CONTINUIDAD

Continuidad. Definición. Tipos de discontinuidades

Definición

Una función f: D----------->R se dice que es continua en x=a si se verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por lo tanto para comprobar si una función es o no continua en x=a tendremos que comprobar si existe $\lim_{x \to a} f(x)$, si existe f(a) y si son iguales.

Ejemplo1: La función $y=x^2$ es continua en x=3.(imagen1)

Ejemplo2: la función $y=\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 \text{ si } x=2 \end{cases}$ es disontinua en x=3 porque $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ y f(3)=2 (imagen2)

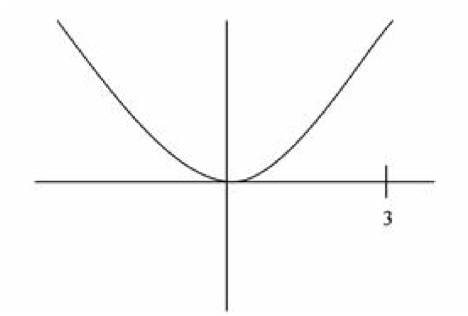


Imagen2

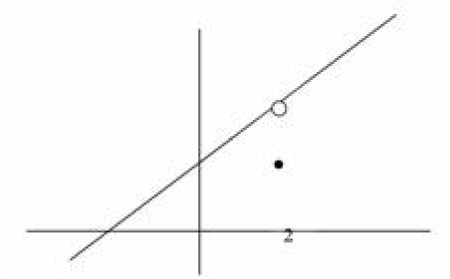


Imagen1

Una función que no es continua en un punto se llama discontinua.

Tipos de discontinuidades

1. Decimos que f posee en x=a una discontinuidad evitable si existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$ pero no coincide con f(a), bien porque f(a) no existe o porque existiendo ambos son distintos.
   EJ: La gráfica de la imagen 2 del partado anterior posee en x=2 una discontinuidad evitable. Lo mismo ocurriría si la imagen de x= 2 no estuviese definida.
2. Decimos que una función posee en x=a una discontinuidad de salto finito o de primera especie si no existe el $\lim_{x \to a} f(x)$, pero existen y son finitos sus dos límites laterales.

Ejemplo: La siguiente gráfica posee una discontinuidad de salto finito en x=-1

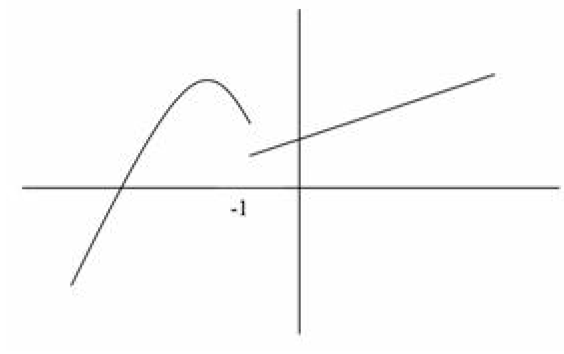
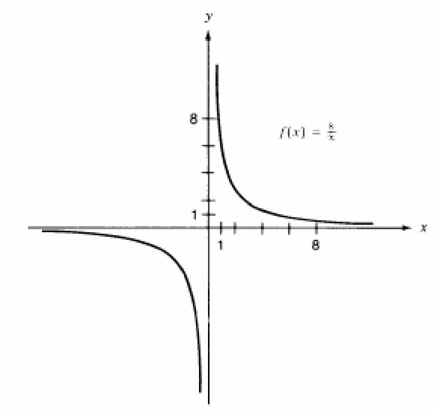


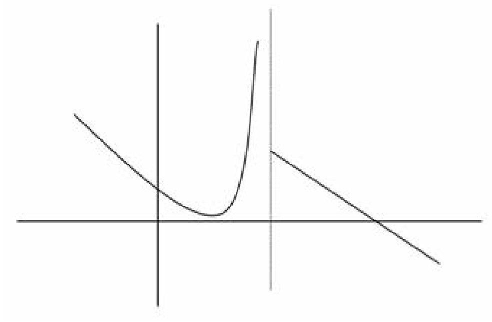
Imagen3

3. Decimos que una función posee en x=a una discontinuidad de 2ª especie, o de salto finito, o asintótica si: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to a^+} = \infty$ o ambos lo son.

Ejemplo1: la función y=1/x posee en x=o una discontinuidad asintótica.

Ejemplo2; la siguiente función Posee en x=2 una discontinuidad asintótica





EJERCICIOS

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades: a) y=3|x|+5; b) y=$\begin{cases} x+2 \text{ si x<-1} \\ \frac{-1}{x} \text{ si -1<x<0} \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; c) $y = \begin{cases} 4 \text{ si x>0} \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$;

   d)$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si x=0} \end{cases}$;*e)* $y = \begin{cases} x+2 \text{ si x<1} \\ 4x-1 \text{ six>1} \end{cases}$;*f)* $y = \begin{cases} x^2 \text{ si x>0} \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$;*g)* $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si x<1} \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

   h)y=$\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si x=2} \end{cases}$; i) y=$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si x<-3} \\ \frac{|x|}{x} \text{ si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si x>3} \end{cases}$ j) y=$\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ k)$y = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} \text{ si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si x >0} \end{cases}$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b

   a) y=$\begin{cases} \frac{1}{x} \text{ six<-1} \\ ax+b \text{ si } -1 \leq x < 2 \\ 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$; b) y=$\begin{cases} a(x-2)^2 \text{ si } x \leq 0 \\ bx+1 \text{ si 0<x<5} \\ \frac{1}{x} \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$; c) y=$\begin{cases} x \text{ si x<1} \\ ax+2 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

   d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si x<0} \\ ax+b \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ x+a \text{ si x>3} \end{cases}$; e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si x=0} \end{cases}$; f) y=$\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ b \text{ si x=2} \end{cases}$;

Soluciones:

1.Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades:

a) y=3|x|+5= $\begin{cases} -3x+5 \text{ si } x<0 \\ 3x+5 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ La función es continua en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ por estar definida en cada uno de ellos como una función polinómica. El único punto que podría tener problema es x=0. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-3x+5) = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x+5) = 0$; f(0)=0 Luego f es continua en R

b) y= $\begin{cases} x+2 \text{ si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} \text{ si } -1<x<0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$; Las funciones y=x+2 e y=x^2 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(0,\infty)$ en los que están definidas. La función y=-1/x es continua en R-{0}, y por lo tanto lo es en el intervalo (-1,0). Así pues los únicos puntos en los que la función que nos dan puede tener problemas de continuidad es en x=-1 y en x=0

Continuidad en x=-1: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x+2) = 1$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(-1/x) = 1$ Por lo tanto la función presenta en x=-1 una discontinudad de salto finito.

Continuidad en x=0: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-1/x) = \infty$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ Por lo tanto la función presenta en x=0 una discontinuidad asintótica. f es continua en R-{-1,0}

c) $y = \begin{cases} 4 \text{ si } x>0 \\ 3x-1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ Tanto la función y=4 como y=3x-1 son continuas en R y por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(0,\infty)$ y $(-\infty,0)$ Debemos estudiar la continuidad en x=0: : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 4 = 4$ Luego f presenta en x=0 una discontinuidad de salto finito y es continua en R-{0}

d)$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 3 \text{ si } x=0 \end{cases}$; La función y=1/x^2 es continua en R-{0}. Estudiamos la continuidad en x=0 de la función dada : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$; f(0)=3 Luego f presenta en x=0 una discontinuidad asintótica y es continua en R-{0}

e) $y = \begin{cases} x+2 \text{ si } x<1 \\ 4x-1 \text{ si} x>1 \end{cases}$ Las 2 funciones que componen a f(x) son continuas en todo R por ser polinómicas, por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$. Así, el único punto problemático que presenta nuestra función es x=1:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 3$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(4x-1) = 3$; f(1)∄ Entonces: en x=1 la función es discontinua evitable, en R-{1} f es continua.

f) $y = \begin{cases} x^2 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ y=0 es continua en $(-\infty, 0)$ por serlo en R; y=x^2 es continua en $(0,\infty)$ por la misma razón. Estudiamos la continuidad en x=0 : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(0) = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$; f(0)=0⇒ f es continua en todo R

g) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ La función y=1/x es continua en (-∞, 1)-{0}. La función y=$\frac{1}{x-2}$ es continua en (1,∞)-{2}. Además en x=1 hay un cambio de función , por lo tanto tenemos que estudiar la función en esos 3 puntos.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(1/x) = \infty \Rightarrow$ f tiene en x=0 una discontinuidad asintótica

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}) = \infty \Rightarrow$ f presenta en x=2 una discontinuidad asintótica

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1/x) = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{x-2}) = -1 \Rightarrow$ En x=1 f es discontinua de salto finito. f es continua en R-{0,1,2}

h)y=$\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} \text{ si } x \neq 2 \\ 3 \text{ si } x=2 \end{cases}$ La función y=$\frac{x^3-8}{x^2-4}$ es continua en R-{-2, 2} y por lo tanto f también lo es.

Continuidad en x=-2 $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{-16}{0} = \infty$ luego en x=-2 f es discontinua asintótica.

Continuidad en x=2 $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \infty$ Factorizamos los dos polinomios obteniendo: x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4); x^2-4=(x-2)(x+2). En consecuencia:

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3$; f(2)=3. Por lo tanto f es continua en x=2

En resumen f es continua en R-{-2} y es discontinua asintótica en x=-2.

i) y=$\begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{|x|}{x} \text{ si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ \frac{-x}{x} \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x}{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} \text{ si } x<-3 \\ -1 \text{ si } -3 \leq x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} \text{ si } x>3 \end{cases}$

La función y=$\frac{1}{x-3}$ es continua en $(-\infty, -3)$ por serlo en R-{3}, las funciones y=-1, y=1 e y=$\frac{x^2}{9}$ son continuas respectivamente en (-3,0) y (0,3) y (3,∞) por serlo en R. En consecuencia, los puntos problemáticos de nuestra función son x=0, x=-3 y x=3.

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}(\frac{1}{x-3}) = -1/6$; $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} -1 = -1$ Discontinua de salto finito en x=-3

$\lim_{x\to -0^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-}(-1) = -1$; $\lim_{x\to -0^+} f(x) = \lim_{x\to -0^+} 1 = 1$ Discontinua de salto finito en x=0

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 1 = 1$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2}{9} = 1; f(3) = 1$ continua en x=3

La función es continua en R-{-3,0}

j) y=$\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ Hallamos el dominio de la función x^3-7x-8=0⇒ $x = 1$ luego D=R-{0}

; $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\frac{0}{0}$ y factorizando: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+8)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x^2+x+8)}=\frac{2}{10}$;
f(1) no existe$\Rightarrow$ f es Discontinua evitable en x=1 y continua en R-{1}

k) $y=\begin{cases}\frac{e^x}{e^x+1} \text{ si } x<0\\ \frac{x^2+1}{2} \text{ si } x>0\end{cases}$ El único punto problemático de la función es x=0 ya que las funciones y=$\frac{e^x}{e^x+1}$ e y=$\frac{x^2+1}{2}$ son continuas en todo R.
$\lim_{x\to -0^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}(\frac{e^x}{e^x+1})=\frac{1}{2}$; $\lim_{x\to -0^+} f(x)=\lim_{x\to -0^+}\frac{x^2+1}{2}=\frac{1}{2}$; f(0)$\nexists$ luego f presenta una discontinuidad evitable en x=0, siendo continua en R-{0}

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los ditintos valores de a y b

a) y= $\begin{cases}\frac{1}{x} \text{ si} x<-1\\ ax+b \text{ si } -1\le x<2\\ 2 \text{ si } x\ge 2\end{cases}$; La función y=1/x es continua en $(-\infty,-1)$ al serlo en R-{0}; las funciones y=ax+b e y=2 son continuas en los intervalos en los que están definidas al serlo en R. Por tanto los únicos problemas de continuidad de esta función pueden estar en x=-1 y x=2.
$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x}=-1$; $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(ax+b)=-a+b$; f(-1)=-a+b$\Rightarrow -a+b=-1$ para que f sea continua en x=-1
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(ax+b)=2a+b$;$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2=2$; f(2)=2$\Rightarrow 2a+b=2$ para que f sea continua en x=2. Entonces, para que f sea continua en R ha de verificarse:

$$\begin{cases}-a+b=-1\\ 2a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

b) y= $\begin{cases}a(x-2)^2 \text{ si } x\le 0\\ bx+1 \text{ si } 0<x<5\\ \frac{1}{x} \text{ si } x\ge 5\end{cases}$; Las funciones y=a(x-2)^2 e y=bx+1 son continuas en todo R para cualquier valor de a y b, al ser funciones polinómicas, en consecuencia lo son en el intervalo en el que están definidas. La función y=1/x es continua en $(5,\infty)$ por serlo en R-{0}. Hay que estudiar entonces únicamente la continuidad en x=0 y x=5
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} a(x-2)^2=4a$;$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(bx+1)=1$; f(0)=4a$\Rightarrow 4a=1\Rightarrow a=1/4$ para este valor de a f es continua en x=0
$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}(bx+1)=5b+1$;$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+} 1/x=1/5$; f(5)=1/5$\Rightarrow 5b+1=1/5$
$\Rightarrow b=-4/25$ Para ese valor es continua en x=5.
Por tanto para a=1/4 y b=-4/25 es continua en R

c) y=$\begin{cases}x \text{ si } x<1\\ ax+2 \text{ si } x\ge 1\end{cases}$ Tanto la función y=x como la función y=ax+2 son continuas en su interlo de definición por serlo en R.
Continuidad en x=1: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$;$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+2)=a+2$; f(1)=a+2$\Rightarrow$
$\Rightarrow 1=a+2\Rightarrow a=-1$. Para ese valor de a f es continua en R

d) y=$\begin{cases} 4-x \text{ si } x<0 \\ ax+b \text{ si } 0\le x\le 3 \\ x+a \text{ si } x>3 \end{cases}$; Todas las funciones que componen f son polinómicas y por tanto continuas en el intervalo en el que están definidas. Veamos la continuidad en x=0 y x=3: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 4-x = 4$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b) = b$; f(0)=b$\Rightarrow b=4$
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} ax+b = 3a+b$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+a) = 3+a; f(3) = 3+b \Rightarrow 3a+b = 3+a \Rightarrow$
3a+4=3+a$\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-1/2$

e)$\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} \text{ si } x\neq 0 \\ a \text{ si } x=0 \end{cases}$; 8x^3+3x=0$\Rightarrow x(8x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$ Por lo tanto la función y=$\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$ es continua en R-{0} y en consecuencia nuestra función también lo es. Veamos la continuidad en x=0: : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \frac{0}{0}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(8x^2+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x+1}{(8x^2+3)} = \frac{1}{3}$; f(0)=a. Para que f sea continua a=1/3

f) y=$\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ si } x\neq 2 \\ b \text{ si } x=2 \end{cases}$ La función y=$\frac{ax^3-16}{x-2}$ es continua en R-{2}, por lo tanto también lo es la función que nos ocupa. Veamos la continuidad en x=2:: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{ax^3-16}{x-2} = \frac{8a-16}{0}$;
Si 8a-16 es distinto de cero ese límite sería infinito y la función presentaría en x=2 una discontinuidad de asintótica para cualquier valor de b. La única posibilidad de que ese límite exista es que sea del tipo 0/0 y, por lo tanto que 8a-16=0$\Rightarrow a=2$.
Para ese valor de a: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^3-16}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x^2+4x+8)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}(2x^2+4x+8) = 24$;f(2)=b
Luego b=24 y a=2 para que f sea continua