frac{3x-3}{3x-2}$; $\qquad f\circ h(x)=f(\sqrt{x+2})=3\sqrt{x+2}-4$

Ejemplo 2: Dadas las funciones f(x)=3x-1 y g(x)=$\frac{2x+1}{x-3}$ halla f^{-1}(x) y g^{-1}(x)

f^{-1}(x): y=3x-1, despejamos la x: y+1=3x; x=$\frac{y+1}{3}$; cambiamos la notación: y=$\frac{x+1}{3}=f^{-1}(x)$

g^{-1}(x): y=$\frac{2x+1}{x-3}$despejamos la x:yx-3y=2x+1; yx-2x=1+3y; x(y-2)=1+3y ; x=$\frac{1+3y}{y-2}$ .Cambiamos la notación:$y=\frac{1+3x}{x-2}=g^{-1}(x)$

Ejemplo 3: calcula las funciones inversas de a)f(x)=L(x+3); b)g(x)=e^{x-2}; c) h(x)=3^x-4;

d) l(x)=Lx+3

a) y=L(x+3); despejamos a x, para ello primero aplicamos la defonoción del logarítmo neperiano: e^y=x+3; e^y-3=x; cambiamos la notación: y=e^x-3= f^{-1}(x)

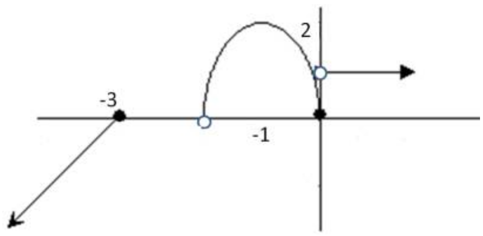
b) y=e^{x-2}; para despejar x aplicamos a ambos miembros logarotmo en base e; Ly=(x-2)Le; Ly=x-2; Ly+2=x. Cambiamos la notación y=Lx+2=g^{-1}(x)

c) y=3^x-4; despejamos x: y+4=3^x, ahora aplicamos logarotmo en base 3: $\log_3$(y+4)=x$\log_3$3; $\log_3$(y+4)=x. Cambiamos la notación y=$\log_3$(x+4)=h^{-1}(x)

d) y=Lx+3; despejamos x: y-3=Lx, aplicamos la definición de logaritmo, e^{y-3}=x. Cambiamos la notación: y=e^{x-3}=l^{-1}(x)

4. A partir de la gráfica de f(x) dibujar las de f(x)+k, f(x+k), -f(x); f(-x) y |f(x)|

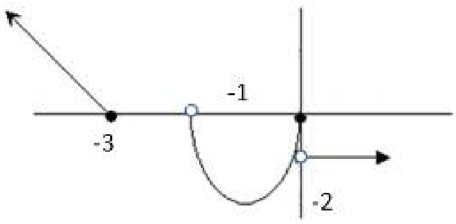
Ejemplo1:-Dada la función y=f(x), cuya gráfica es la siguiente:



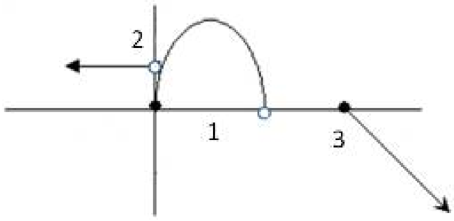
Explica, a partir de ella como sería la gráfica de : y=f(x)+2; y=f(x+2); y **dibuja** las gráficas de y=-f(x); y=f(-x) e y=|f(x)|

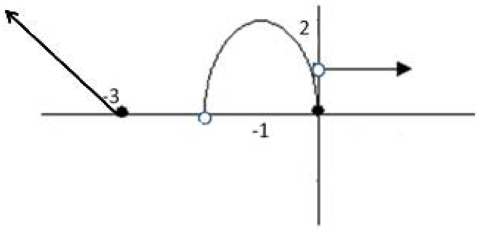
A) f(x)+2 se traslada verticalmente 2 unidades hacia arriba; B) f(x+2) se traslada 2 unidades hacia la izda de forma horizontal

C) y= -f(x)



D)y=f(-x)





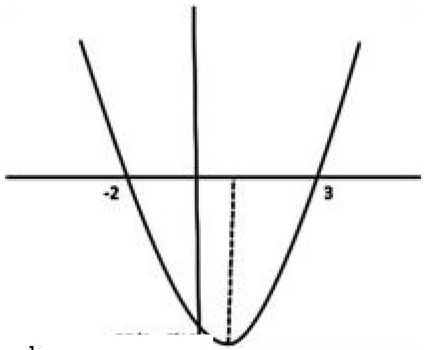
e)y=|f(x)|

5. Representación de funciones:

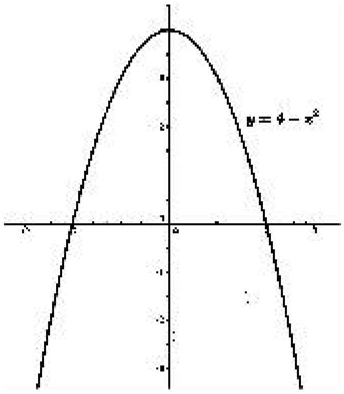
Ejemplo 1: Dibuja la gráfica de la función y= x^2-x-6

V(1/2,-25/4);

Raíces x=-2 y x=3

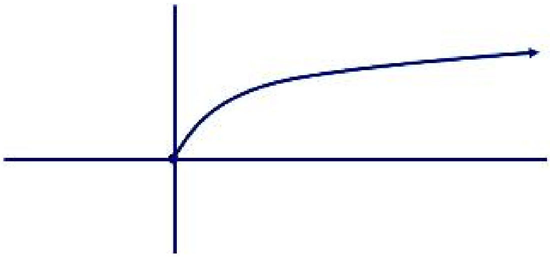


Ejemplo 2: Dibuja la gráfica de la función y=4-x^2:
V(0,4); raíces x=2 y x=-2

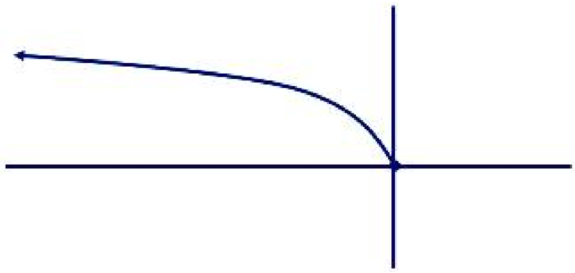


Ejemplo 3: Dibuja la gráfica de y= $\sqrt{x}$, de y= $\sqrt{-x}$ y de y= - $\sqrt{x}$

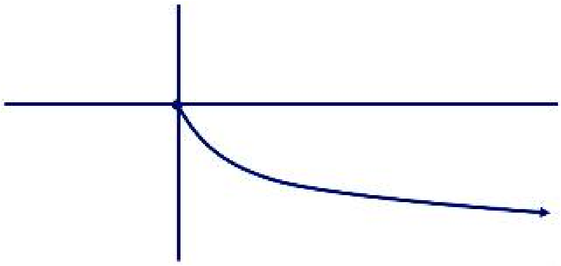
y= $\sqrt{x}$

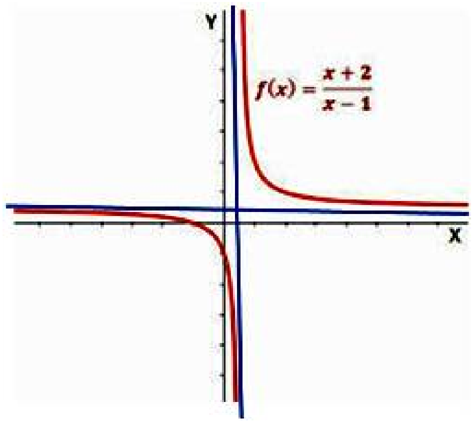


y= $\sqrt{-x}$



y= - $\sqrt{x}$





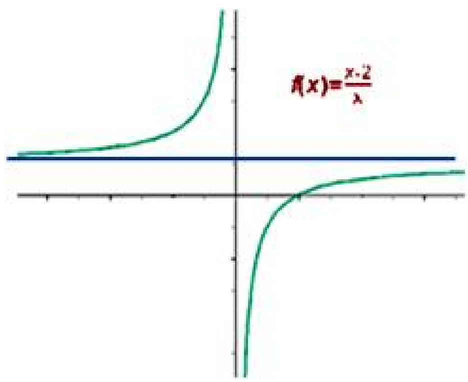
Ejemplo 4: Dibuja la gráfica de y=$\frac{x+2}{x-1}$

D=R-{1}; Asíntotas:

AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1} = 1$ Por tanto AH en y=1

AV: $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{0} = \infty$ Por tanto AV en x=1 f(0)=-2; por debajo de la AH

f(2)=4, por encima de la AH



Ejemplo 5: Gráfica de y=$\frac{x-2}{x}$

D=R-{0}; Asíntotas:

AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x} = 1$ Por tanto AH en y=1

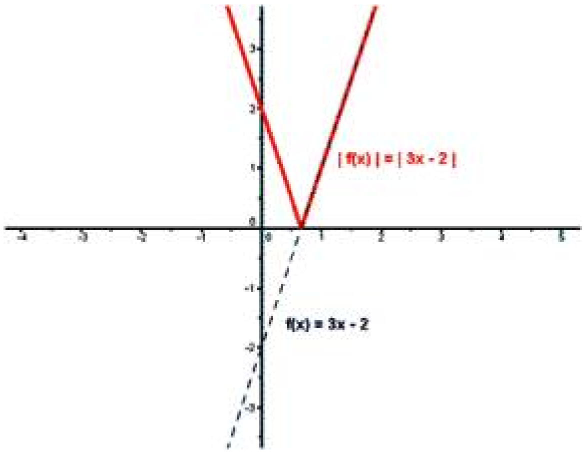
AV: $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x} = \frac{3}{0} = \infty$ Por tanto AV en x=0

f(-1)=3; por encima de la AH

f12)=-1, por debajo de la AH

Ejemplo 6. Dibuja la gráfica de y=|3x-2| y obtén su fórmula como función a trozos. Dibujamos la función y=3x-2. Para ello buscamos su raíz: 3x-2=0; x=2/3, luego pasa por el punto (2/3,0) y otro punto cualquiera por ejemplo f(0)=-2, pasa por (0,-2). En la gráfica adjunta está dibujada con línea discontinua.

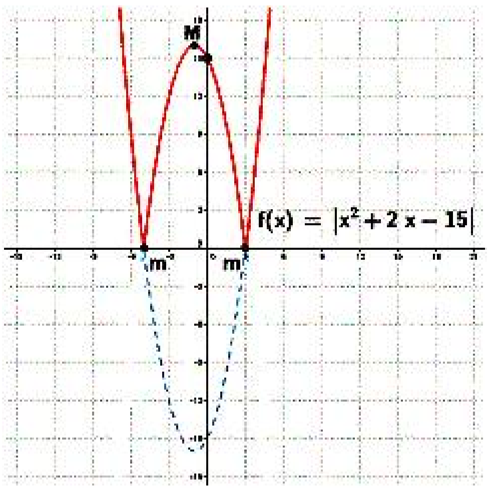
Para hacer la gráfica de su valor absoluto cambiamos de signo las alturas que en la gráfica original eran negativas, en nuestro caso se corresponde con las imágenes de los puntos menores que 2/3. Para



Hallar su fórmula como función a trozos solo debemos pensar lo que hemos hecho: Las imágenes de los puntos menores que 2/3 las hemos cambiado de signo y, por tanto, su imagen ahora será -3x+2, En los puntos mayores o iguales a 2/3 las imágenes no se alteraron y por tanto siguen siendo 3x-2. En resumen y=|3x-2|= $\begin{cases} -3x+2 \text{ si } x<2/3 \\ 3x-2 \text{ so } x \geq 2/3 \end{cases}$

Ejemplo 7: Dibuja la gráfica de y=|x^2+2x-15| y obtén su fórmula como función a trozos

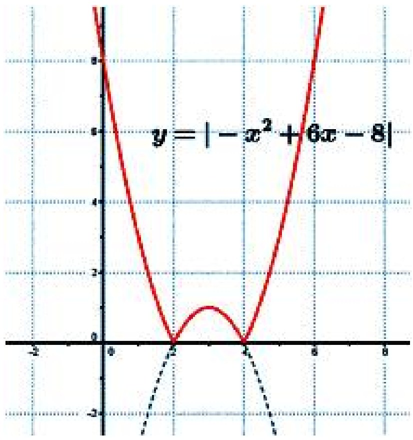
Dibujamos la gráfica de y=x^2+2x-15: V(-1,-16); raíces x=-5 y x=3. En la gráfica adjunta está dibujada con línea discontinua. A continuación cambiamos de signo aquellas imágenes que son negativas, en nuestro caso las de los puntos comprendidos entre x=-5 y x=3, obteniendo la gráfica de la función y=|x^2+2x-15|



Pensando lo que hemos hecho obtenemos su fórmula:y=|x^2+2x-15|= $\begin{cases} x^2+2x-15 \text{ si } x \leq -5 \\ -x^2-2x+15 \text{ si } -5<x<3 \\ x^2+2x-15 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

Ejemplo 8: Dibuja la gráfica de y=|-x^2+6x-8| y obtén su fórmula como función a trozos

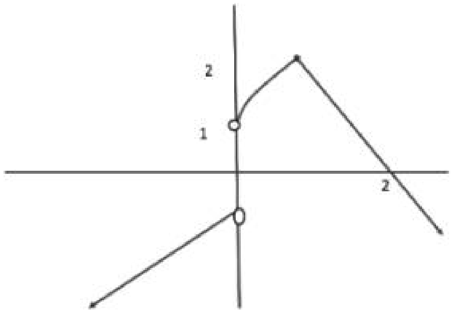
Dibujamos la gráfica de y=-x^2+6x-8: V(3,1); raíces x=2 y x=4. En la gráfica adjunta está dibujada con línea discontinua. A continuación cambiamos de signo aquellas imágenes que son negativas, en nuestro caso las de los puntos menores que 2 y las de los mayores que 4, obteniendo la gráfica de la función y=|-x^2+6x-8| Pensando lo que hemos hecho obtenemos su fórmula:



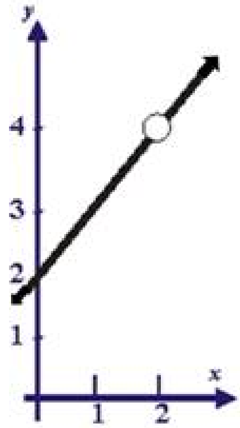
y=|-x²+6x-8|= $\begin{cases} x^2-6x+8 \text{ si } x\leq 2 \\ -x^2+6x-8 \text{ si } 2<x<4 \\ x^2-6x+8 \text{ si } x\geq 4 \end{cases}$

Ejemplo 9: Representa gráficamente la función f(x)= $\begin{cases} x-1 & si \quad x<0 \\ -x^2+2x+1 & si \quad 0<x<1 \\ -2x+4 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

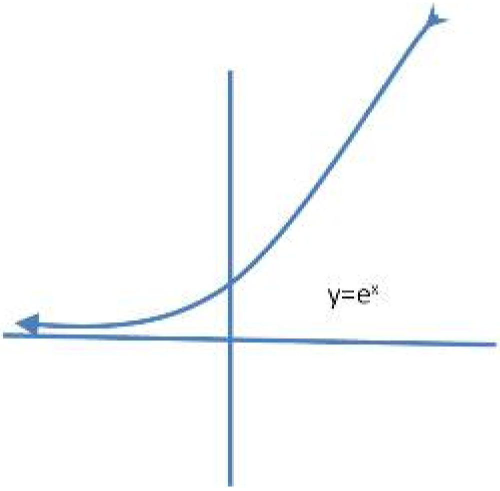
Hasta x=0 la función es una semirrecta, debemos dar un punto, Por ejemplo: f(-1)=-2; y hallar $\lim_{x\to 0^-} x-1=-1$. El punto (0,-1) no se toma pero es el punto donde finaliza la recta.
Entre x=0 y x=1 la función es un trozo de parábola. Su vértice está en el punto v(1,2), por lo que llegamos justo hasta él pero sin cogerlo, observamos que $\lim_{x\to 1^-} -x^2+2x+1=2$, debemos hallar también de donde parte esa parábola $\lim_{x\to 0^+} -x^2+2x+1=1$; hallamos además la imagen de un punto intermedio por ejemplo f(1/2)=7/4, teniendo así los 3 puntos requerodos para dibujar ese trozo de parábola.
La tercera función es otra semirrecta hallamos f(1)=2, que sería el punto del que parte y la imagen de otro punto cualquiera, por ejemplo f(2)=0.
Así la gráfica de la función pedida es la que figura a continuación.

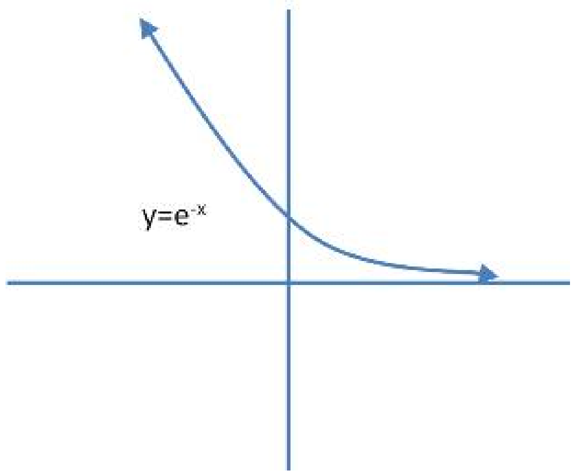


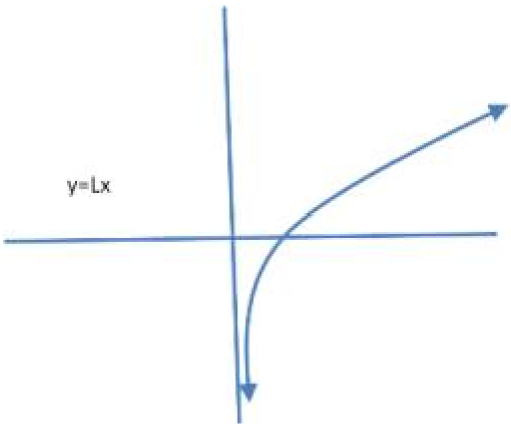
Ejemplo 10 Dibuja la gráfica de la función y= $\frac{x^2-4}{x-2}$
D=R-{2}. AH $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\infty$No tiene AH
AV $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$. Factorizamos los polinomios: x^2-4=(x-2)(x+2)
$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2).(x-2)}{0x-2}=\lim_{x\to 2}x+2=4$
Observamos que esta simplificación que hemos hecho en el cálculo del límite podría hacerse en todos los puntos en los que x-2 sea distinto de cero, es decir en todo R-{2}. Por tanto nuestra función es igual a la recta y=x+2 en todos los puntos excepto en x=2 que nuestra función no existe. La función que debemos dibujar será entonces la de la recta y=x+2 quitándole la imagen de x=2 que en nuestra función no existe.
Su gráfica está dibujada a continuación.

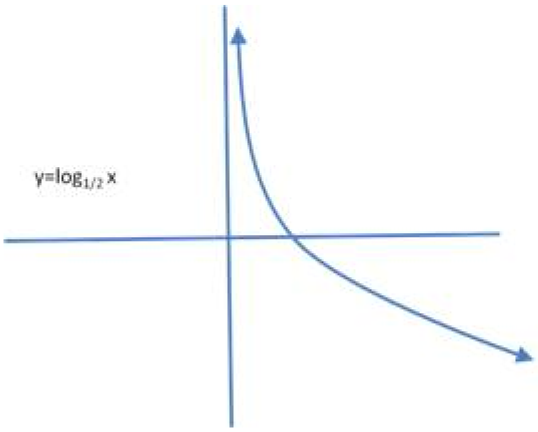


Ejemplo 11: Dibuja las gráficas de y=e^x ; y=e^{-x}; y=Lx; y=$log_{1/2}$x









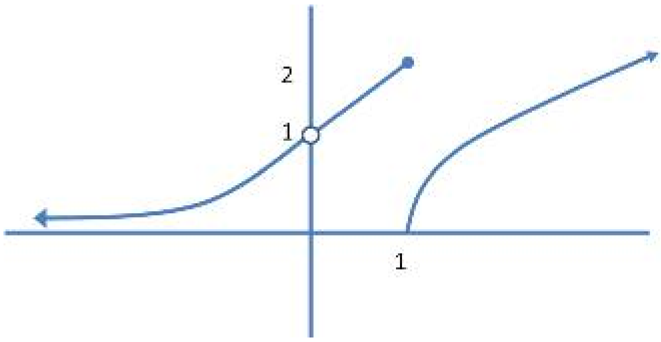
Ejemplo 12: Dibuja la gráfica de la función y= $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ x+1 \text{ si } 0<x<1 \\ Lx \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudiamos primero su continuidad: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1$; f(0)∄

La función es discontinua evitable en x=0; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$;

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} Lx = L1 = 0$;

F(1)=L1=0, la función es discontinua de salto finito en x=1. Para dibujar la función tomamos la gráfica de y=e^x en (-∞,0); la gráfica de la función y=x+1 en (0,1) y la gráfica de y=Lx en (1,∞). Obteniendo la siguiente gráfica:



Ejemplo13: A partir de las gráficas de las gráficas de las funciones circulares contesta verdadero o falso a las siguientes cuestiones razonando la respuesta,

A) La función seno tiene un mínimo en x=0 (R: Falso, como se aprecia en la gráfica en x=0 es creciente)

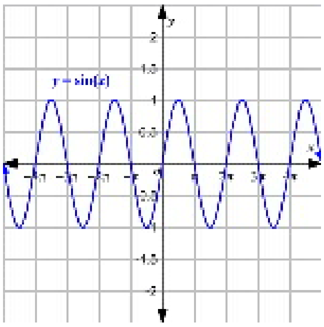
B)Ña función coseno tiene por imagen [-1,1] (R: verdadero como se observa en la gráfica

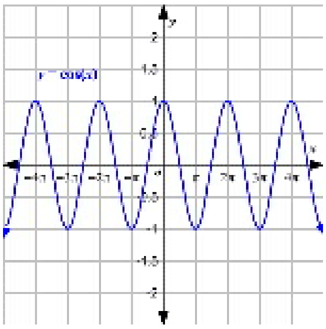
C) La función tangente es decreciente en (0,π) (R: falso, es creciente en todo su dominio)

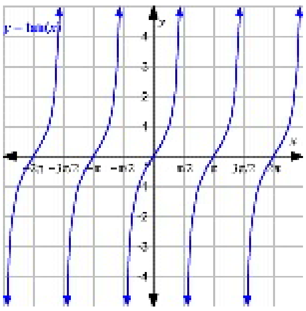
D) La función cotangente tiene una AV en x=0 (R: verdadero como se ve en la gráfica)

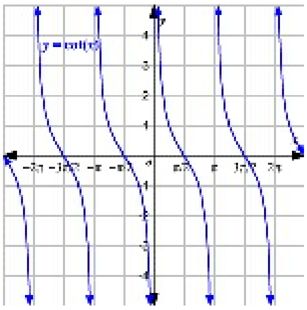
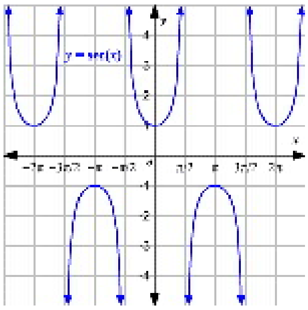
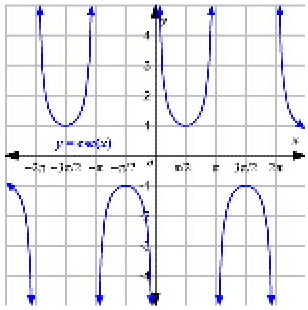
E) La finción secante tiene por imagen todo R (R: falso la imagrn de la función secante es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

F) La función cosecante es convexa en (0,π) (R: verdadero como se observa en la gráfica)







6. Cálculo de asíntotas verticales y horizontales de funciones racionales.

Ejemplo 1: Calcular las asíntotas verticales y horizontales de la función y=$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

D=R-{-2,2}

AV: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{0}{0}$; Factorizamos los polinomios: x^2-3x+2=(x-2)(x-1) al ser sus raíces x=2 y x=1; x^2-4=(x-2).(x+2) al ser sus raíces x=2 y x=-2. Por tanto

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2).(x+2)}=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$ La recta x= 2 no es A.V.

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{12}{0}=\infty\Rightarrow$ la recta x= -2 es A.V.

AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=1$ Por tanto y=1 es AH

Ejemplo 2: Calcular las asíntotas verticales y horizontales de la función y=$\frac{3x}{x+2}$ D=R-{-2};

AV:$\lim_{x\to -2}\frac{3x}{x+2}=\frac{-6}{0}=\infty\Rightarrow$ la recta x=-2 es A.V. AH:$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+2}=3$ la recta y=3 es AH

7. Estudio de continuidad y tipos de discontinuidades.

Ejemplo 1: Estudia la continuidad de la siguiente función, indicando de que tipo son sus discontinuidades: f(x)=$\begin{cases}\frac{2}{x-2} & \text{si } x\leq 3\\ \frac{3x}{2x-3} & \text{si } x>3\end{cases}$

En el intervalo (-,∞3) la función es racional. Por tanto, es continua en todos los puntos del intervalo excepto donde se anula el denominador, es decir, excepto en x= 2 .$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x-2}=\frac{2}{0}=\infty$ Hay una discontinuidad asintótica en x=2.

En el intervalo(3,∞) la función es racional, con lo que es continua en todos los puntos del intervalo excepto cuando el denominador se anula, esto es,

2x-3=0; x=3/2. Como 3/2 es <3 no pertenece a ese intervalo y la función es continua en (3,∞)

Falta estudiar la continuidad en el punto de cambio de definición: en $x = 3$

Para ello, estudiamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{2x-3} = \frac{9}{3} = 3$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite en $x = 3$: Es discontinua de salto finito en x=3

Ejemplo 2: Estudia la continuidad de la siguiente función, indocando de que tipo son sus discontinuidades $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x<2 \\ 4 \text{ si } x>2 \end{cases}$

f(2) no existe, calculamos los límites laterales: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4 = 4$

Por tanto, la función presenta una discontinuidad evitable en x = 2 porque tiene límite, pero no tiene imagen.

Ejemplo 3: estudia la continuidad de la siguiente función, explicando los tipos de discontinuidades

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 2x \text{ si } x>2 \\ 1 \text{ si } x=2 \end{cases}$$

f(2)=1 ; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4; \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4$ Por tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

La función presenta una discontinuidad evitable en x = 2 porque la imagen no coincide con el límite.

Ejemplo 4:estudia la continuidad de la siguiente función, explicando los tipos de discontinuidades

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x \le 2 \\ \frac{2}{x-2} \text{ xi } x>2 \end{cases}$$

f(2)=4; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{0} = \infty$

En x = 2 hay una discontinuidad de salto infinito o asintótica

Ejemplo 5: estudia la continuidad de la siguiente función, explicando los tipos de discontinuidades

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \sqrt{x+1} \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$$

En el intervalo (-∞,1) la función presenta un problema en x=0, al anular el denominador,

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$. En x=0 presenta una discontinuidad asíntótica.

En el intervalo (1,∞) la función no presenta ningún problema ya que esa raiz existe cuando x+1≥0, es decir x≥-1, por lo tanto existe en todo el intervalo (1,∞).

Falta estudiar la continuidad en el punto en que cambia la definición de la función, es decir en x=1: f(1)=$\sqrt{2}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$. Los lómites laterales no coinciden por lo que la función es discontinua de salto finito en x=2.

Ejemplo 6: estudia la continuidad de la siguiente función, explicando los tipos de discontinuidades

f(x)=$\begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} \text{ si } x \neq 5 \\ 0 \text{ si } x=5 \end{cases}$

El único punto problemático es x=5, tanto por ser el punto que anula el denominador como por estar definida la imagen de este punto por una fórmula diferente a los restantes números reales. Analizamos la continuidad en dicho punto; f(5)=0; $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{0}{0}$, debemos factorizar los polinomios: x^2-25=(x+5).(x-5), por tanto $\lim_{x \to 5} \frac{(x+5).(x-5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} (x+5) = 10$. En consecuencia el límite cuando x tiende a 5 es distinto de f(5) y por tanto tiene una discontinuidad evitable en x=5

Ejemplo 7: estudia la continuidad de la siguiente función, explicando los tipos de discontinuidades

f(x)=$\begin{cases} \frac{x+1}{x} \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} \text{ si } 1<x<2 \\ x+4 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

Puntos problemáticos: Además de x=1 y x=2, puntos en los que cambia la fórmula de la función, tenemos que estudiar el punto x=0 por anular el denominador de la función definida een el intervalo (-∞,1).

Continuidad en x=0: f(0) no existe; $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0} =$. En x=0 tiene una discontinuidad asintótica. Continuidad en x=1: f(1)=2; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x} = 2$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$. Como x^2-1=(x+1).(x-1) $\lim_{x \to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} x+1 = 2$ Al coincidir los límites por la izquierda, por la derecha y la imagen la función es continua en x=1

Continuidad en x=2: f(2)=6; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 3$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^*} x+4 = 6$. Al ser diferentes los dos límites laterales hay una discontinuidad de salto finito en x=2.

Ejemplo 8: Calcula a para que la función f(x)=$\begin{cases} x+1 \text{ si } x<1 \\ 5-a.x^2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en x=1

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x+1 = 2$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 5-ax^2 = 5-a$; f(1)=5-a

para que la función sea continua en x=1 los dos límites laterales y la imagen deben ser iguales, es decir: 2=5-a, despejando a=3

Ejemplo 9: Calcula el valor de a para que la función: f(x)=$\begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } x<8 \\ \frac{x^2-32}{x-4} & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$ sea continua en x=8.

$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8.a}$; $\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \frac{x^2-32}{x-4} = \frac{64-32}{8-4} = 8$; f(8)=8. Para que sea continua en x=8 los dos límites laterales y la imagen deben ser iguales, es decir: $\sqrt{8a} = 8$; elevando al cuadrado ambos términos obtenemos 8a=64 y despejando a=64/8=8

8. Cálculo de límites indeterminados del tipo ∞/∞ en funciones racionales o en las que intervengan radicales. Cálculo de límites del tipo 0/0 en funciones racionales

Ejemplo 1:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+5}{3x^2-x+2} = \infty$ Al ser el grado del numerador mayor que el del denominador

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+4x-5}{3x^3-7x^2+4x-6} = 0$ Al ser el grado del denominador mayor que el del numerador

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3-5x^2+3x-9}{3x^3+3x} = \frac{6}{3} = 2$ Al ser numerador y denominador del mismo grado tiende al cociente de los coeficientes principales

Ejemplo 2:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x^2-2x+1}} = 0$ Por ser mayor el grado del denominador

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{5x^2+7x-5}} = \infty$ Por ser mayor el grado del numerador

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-x+2}} = \frac{3}{1} = 3$ Por ser del mismo grado

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2-5x+2}+\sqrt{4x^2+6x-3}} = \frac{2+1}{1+\sqrt{4}} = \frac{3}{3} = 1$ Son del mismo grado el numerador y el denomindor, grado 1, por tanto tiende al cociente de los coeficientes principales. En el numerador el coeficiente principal es la suma de los coeficientes de los dos sumandos, al ser ambos de grado 1, lo mismo ocurre en el denominador.

Ejemplo 3:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}$, indeterminado. Para determinarlo hay que factorizar los dos polinomios y simplificar. x^2-1=0$\Rightarrow x = \pm 1$, por tanto x^2-1=(x+1).(x-1); x^2-2x+1=0$\Rightarrow$x=1, Por tanto x^2-2x+1=(x-1).(x-1). En consecuencia $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1).(x-1)}{(x-1).(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$. Buscamos las raíces y factorizamos numerador y denominador.

x^2-4=0$\Rightarrow x = \pm 2$; x^2-3x+2=0$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2).(x-2)}{(x-1).(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

9. Cálculo de logarítmos de números que se puedan escribir como potencia de la base del logarítmo, aplicación de las propiedades de los logaritmos a expresines algebraicas, resolución de ecuaciones logarítmicas. Hay suficientes ejemplos resueltos en el boletín de logaritmos