SOLUCIONES BOLETÍN DE DERIVAS Y RECTA TANGENTE.

1. f ‘(1)=$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-3(1+h)-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2(1+2h+h^2)-3(1+h)+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2+4h+2h^2-3-3h+1}{h}=$
$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h+2h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(1+2h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(1+2h)=1$

2. $y=x^3$, $y=x^3+6$; $y=x^3-3$. Existen infinitas, todas las del tipo $y=x^3+K$ siendo K un número real

3. Si, las funciones polinómicas de grado 1 cuyas gráficas son rectas. Ejemplo y=3x+5

4. Esto es equivalente a preguntar si en la función y= 2/x existe algún punto cuya derivada valga -2. Y’=$\frac{-2}{x^2}$ =-2; resolviendo la ecuación x=±1 y por tanto los puntos serían $P_1=(1,2)$ y $P_2=(-1,-2)$

5. Que la recta tangente en x=1 sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, y=x, es equivalente a decir que la derivada en x=1 debe valer 1(f ‘(1)=1).

Derivamos la función y’=$\frac{3x^2(x^3-a)-(x^3+a)3x^2}{(x^3+a)^2}=\frac{3x^5-3ax^2-3x^5-3ax^2}{(x^3+a)^2}=\frac{-6ax^2}{(x^3+a)^2}$Y’=; f ‘(1)=$\frac{-6a}{(1+a)^2}=1$.

Resolviendo la ecuación obtenemos: a=$-2\pm\sqrt{3}$

6. La recta 13x-y-1=0 puede escribirse en forma explícita : y=13x-1 y su derivada será y’=13

Buscar los puntos de la funcion $f(x)=x^3+x$ cuyas tangentes sean paralelas a la recta es equivalente a buscar los puntos cuya derivada valga 13. f ‘(x)=$3x^2+1=13$: resolviendo x=±2

$P_1=(2, 10)$, recta tangente : y = 13x - 16 ; $P_2=(-2, -10)$, recta tangente: y = 13x + 16

7. a) Que sus rectas tangentes sean paralelas en un punto es equivalente a decir que las derivadas en ese punto son iguales. f ’(x)=2x-6, g ‘(x)=-2x+2. Por tanto 2x-6=-2x+2⇒x=2

Punto de f(x) = (2, 4) y punto de g(x) = (2,6).

b) que sus tangentes sean perpendiculares es equivalente a decir que f ‘(x)= -1/g ‘(x) entonces

$2x-6=-\frac{1}{-2x+2}$ resolviendo $x=2\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. f(x) = $\frac{2x+1}{x-2}$ y’=$\frac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$; f(3)=7, f ‘(3)=-5. Recta tangente en x=3 -5(x-3)=y-7

La asíntota horizontal a la fuunción es y=2 por tanto debemos resolver el sistema formado por esas dos rectas y obtenemos como solución x=4 e y=2 es decir P(4,2)

9. Las rectas tangentes a la función $f(x) = x^2 - 2x+1$ en un punto cualquiera x=a tendrán la siguiente forma: $f(a)=a^2-2a+1$, f ‘(x)=2x-2 ⇒ f ‘(a)= 2a-2 , por tanto la recta tangente será $(2a-2)(x-a)=y-(a^2-2a+1)$. Dado que sabemos que dicha tangente pasa por el punto (5,0) podemos sustituir en esa recta x e y por 5 y 0 respectivamente obteniendo $(2a-2)(5-a) = -(a^2-2a+1)$. Resolviendo esa ecuación obtenemos que a=1 o a=9 para a=1 la recta tg es y=0 y para a=9 la recta tg es 16(x-9)=y-64

10. Pasa por (0,5)⇒ $f(0) = 5$. En el punto (2,-3) tiene tangente horizontal⇒ $\begin{cases} f(2) = -3 \\ f'(2)=0 \end{cases}$ resolviendo el sistema que se obtiene al plantear esas 3 ecuaciones se obtiene: a=2, b=-8 y c= 5

11. Nos dicen que la recta tangente tiene de pendiente 3, esto significa que en ese punto la derivada vale 3. $y' = 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$ Hallamos las rectas tangentes en x=1 y x=-1 y comprobamos cual de ellas pasa por el punto (0,2) obteniéndose que la válida es la tangente en x=1

12. $f'(x) = 2x-10 = 0 \Rightarrow x=5$

13. y'= 2x-6. a) paralela a la bisectriz del primer cuadrante: $2x-6=1 \Rightarrow x=7/2$; b) paralla a la bisectriz del segundo cuadrante: $2x-6= -1 \Rightarrow x=5/2$.

14. Si la recta tangente forma 45º con la parte positiva del eje de abscisas y'=tg45º=1.

$$y' = \frac{18}{2\sqrt{6x}} = 1 \Rightarrow \quad x = 27/2$$

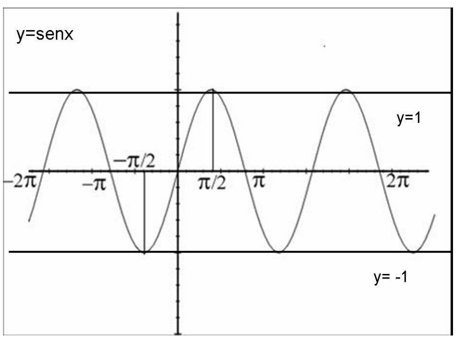
15. $y' = \frac{3(x^2+2) - 3x.2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

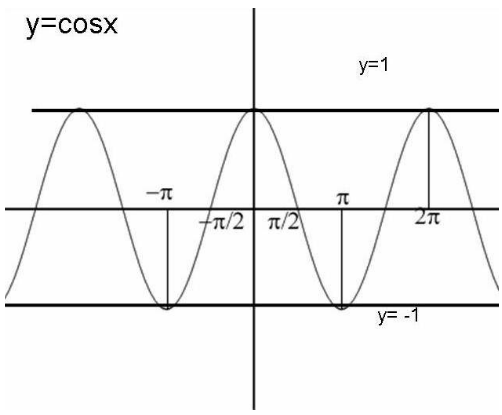
16. Para que la recta tg sea paralela a la recta y=2x-5 la derivada debe ser igual a 2.

$$y' = 2x-4 = 2 \Rightarrow x = 3 \quad \text{Recta tg en } x=3\text{: } 2(x-3)=y$$

17. A) Si la función es una recta, su recta tangente coincide en todos sus puntos con ella misma y por tanto tiene en todos sus puntos la misma pendiente. Es decir, si la función es del tipo y=ax+b $a,b \in R$, su recta tangente en cualquier punto $x=x_0$ coincide con la propia recta y=ax+b por tanto su pendiente es m=a $\forall x_0 \in R$.

B) Si, la misma recta puede ser tangente a una función en diferentes puntos. Si observamos por ejemplo la función y=senx, vemos que las rectas y=1 e y=-1 son tangentes a la función en infinitos puntos. Lo mismo ocurre con la función y=cosx





C) a) falso ej y=|x| es continua en x=0 y no es derivable. b) verdadero, c) falso, nos sirve el mismo ejemplo que en el apartado a; d)verdadero

D) f '(2)=$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-(2+h)+(2+h)^2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-2-h+(4+4h+h^2)-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^{2+3h}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(h+3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+3)=2$. Su significado geométrico es la pendiente de la recta tangente en x=2, La recta tg en x=2 es: 2(x-2)=y-3, su punto de corte con el eje OX es el punto P(1/2,0)

E) TVM=$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{L(2+b)-Lb}{2}=\frac{L(\frac{2+b}{b})}{2}=L2\Rightarrow L\left(\frac{2+b}{b}\right)=L2^2\Rightarrow\frac{2+b}{b}=4\Rightarrow b=2/3$

F)y'=$\begin{cases} 2 \text{ si } x<0 \\ 2x/3 \text{ si } x>0 \end{cases}$ no existe f '(0) por ser diferentes las derivadas laterales en ese punto.

Nos preguntan si existe algún punto con recta tangente horizontal, o lo que es lo mismo en el que la derivada valga cero, analizando la derivada vemos que no se anula en ningún punto por tanto no existe ningún punto con recta tangente horizontal.

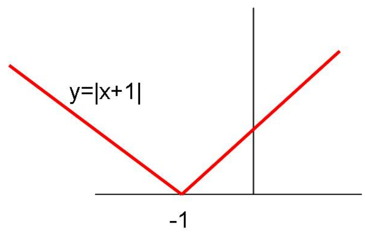
G) Si analizamos su gráfica vemos que el límite de las secantes por la izd y por la derecha de x=0 no coinciden, por la tanto no existe la recta tangente en ese punto, por tanto no es derivable en x=0. Hallamos la función derivada y=$\begin{cases} -x \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$ y'=$\begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'_-(0)=-1 \\ f'_+(0)=1 \end{cases}$

H) Estudio analítico: y=|x+1|=$\begin{cases} -x-1 \text{ si } x<-1 \\ x+1 \text{ si } x\geq -1 \end{cases}$ La función es continua y derivanle en R-{-1} por estar constituida por funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en x=-1

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=0=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$=f(-1) por tanto es continua en R. Y'=$\begin{cases} -1 \text{ si } x<-1 \\ 1 \text{ si } x>-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f'_-(-1)=-1 \\ f'_+(-1)=1 \end{cases}$

por tanto no es derivable en x=-1.

Para el estudio gráfico dibujamos la función y comprobamos que el límite de las rectas secantes a la izd y a la derecha de x=-1 no coincide.



I) y=x^2 ⇒y'=2x, f '(2)=4 ; y=x^2+2⇒ y'=2x, f '(2)=4. Sus pendientes en x=2 son iguales, las rectas tangentes en dicho punto sin paralelas.

J) La derivada de y=x es y'=1 para que dicha recta sea paralela en algún punto a la recta tangente a y=x^3-7x+1 las derivadas deben ser iguales, es decir: 1=3x^2-7⇒ $3x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8/3}$

No existe ningún punto con tangente paralela a x=1 ya que ello implicaría que la recta tangente fuese vertical y para ello la función no podría ser derivable en ese punto, dado que la función es polinómica y por tanto derivable en todos sus puntos no tiene ninguna recta tangente vertical.

K) a) y'=0; b) y'=1

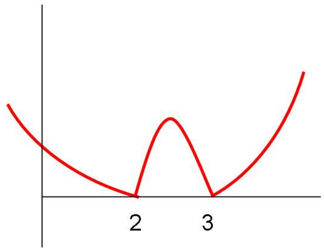
L) Si siempre que se diferencien en una constante. Por ejemplo y=x^2 e y=x^2+6- Todas sus gráficas se obtienen a partir de una de ellas trasladandola verticalmente.

M) Estudio analítico: x^2-5x+6=0$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$ La función y=|x^2-5x+6|=$\begin{cases} x^2-5x+6 \text{ si x<2} \\ -x^2+5x-6 \text{ si } 2\le x\le 3 \\ x^2-5x+6 \text{ si x>3} \end{cases}$

Al estar constituida por funciones polinómicas la función es continua y derivable en R-{2,3}, estudiamos la continuidad en esos puntos: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$=f(2)=0;

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 3^+} f(x)$=f(3)=0; Por tanto f es continua en x=2 y x=3. Estudiamos ahora la derivabilidad en esos puntos y'=$\begin{cases} 2x-5 \text{ si x<2} \\ -2x+5 \text{ si 2<x<3} \\ 2x-5 \text{ si x>3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -1 \\ f'_+(2) = 1 \\ f'_-(3) = -1 \\ f'_+(3) = 1 \end{cases}$ por tanto no es derivable en x=2 ni en x=3 al no coincidir las derivadas laterales.

Para el estudio gráfico dibujamos la función y comprobamos que el límite de las rectas secantes a la izd y a la derecha de x=2 y de x=3 no coincide.



18. No es correcto. La recta tangente a una función en un punto P se define como el límite de las rectas secantes PQ cuando el punto Q tiende al punto P

19.sea g(x)=f(x)+c, g'(x)=$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ =$\lim_{h\to 0}\frac{f((x+h)+c-(f(x)+c)}{h}$ =$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ =f '(x)

20.TVM=$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{3}{2+h}-\frac{3}{2}}{h} = \frac{\frac{6-6-3h}{2(2+h)}}{h} = \frac{-3h}{2h(2+h)} = \frac{-3}{2(2+h)}$ Para calcular f '(1) debemos calcular la TVI que será el límite de la TVM cuando h tiende a Cero. $f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{-3}{2(2+h)} = -\frac{3}{4}$

21. A) y=π, b) 2(x+1)=y-6, c)y=17, d) x-2=y-L4, e)1/2(x-2)=y+1, f)x+1=y, g)Recta tangente: x-1=y, recta normal:-(x-1)=y

22. Y'=$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x=1$ Recta tg en x=1: 1/2(x-1)=y-1

23.y'=-7+12x-4x^3=1, resolviendo x=1, x=-2

24.y'=$\frac{2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow x=1$

25. y'=2x-7; i) 2x-7=0, x=7/2, recta tangente: y+37/4=0; ii)2x-7=1, x=4 recta tg x-4=y+9, iii) 2x-7=-5, x=1 recta tg: -5(x-1)=y+3

26. A) tg: $2e^2$(x-4)=y-4e^2, normal: -1/2e^2 (x-4)=y-4e^2 b) tg: (x-1/2)=y-π/4, normal:

-(x-1/2)=y-π/4

27. tg30º=1/ $\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ y'=2x=1/$\sqrt{3}$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

28. la tg en (0,-4) paralela a y=-x+5$\Rightarrow$ $\begin{cases} f(0)=-4 \\ f'(0)=-1 \end{cases}$ la tg en x=1 es 12x-y-12=0 o lo que es lo mismo y=12x-12$\Rightarrow$f '(1)=12 Planteando esas 3 ecuaciones para la función que tenemos y resolviendo el sistema obtenemos que: d=-4, c=-1, a=3, b=2

29. a)y=(arc senx)$^{\text{arc tgx}}$; Aplicamos la derivación logarítmica:

Ly=arctgx.L(arcsenx); $\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}.L(arcsenx)+arctgx.\frac{1}{arcsenx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,despejando

y=$\left(\frac{1}{1+x^2}.L(arcsenx)+arctgx.\frac{1}{arcsenx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.(arc senx)$^{\text{arc tgx}}$;

b)y=$\sqrt{(senx)^{\cos x}}$ B)y==$(senx)^{\cos x/2}$

Ly=$\frac{\cos x}{2}L(senx)$; derivando $\frac{y'}{y}=\frac{-senx}{2}L(senx)+\frac{\cos x}{2}\frac{1}{senx}\cos x$ Despejamos y':

y'=$(\frac{-senx}{2}L(senx)+\frac{\cos x}{2}\frac{1}{senx}\cos x)$.Y'==$\sqrt{(senx)^{\cos x}}$

c)y=[(x^2+x+1)]$^{\text{arc tg x}}$

Ly=arctgx.L(x^2+x+1); $\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}L(x^2+x+1)+arctgx.\frac{2x+1}{x^2+x+1}$;

y'=$(\frac{1}{1+x^2}L(x^2+x+1)+arctgx.\frac{2x+1}{x^2+x+1})$.[(x^2+x+1)]$^{\text{arc tg x}}$

30. L(x)y-seny=5. En primer lugar derivamos la función: $\frac{1}{x.}y.+L(x)y'-\cos y.y'$=0

En 2º lugar despejamos y', y'(Lx-cosy)= $-\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{-y}{x.(Lx-\cos y)}$

31. a)y=(senx)$^{\text{cosx}}$ en x=π/2 En primer lugar vamos a derivar la función. Aplicamos logaritmos:

Ly=cosx.L(senx); $\frac{y'}{y}=-senx.L(senx)+\frac{\cos x.\cos x}{senx}\Rightarrow y'=(-senxL(senx)+\frac{\cos^2 x}{senx}).senx^{\cos x}$

Recta tangente: x_0=π/2; y_0=f(π/2) $=(sen(\frac{\pi}{2}))^{\cos(\pi/2)}=1^0=1$; m=f'($\pi$/2) = 0

Recta tangente: y=1; al ser la recta tangente horizontal, la normal es la recta vertical que pasa por ese punto, es decir x=π/2

b) y=arctgx en x=1; y'=$\frac{1}{1+x^2}$ Recta tangente: x_0=1; y_0=arctg1=π/4 m=f '(1)=1/2

Recta 1/2(x-1)=y-π/4. La pendiente de la normal es m'=-1/m, en nuestro caso m'=-2. Por lo tanto la recta normal será -2(x-1)=y-π/4

c)arcsen(x) en x=0.5 y'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Recta tangente: x_0=0'5; y_0=arcsen(0'5)=π/6

m=f '(0'5)=$\frac{1}{\sqrt{1-0'25}}=\frac{1}{\sqrt{0'75}}$. Recta: $\frac{1}{\sqrt{0'75}}$ (x-0'5)=y-π/6. La pendiente de la normal es m'=$-\sqrt{0'75}$, En consecuencia la recta normal es: $-\sqrt{0'75}$ (x-0'5)=y-π/6

32. En primer lugar hallamos la tangente a la curva x.y=1 en x=1. La curva en ecuación explícita viene dada por y=1/x. Y su derivada será y'=-1/x^2. X=1, f(1)=1; f '(1)=-1, luego la recta tangente será -1(x-1)=y-1 o lo que es lo mismo: x+y-2=0. Intersecamos esa recta con los ejes coordenados : Eje OX$\begin{cases} x+y+2=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-2$

Eje OY:$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\Rightarrow y=2$ Por lo tanto el triángulo rectángulo formado por la recta tangente y los dos ejes coordenados tiene de base 2 unidades y de altura también 2 unidades por lo que su área será S=$\frac{basexaltura}{2}=\frac{2x2}{2}=2$

33. A) una función es continua en un punto x=a de su dominio si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

B)f(x)=$\begin{cases} 2^x \text{ si } x<0 \\ \sqrt{x+1} \text{ si } 0<x<3 \\ 2x-3 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$ La función es continua en $(-\infty, 0)$ por serlo la función exponencial, es continua en (0,3) ya que y=$\sqrt{x+1}$ es continua si x≥ −1, y es continua en (3,∞) por ser en ese entervalo una función polinómica. Debemos estudiar la continuidad en x=0 y x=3

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2^x = 2^0 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+1} = 1$, f(0) no existe por tanto hay una discontinuidad evitable en x=0

Continuidad en x=3: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{x+1} = 2$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x-3 = 3$ f(3)=3 por tanto en x=3 hay una discontinuidad de salto finito

C) f no puede ser derivable en x=0 ni en x=3 al no ser continua en dichos puntos

34. f(x)=$\begin{cases} x^2+1 \text{ si } x>0 \\ x+1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ La función es continua y derivable en R-{0} al estar constituida por dos funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en x=0 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+1 = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}$ x^2+1=1; f(0)=1 por tanto es continua. Estudiamos la derivavilidad y’= $\begin{cases} 2x \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ si } x<0 \end{cases} = \Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = 1 \\ f'_+(0) = 0 \end{cases}$ luego no es derivable en x=0.

35. f(x)=$\begin{cases} x^2+bx \text{ si } x \leq 1 \\ 2x-1 \text{ si } x>1 \end{cases}$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+bx = 1+b$;$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-1 = 1 \Rightarrow 1+b=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=0$. Para b=0 es continua pero debemos comprobar si es o no derivable:

y’=$\begin{cases} 2x+b \text{ si b}<1 \\ 2 \text{ si } x>1 \end{cases}$ para b=0 coinciden las derivadas por la izd y por la dcha en x=1 y por tanto para ese valor es derivable en x=1

36. y=|x+4|=$\begin{cases} -x-4 \text{ si } x<-4 \\ x+4 \text{ si } x \geq -4 \end{cases}$ La función es continua y derivanle en R-{-4} por estar constituida por funciones polinómicas. Estudiamos la continuidad en x=-4

$\lim_{x\to -4^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to -4^+} f(x)$=f(-4) por tanto es continua en R. y’=$\begin{cases} -1 \text{ si } x<-4 \\ 1 \text{ si } x>-4 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} f'_-(-4) = -1 \\ f'_+(-4) = 1 \end{cases}$ por tanto no es derivable en x=-4.

37. A) y=$\begin{cases} -x \text{ si } x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$; $f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$

Por tanto no es derivable en x=0

B) y=$\begin{cases} 1 \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$; $f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$Por tanto no es derivable en x=0

c) y=$\begin{cases} 2x-3 \text{ si } x<1 \\ -x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ $f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)-3+1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2+2h-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$

$f'_+(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-(1+h)+1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$Por tanto no es derivable en x=1

38. A) $\begin{cases} e^{x-1} \text{ si } x \leq 1 \\ Lx \text{ si } x>1 \end{cases}$; La función es continua y derivable en (-∞,1) por ser una función exponencial y tambien en (1,∞) ya que y=Lx es continua y derivable si x>0. Estudiamos la continuidad en x=1 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx = L1 = 0$ no es continua en x=1 y por tanto no es derivable.

b)$y = \begin{cases} \cos x - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{2x}{\pi} \text{ si } 0<x \leq \pi/2 \\ senx \text{ si } x>\pi/2 \end{cases}$ La función es continua y derivable en $(-\infty,\infty)$- $\{0.\pi/2\}$ por serlo las funciones que la forman. Continuidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x - 1 = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x/\pi = 0$, f(0)=0 es continua en x=0

Continuidad en x=π/2. $\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} 2x/\pi = 1; \lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^+} senx = 1$, f($\pi$/2)=1 es continua en x=$\pi$/2 Estudio de la derivabilidad: $y' = \begin{cases} -senx \text{ si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \text{ si } 0<x < \pi/2 \\ \cos x \text{ si } x>\pi/2 \end{cases}$; $\begin{cases} f'_-(0) = 0 \\ f'_+(0) = 2/\pi \end{cases}$;

$\begin{cases} f'_-(\pi/2) = 2/\pi \\ f'_+(\pi/2) = 0 \end{cases}$ No es derivable en x=0 ni en x=π/2

c) $y = \begin{cases} \frac{x}{Lx} \text{ si } x>e \\ e \text{ si } x \leq e \end{cases}$ La función y=x/Lx es continua y derivable en $(0,\infty) - \{1\}$ y por tanto lo es en (e,∞), la función y=e es continua y derivable por ser una función constante, en consecuencia nuestra función es continua y derivable en R-{e}, debemos estudirla en este punto.

Continuidad en x=e $\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} x/Lx = e; \lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} e = e$, f(e)=e es continua en x=e

y'=$\begin{cases} \frac{Lx-1}{(Lx)^2} \text{ si } x>e \\ 0 \text{ si } x<e \end{cases}$ $\begin{cases} f'_-(e) = 0 \\ f'_+(e) = 0 \end{cases}$ es derivable en x=e

d) y=$\begin{cases} x^2 - x + 1 \text{ si } x \leq 1 \\ Lx + x \text{ si } 1<x<e \\ x+1 \text{ si } x \geq e \end{cases}$; y'=$\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x<1 \\ 1/x+1 \text{ si } 1<x<e \\ 1 \text{ si } x>e \end{cases}$

y=Lx es continua y derivable en (1,e) por serlo en (0,∞), el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R por ser polinómicas. Por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en x=1 y x=e

Derivabilidad en x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 - x + 1 = 1; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx + x = 1; f(1) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=1

$f'_-(1) = 1; f'_+(1) = 2 \Rightarrow$ f no es derivable en x=1

Derivabilidad en x=e

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-}(Lx + x) = 1 + e; \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+}(x + 1) = e + 1; f(e) = e + 1 \Rightarrow$f es continua en x=e
$f'_-(e) = 1/e + 1;\ f'_+(e) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=e
Por lo tanto f es derivable en todo R-{1,e}

$$e)y = \begin{cases} 2^x \text{ si } x \le 0 \\ x^2 + 1 \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ Lx + e^{x-1} + 1 \text{ si } x>1 \end{cases} ;\ y' = \begin{cases} 2^x L2 \text{ si } x<0 \\ 2x \text{ si } 0<x<1 \\ 1/x + e^{x-1} \text{ si } x>1 \end{cases}$$

y=Lx es continua y derivable en $(1,\infty)$, el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R , por lo tanto los únicos problemas de derivabilidad pueden estar en x=0 y x=1
Derivabilidad en x=0
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2^x = 1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 + 1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = 2^0 L2 = L2;\ f'_+(0) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0
Derivabilidad en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + 1) = 2; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(Lx + e^{x-1} + 1) = 2\ ; f(1) = 2 \Rightarrow$f es continua en x=1
$f'_-(1) = 2;\ f'_+(1) = 2 \Rightarrow$ f es derivable en x=1. Por tanto f es derivable en R-{0}

$$f)\ y = \begin{cases} senx \text{ si } x \le 0 \\ L(\cos x) + x \text{ si } 0<x<\pi/2 \end{cases} ;\ y' = \begin{cases} \cos x \text{ si } x<0 \\ \frac{-senx}{\cos x} + 1 \text{ si} 0<x<\pi/2 \end{cases}$$

En el intervalo $(0,\pi/2)$ la función coseno es mayor que cero y por lo tanto y=L(cosx) es continua y derivable en ese intervalo. El resto de las funciones que componen f son continuas y derivables en todo R. Por lo tanto el único punto que puede tener problemas es x=0
Derivabilidad en x=0
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} senx = 0; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} L(\cos x + x) = L1 = 0; f(0) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = \cos 0 = 1;\ f'_+(0) = \frac{-sen0}{\cos 0} + 1 = 1 \Rightarrow$ f es derivable en x=0
f es derivable en $(-\infty, \pi/2)$

$$g)y = \begin{cases} e^{x^2} \text{ si } x \le 0 \\ x + 1 \text{ si } 0<x<1 \\ Lx + 2x \text{ si } x \ge 1 \end{cases} ;\ y' = \begin{cases} e^{x^2}.2x \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } 0<x<1 \\ 1/x + 2 \text{ si } x>1 \end{cases}$$

La función y=Lx es derivable en $(0,\infty)$ y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida, el resto de las funciones que componen f son derivables en todo R. Por lo tanto los únicos puntos problemáticos son x=0 y x=1
Derivabilidad en x=0
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{x^2} = 1; \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x + 1) = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0
$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0
Derivabilidad en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x + 1) = 2; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(Lx + 2x) = 2; f(1) = 2 \Rightarrow$f es continua en x=1
$f'_-(1) = 1;\ f'_+(1) = 3 \Rightarrow$ f no es derivable en x=1
Luego f es derivable en R-{0,1}

$$h)\ y = \begin{cases} senx \text{ si } 0 \le x \le \pi/2 \\ \cos ecx \text{ si } \pi/2<x<2\pi \end{cases} ;\ y' = \begin{cases} \cos x \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ -\cos ecx.ctgx \text{ si } \pi/2<x<2\pi \end{cases}$$

La función senx es derivable en R. La función y=cosecx=$\frac{1}{senx}$ es continua y derivable en todos los puntos en los que senx≠0. En el intervalo $(\pi/2, 2\pi)$ esta función tiene un punto de discontinuidad en x=π y por lo tanto en ese punto f no es continua y, en consecuencia, no es derivable. Hay además otro punto que puede ser problemático, x=π/2, al haber un cambio de función. Estudiamos la derivabilidad en ese punto.

$\lim\limits_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^-} senx = 1; \lim\limits_{x\to\pi/\pi/2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi/2^+} \cos ecx = 1; f(\pi/2) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=$\pi$/2

$f'_-(\pi/2) = \cos\pi/2 = 0;\ f'_+(\pi/2) = -\cos ec\pi/2.ctg\pi/2 = 0 \Rightarrow$ f es derivable en x=π/2

Por lo tanto f es derivable en $(0, 2\pi) - \{\pi\}$

i) y=$\begin{cases} tgx \text{ si } 0 \le x \le \pi \\ senx \text{ si } \pi<x<2\pi \end{cases}$ y'=$\begin{cases} \sec^2 x \text{ si } 0<x<\pi \\ \cos x \text{ si } \pi<x<2\pi \end{cases}$

La función y=tgx tiene en el intervalo (0,π) un punto de discontinuidad en x=π/2, por lo tanto en ese punto f no es continua ni derivable. El otro punto en el que puede haber problema es x=π

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} tgx = 0; \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} senx = 0; f(\pi) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=$\pi$

$f'_-(\pi) = \sec^2\pi = 1;\ f'_+(\pi) = \cos\pi = -1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=π

f es derivable en $(0,2\pi) - \{\pi/2, \pi\}$

j) y=$\begin{cases} x^3 - 1 \text{ si } x \le 0 \\ \dfrac{3}{x-2} \text{ si } 0<x<3; \\ x^2 - 6x + 12 \text{ si } x \ge 3 \end{cases}$: y'=$\begin{cases} 3x^2 \text{ si } x<0 \\ \frac{-3}{(x-2)^2} \text{ si } 0<x<3 \\ 2x - 6 \text{ si } x>3 \end{cases}$

La función y=$\dfrac{3}{x-2}$ es continua en R-{2}, como en ese punto coincide con la fórmula de nuestra función , f no es continua ni derivable en x=2. El resto de las funciones que componen f son derivables en todo R, debemos estudiar por lo tanto la derivabilidad en los puntos x=0 y x=3 en los que hay cambio de función

Derivabilidad en x=0

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(x^3 - 1) = -1; \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ f no es continua en x=0 y por lo tanto no es derivable en ese punto.

Derivabilidad en x=3

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} \frac{3}{x-2} = 3; \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}(x^2 - 6x + 12) = 3; f(3) = 3 \Rightarrow$f es continua en x=3

$f'_-(3) = -3;\ f'_+(3) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=3

f es derivable en R-{0,2,3}

k) y=$\begin{cases} x^2 \text{ si } x \ge 0 \\ \dfrac{x}{1-x} \text{ si } x<0 \end{cases}$ y'=$\begin{cases} 2x \text{ si } x>0 \\ \frac{1-x+x}{(1-x)^2} \text{ si } x<0 \end{cases}$ $= \begin{cases} 2x \text{ si } x>0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} \text{ si } x<0 \end{cases}$

La función y=$\dfrac{x}{1-x}$ es derivable en todo R-{1} y por lo tanto lo es en el intervalo en que está definida. La función y=x^2 es derivable en R. Por lo tanto el único punto problemático es x=0.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x^2 = 0; \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{1-x} = 0; f(0) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0

$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = 1 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0. Por tanto f es derivable en R-{0}

l)$\begin{cases} e^x \text{ si } x \le 0 \\ \cos x \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ L(senx) \text{ si } \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$ y'=$\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ -senx \text{ si } 0<x<\pi/2 \\ \frac{\cos x}{senx} \text{ si } \pi/2<x<\pi \end{cases}$

La función y=L(senx) es derivable en $(\pi/2,\pi)$ al ser el senx positivo en dicho intervalo. El resto de las funciones que componen f son derivables en todo R. Por lo tanto los únicos puntos que pueden tener problemas son x=0 y x=$\pi/2$

Derivabilidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0

$f'_-(0) = e^0 = 1;\ f'_+(0) = -sen0 = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=0

Derivabilidad en x=$\pi/2$

$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^-} \cos x = 0; \lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} L(senx) = L1 = 0; f(\pi/2) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0

$f'_-(\pi/2) = -sen\pi/2 = -1;\ f'_+(\pi/2) = 0 \Rightarrow$ f no es derivable en x=$\pi/2$

f es derivable en $(-\infty,\pi) - \{0.\pi/2\}$

M) y=$\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } -2 \le x \le -1 \\ \frac{x^2-3}{2} \text{ si} -1<x \le 0 \end{cases}$ La función y=1/x es derivable en R-{0} y por tanto lo es en el intervalo en que está definida, La función y=$\frac{x^2-3}{2}$ es derivable en R y por lo tanto lo es en (-1,0). En consecuencia el único punto que puede tener problema es x=-1

Derivabilidad en x=-1

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1/x = -1; \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1; f(-1) = -1 \Rightarrow$f es continua en x=-1

Y'=$\begin{cases} -1/x^2 \text{si x<-1} \\ x \text{ si -1<x<0} \end{cases}$ $f'_-(-1) = -1;\ f'_+(-1) = -1 \Rightarrow$ f es derivable en x=-1 Por tanto f es derivable en $(-\infty, 0)$

39. Determinar el valor de los parámetros a,b, c y d de modo que las siguientes funciones sean derivables en todo R:

a) y=$\begin{cases} x^3+1 \text{ si } x \ge 0 \\ ax+b \text{ si x<0} \end{cases}$; y'=$\begin{cases} 3x^2 \text{ si x>0} \\ a \text{ si x<0} \end{cases}$

Dado que las funciones que componen f son derivables en todo R necesitamos únicamente garantizar la derivabilidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3+1 = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax+b = b; f(0) = 1 \Rightarrow$f es continua en x=0 si b=1

$f'_-(0) = 0;\ f'_+(0) = a \Rightarrow$A=0

F es derivable en R si a=0 y b=1

b) y=$\begin{cases} asenx \text{ si x<0} \\ bx \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ Lx+c \text{ si x>1} \end{cases}$ y'=$\begin{cases} a\cos x \text{ si x<0} \\ b \text{ si 0<x<1} \\ 1/x \text{ si x>1} \end{cases}$

y=Lx es derivable si x>0, las restantes funciones que componen f son derivabes en todo R. Entonces f será derivable en R si lo es en x=0 y en x=1

Derivabilidad en x=0:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} asenx = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} bx = 0;\ f(0) = 0 \Rightarrow$f es continua en x=0 $\forall$a y b$\in R$

$f'_-(0) = a.\cos 0 = a;\ f'_+(0) = b \Rightarrow a = b$ para que f sea derivable en x=0

Derivabilidad en x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx = b; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx+c = c\ ; f(1) = b \Rightarrow$f es continua en x=1 si b=c

$f'_-(1) = b;\ f'_+(1) = 1 \Rightarrow$ b=1

Reuniendo todas las condiciones tenemos$\begin{cases} a = b \\ b = c \\ b = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ si a=b=c=1 f es derivable en todo R

c) $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ ax^3+bx^2+cx+d \text{ si } 0\le x\le 2 \\ \cos(x-2) \text{ si } x>2 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} e^x \text{ si } x<0 \\ 3ax^2+2bx+c \text{ si } 0<x<2 \\ -sen(x-2) \text{ si } x>2 \end{cases}$

Dado que todas las funciones que intervienen son derivables en R, f lo será si es derivable en x=0 y x=2

Derivabilidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1; \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} ax^3+bx^2+cx+d=d; f(0)=d \Rightarrow$ d=1 para que f sea continua en x=0; $f'_-(0)=e^0=1; f'_+(0)=c \Rightarrow$c=1 para que sea derivable

Derivabilidad en x=2

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^3+bx^2+cx+d)=8a+4b+2c+d=f(2); \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\cos(x-2)=1; \Rightarrow$ 8a+4b+2c+d=1 para que f sea continua en x=2 $f'_-(2)=12a+4b+c; f'_+(2)=-sen0=0 \Rightarrow$ 12a+4b+c=0. Reuniendo todas las condiviones tenemos: $\begin{cases} d=1 \\ c=1 \\ 8a+4b+2c+d=1 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$ y resolviendo:a=1/4, b=-1, c=1, d=1 para que f sea derivable en R

d) y= $\begin{cases} L(e+senx) \text{ si } x<0 \\ x^3+ax+b \text{ si } x\ge 0 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{(e+senx)} \text{ si } x<0 \\ 3x^2+a \text{ si } x>0 \end{cases}$

Dado que e+senx es siempre positivo, por estar senx comprendido entre -1 y 1, la función y=L(e+senx) es derivable para todo x<0; la otra función que compone f es un polinomio y, por lo tanto, derivable para todo x>0. Así pues el único punto en el que f puede no ser derivable es en x=0. Estudiamos la derivabilidad en ese punto:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} L(e+senx)=Le=1; \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^3+ax+b)=b=f(0) \Rightarrow$b=1

$f'_-(0)=1/e; f'_+(0)=a \Rightarrow a=1/e$; f es derivable en R si b=1 y a=1/e

E) y= $\begin{cases} ax \text{ si } x<1 \\ \dfrac{x^2-b}{2} \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} a \text{ si } x<1 \\ x \text{ si } x>1 \end{cases}$ Dado que las funciones que componen f son derivables en todo R el único punto problemático es x=1, estudiamos la derivabilidad en ese punto: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax=a; \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-b}{2}=\frac{1-b}{2}=f(1) \Rightarrow$a=$\frac{1-b}{2}$

$f'_-(1)=a; f'_+(1)=1 \Rightarrow a=1$; y despejando b=-1 f es derivable en R si b=-1 y a=1

F) y= $\begin{cases} -x^2+ax \text{ si } -1\le x<3 \\ bx+3 \text{ si } 3\le x\le 5 \end{cases}$ y'= $\begin{cases} -2x+a \text{ si } -1<x<3 \\ b \text{ si } 3<x<5 \end{cases}$ La función no puede ser derivable en R ya que su dominio es [-1,5], por tanto solo podríamos estudiar los valores de a y b que la hagan derivable en el intervalo (-1,5). Al estar compuesta por funciones polinómicas el único punto que podría tener problemas es x=3, estudiamos la derivabilidad en este punto:

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} -x^2+ax=-9+3a; \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} bx+3=3b+3=f(3) \Rightarrow$-9+3a=3+3b

$f'_-(3)=-6+a; f'_+(1)=b \Rightarrow -6+a=b$; El sistema obtenido no tiene solución por lo que no hay ningún valor de a y b que hagan que la función sea derivable em x=3

g) f(x)=$\begin{cases} x^2+4x+3 \text{ si } x\le 0 \\ -x^2+ax+b \text{ si } x>0 \end{cases}$ f'(x)=$\begin{cases} 2x+4 \text{ si } x<0 \\ -2x+a \text{ si } x>0 \end{cases}$ La función está compuesta por dos polinómicas y por lo tanto será derivable en R-{0}, estudiamos la derivabilidad en este punto

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+4x+3 = 3 = f(0); \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x^2+ax+b = b \Rightarrow$b=3

$f'_-(0)=4;\ f'_+(0)=a \Rightarrow a=4$; f es derivable en R si b=3 y a=4

h) y=$\begin{cases} x^3-x \text{ si } x<0 \\ ax+b \text{ si } x\ge 0 \end{cases}$ y'=$\begin{cases} 3x-1 \text{ si } x<0 \\ a \text{ si } x>0 \end{cases}$ La función está compuesta por dos polinómicas y por lo tanto será derivable en R-{0}, estudiamos la derivabilidad en este punto

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3-x = 0; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ax+b = b = f(0) \Rightarrow$b=0

$f'_-(0)=-1;\ f'_+(0)=a \Rightarrow a=-1$

I) y=$\begin{cases} 3-ax^2 \text{ si } x<1 \\ \frac{2}{ax} \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ y'=$\begin{cases} -2ax \text{ si } x<1 \\ \frac{-2a}{(ax)^2} \text{ si } x>1 \end{cases}$ la función está compuesta por un polinomio, derivable en todo R y por la función y=2/ax derivable en R-{0} y por tanto lo es donde está definida. En consecuencia el único punto que puede tener problema es x=1, estudiamos la derivabilidad en este punto: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3-ax^2 = 3-a; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a} = f(1) \Rightarrow$3-a=$\frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=1 \end{cases}$

$f'_-(1)=-2a;\ f'_+(1)=\frac{-2}{a} \Rightarrow -2a=\frac{-2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$ Como es necesario que se cumplan ambas condiciones es necesario que a=1 para que f sea derivable en R

J)y=$\begin{cases} bx^2+ax \text{ si } x\le -1 \\ \frac{a}{x} \text{ si } -1<x<1 \\ \frac{x^2+ax+1}{x+1} \text{ si } x\ge 1 \end{cases}$ y'=$\begin{cases} 2bx+a \text{ si } x<-1 \\ -a/x^2 \text{ si } -1<x<1 \\ \frac{x^2+2x+a-1}{(x+1)^2} \text{ si } x>1 \end{cases}$ La función está compuesta por una polinómica, derivable en R, la función y=a/x derivable en R-{0} y la función y=$\frac{x^2+ax+1}{x+1}$ Que es derivable en R-{-1} y por lo tanto donde está definida. Dado que en el intervalo [-1,1] la función que tenemos es y=a/x que no es derivable en x=0 por tanto nuestra función no puede ser derivable en todo R para ningún valor de a y b. Buscaremos los valores que la hagan derivable en R-{0} para lo cual tenemos que estudiar los puntos x=-1 y x=1

Derivabilidad en x=-1

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} bx^2+ax = b-a = f(-1); \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{a}{x} = -a \Rightarrow b-a=-a \Rightarrow b=0$

$f'_-(-1)=-2b+a, f'_+(-1)=-a \Rightarrow -2b+a=-a$ y dado que b=0 se sigue a=0

Veamos si para esos valores de a y b la función es derivable en x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a/x = a; \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+ax+1}{x+1} = \frac{2+a}{2} = f(1)$ para a=0 esos dos límites no serían iguales y la función no sería continua en x=1 y por tanto mo sería derivable. Así pues no hay ningún valor de a y b que haga al mismo tiempo que la función sea derivable en x=1 y x=-1

k) y=$\begin{cases} x^2+2 \text{ si } x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} \text{ si } 0<x<2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ si } x\ge 2 \end{cases}$ Y'=$\begin{cases} 2x \text{ si } x<0 \\ \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \text{ si } 0<x<2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} \text{ si } x>2 \end{cases}$ las funciones y=x^2+2 e y=$\frac{-x}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$ son derivables en todo R por ser polinómicas, la función y=$\sqrt{ax+b}$ será derivable en su dominio, hallaremos a y b para que la función sea derivable en x=0 y x=2 y deberemos comprobar despues que para esos valores ax+b sea $\ge$0 en el intervalo [0,2].

Derivabilidad en x=0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+2 = 2 = f(0); \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b=4$$

$f'_-(0)=0$; $f'_+(0)=\frac{a}{2\sqrt{b}}=\frac{a}{4}\Rightarrow a=0$; f es derivable en x=0 si a=0 y b=4

Veamos si con esos valores la función resulta derivable en x=2

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{ax+b} = \sqrt{2a+b}$ para a=0 y b=4 quedaría $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \sqrt{2a+b} = 2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 2$ por lo tanto para esos valores de a y b la función no sería continua en x=2, en consecuencia no hay ningún valor que haga que la función sea derivable en todo R

40. Si f(x) es creciente y derivable en R f '(x)$\geq$ 0 $\forall$x$\in$ R. Por lo tanto f '(x) no puede ser negativa pero si igual a cero. Por ejemplo: la función $y=x^3$ es creciente en R, sin embargo f '(0)=0 al ser $y'=3x^2$

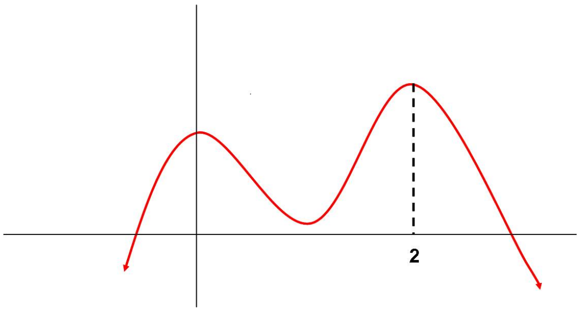
41. La función y=senx tiene un máximo relativo en $x=\pi/2$ y un mínimo relativo en $x=3\pi/2$. Al ser periódica de período 2π los puntos $x=\pi/2+2k\pi$ serán máximos $\forall k\in Z$ y los puntos $x=3\pi/2+2k\pi$ serán mínimos $\forall k\in Z$ por lo tanto tiene infinitos máximos y mínimos relativos.

42. Por definición $x=x_0$ es un extremo relativo si:

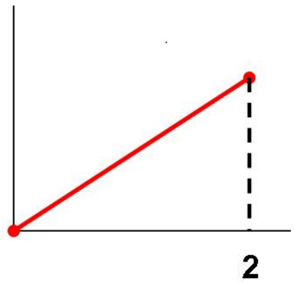
$$\exists\, Ex_0 \text{ tq } \forall x\in Ex_0\ x\neq x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0) \text{ (mínimo)} \\ f(x) < f(x_0) \text{ (máximo)} \end{cases}$$

Sin embargo, $x=x_0$ es un extremo absoltuto si $\forall x \in D(f) \begin{cases} f(x) > f(x_0) \text{ (mínimo absoluto)} \\ f(x) < f(x_0) \text{ (máximo absoluto)} \end{cases}$

Por ejemplo: en la función representada en la gráfica x=0 es un máximo relativo pero no absoluto; x=2 es un máximo absoluto y relativo



En la siguiente gráfica x=2 es un máximo absoluto pero no relativo



43. Falso, si f '(c)=0 en x=c la función puede ser creciente, decreciente o tener un extremo relativo. Por ejemplo la función $y=x^2$ tiene un mínimo relativo en x=0 y f'(0)=0; la función $y=-x^2$ tiene un máximo en x=0 y f '(0)=0; la función $y=x^3$ es creciente en R y por tanto creciente en x=0 y f '(0)=0; Por ultimo, la función $y=-x^3$ es decreciente en todo R y por lo tanto en x=0 y f '(0)=0

44. a) Falso, si f es creciente en $x=x_0$ la derivada en dicho punto puede no existir, ser cero o ser positiva. Serviría como ejemplo la función $y=x^3$ vista en el ejemplo anterior

b) Verdadero (ver teoría)

45. a)Si f '(a)=0 no podemos afirmar nada del comportamiento de la función en x=a, pudiendo ocurrir que la función en x=a sea creciente, decreciente o posea un extremo relativo.

b)Sabemos que f '(2)<0, es decir $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}<0 \Rightarrow$ que f(2+h)-f(2) y h deben tener distinto signo. Por tanto si $h<0\Rightarrow f(2+h)-f(2)>0$; si $h>0 \Rightarrow f(2+h)-f(2)<0$.

46. Si f '(a)=f ''(a)=0 la función puede presentar en x=a tanto un extremo relativo como un punto de inflexión

Ejemplo 1: $y=x^3$; $y'=3x^2$; $y''=6x$; $y'''=6$

$f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0\Rightarrow$ en x=0 la función posee un punto de inflexión

Ejemplo 2: $y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{iv}=24$

$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$; $f^{iv}(0)=24>0\Rightarrow$ en x=0 la función tiene un mínimo relativo

47. Los posibles extremos relativos están entre los puntos cuya derivada sea igual a cero, en nuestro caso esos puntos son x=1 y x=3. Sin embargo, el hecho de que f '(x)=0 no garantiza la existencia de extremo. Analicemos la función derivada en un entorno de dichos puntos:

Para x=1 observamos que a la izd del punto la derivada es positiva y por lo tanto f es creciente antes de x=1, a la derecha de x=1 la derivada continúa siendo positiva por lo que f es también creciente después de x=1. Es decir en un entorno de x=1 la función es creciente por lo que en x=1 también lo es y no posee extremo relativo en dicho punto

Si hacemos lo mismo para x=3 observamos que a la izda de ese punto la derivada es positiva por lo que f es creciente, sin embargo a la drecha de x=3 la derivada es negativa es decir que f es decreciente. Tenemos así que en x=3 la función pasa de ser creciente a ser decreciente por lo que x=3 es un máximo relativo.

En cuanto a los puntos de inflexión se encontrarán entre los puntos cuya segunda derivada es cero. Es decir aquellos en los que f ' una recta tangente horizontal. Observando la gráfica de f ' vemos que eso ocurre en x=7/3 y en x=1 y por tanto f ''(7/3)=0 y f ''(1)=0, por lo que ambos pueden ser puntos de inflexión. Pero que la derivada segunda sea cero es una condición necesaria para que haya un punto de inflexión, pero no es suficiente. Para garantizarlo estudiamos la función en un entorno de dichos puntos. Vemos que a la izquierda de x=1 la derivada es decreciente, por tanto f es cóncava; mientras que a la derecha de x=1 la derivada es creciente, por lo que f es convexa. En x=1 hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir x=1 es un punto de inflexión. En cuanto a x=7/3, vemos que a la izquierda de x=7/3 la derivada es creciente, por lo que f es convexa; mientras que a la derecha de x=7/3 la derivada es decreciente, y por tanto f es cóncava. En x=7/3 hay por lo tanto un cambio en la concavidad de la función, es decir x=7/3 es también un punto de inflexión.

48. Una función polinómica de 2º grado es de la forma $y=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$

Hallamos su derivada segunda para estudiar su concavidad y convexidad: $y'=2ax+b$; $y''=2a$

Si $a>0$ $y''>0 \forall x\in R$ luego la función es convexa en todo R

Si $a<0$ $y''<0 \forall x\in R$ luego la función es cóncava en todo R

49. Una función polinómica de tercer grado es de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ Para garantizar que tiene un punto de inflexión debemos encontrar un punto que anule la derivada segunda y ver que en dicho punto la derivada tercera es distinta de cero.

$y'=3ax^2+2bx+c$; $y''=6ax+2b=0\Rightarrow x=\frac{-2b}{6a}$ Esta ecuación tiene solución para cualquier valor de a y b excepto para a=0 pero a es distinto de cero al ser la función de tercer grado. Para ese valor de x hay un punto de inflexión ya que $f'''(x)=6a\neq 0$

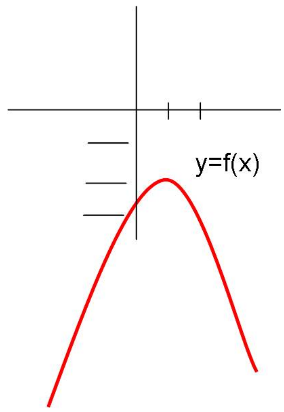
En una función polinómica de 4º grado no ocurre lo mismo ya que $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$;

y'=$4ax^3+3bx^2+2cx+d$; y''=$12ax^2+6bx+2c$ que, al ser una ecuación de 2º grado, no siempre tiene solución. Por lo que no se puede garantizar la existencia de puntos de inflexión.

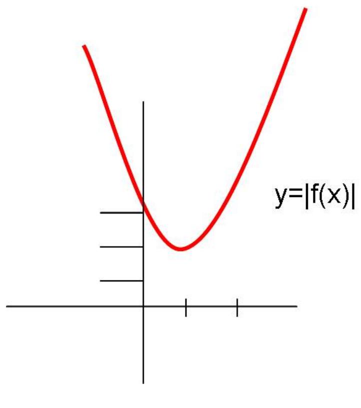
50. En x=1 la derivada vale cero. De ello no podemos deducir nada acerca del comportamiento de la función, por lo tanto estudiamos la derivada en un entorno de x=1.
Si x<1 f '(x)>0⇒f es creciente; si x>1 f '(x)<0⇒ f es decreciente, por lo tanto en x=1 la función tiene un máximo.
En x=2 f '(2)<0 lo que significa que f es creciente en ese punto y, por lo tanto, no posee extremos relativos en x=2. Estudiando la función derivada en un entorno de x=2 observamos que la función derivada tiene un mínimo en x=2, es decir pasa de ser decreciente a ser creciente en dicho punto, Esto significa que la función f pasa de ser cóncava a ser convexa, es decir f posee en x=2 un punto de inflexión.

51. La función y=senx tiene un punto de inflexión en $x=\pi$ ya que f ''$(\pi)=0$ y f '''$(\pi)\neq 0$. Al ser una función periódica de período 2π su gráfica se repite indefinidamente y los puntos $x=\pi+2k\pi$ Son puntos de inflexión$\forall k \in\in Z$

52. 23. y=ax^2+bx+c ; y'=2ax+b
Pasa por (0,-3)⇒ $f(0)=-3 \Rightarrow c=-3$
La tangente en x=0 es paralela a la recta y=2x⇒ $f'(0)=2 \Rightarrow b=2$
Tiene un máximo en x=1⇒ $f'(1)=0 \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow 2a+2=0 \Rightarrow a=-1$.
En consecuencia la función es y=$-x^2+2x-3$
Para representar el valor absoluto de f(x) vamos a representar en primer lugar f(x)
Es una parábola de vértice (1,-2)   (x=-b/2a=-1; y=f(-1)=-2)
No tiene raíces ya que la ecuación $-x^2+2x-3=0$ no tiene solución. Pasa por (0,-3) y por (2,-3). Por tanto su gráfica será la siguiente:



A partir de ella hacemos la de su valor absoluto que será



53. y=$x^3-6x^2+16x-11$. En su punto de inflexión ha de verificarse que la derivada segunda sea cero y la tercera sea dostinta de cero. y'=$3x^2-12x+16$; y''=6x-12=0⇒ $x=2$; y'''=6≠0 por lo que el punto de inflexión es x=2. Tenemos que calcular la recta tangente en ese punto: f(2)=$2^3-6.2^2+16.2-11=5$; m=f '(2)=$3.2^2-12.2+16=4$.
La recta tangente será: 4(x-2)=y-5

54. Que x=1 sea un punto de inflexión implica que f ''(1)=0. Por otra parte al ser en ese punto la recta tangente horizontal ha de verificarse que f '(1)=0. f(x)=x^3+ax^2+bx+7;
f '(x) =$3x^2+2ax+b$; f ''(x)=6x+2a. Entonces f '(1)=3+2a+b=0, f '' (1)=6+2a=0, resolviendo el sistema obtenemos que a=-3 y b=3