

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

1. Dados los vectores $a(5,-1)$, $b(-10,2)$, $c(15,-3)$, $d(2,2)$, $e(1,-4)$ y $f(-6,-6)$ Decidir razonadamente las siguientes cuestiones: a) ¿a es CL de b?; b) ¿a es CL de d?; c) ¿a es CL de c y b?; d) ¿e es CL de a y b?; e) ¿d es CL de a y e?; f) ¿a es CL de d y f?; g) ¿a y c son LD o LI?; h) ¿son a y d base?; i) ¿a, b y c son sistema generador?; j) ¿a, d y e son LD o LI?; k) ¿son a, b y d sistema generador? l) ¿f y d son sistema generador?; m) ¿c y d son base?
2. Dados los vectores $a(2,3)$; $b(1,5)$; $c(3,8)$; $d(-4,-6)$; $e(-5,-25)$; $f(3,15)$ decidir razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿son a y b base?; b) ¿Son a y d Sistema generador?; c) ¿Es a CL de c?; d) ¿Es e CL de b?; e) ¿Son b y f LD o LI?; f) ¿Son a, b y f LD o LI?; g) ¿Son b, e y f sistema generador?; h) ¿Es c CL de a y b? i) ¿Esa CL de b y e? J) Representa gráficamente y halla las coordenadas de $2a - 1/2b + 3c$
3. Dar si es posible un ejemplo de vectores que cumplan las siguientes condiciones, en caso de no ser posible indicar la razón: a) 2 vectores LD; b) 3 vectores que no sean sistema generador; c) 2 vectores que no sean base; d) 2 vectores de la misma dirección y LI; e) 2 vectores que sean CL de (3,5); f) 3 vectores que formen una base; g) 3 vectores LD; h) 3 vectores que sean sistema generador.
4. Decide si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares: a) $a(-2,4)$ y $b(3,2)$; b) $c(4,-3)$ y $d(6,8)$
5. Encontrar un vector u perpendicular a $v(3,5)$ y cuyo módulo sea $|u|=2$
6. Calcular m y n para que los vectores $u(3,m)$ y $v(n,-1)$ sean perpendiculares y $|u|=5$
7. Calcular m para que los vectores $u(7,-2)$ y $v(m,6)$ sean; a) perpendiculares; b) paralelos; c) tengan el mismo módulo
8. Calcula el ángulo que forman los vectores $a(-1,5)$ y $b(3,2)$
9. Calcula m para que los vectores $a(8,-6)$ y $b(m,3)$ formen un ángulo de 60°
10. Expresa $\vec{a} = (-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b} = (3, -2)$ y $\vec{c} = (4, 1/2)$
11. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base? ¿Por qué? a) $(3, -1)$ y $(1,3)$ b) $(2, 6)$ y $(2/3, 2)$
12. Dados $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ y $\vec{c} = (5, 2)$ calcula a) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ b) $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ c) $\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$ d) $(3\vec{a} - 2\vec{b})\vec{c}$
13. Halla el valor de m para que el módulo del vector $(3/5, m)$ sea igual a 1.
14. Calcula x de modo que el producto escalar de $\vec{a} = (3, 5)$ y $\vec{b} = (x, 2)$ sea igual a 8 ¿Qué ángulo forman los vectores \vec{a} y \vec{b} ?
15. Dado el vector $\vec{a} = (6, -8)$, determina: a) Los vectores unitarios de la misma dirección que \vec{a} . b) Los vectores ortogonales a \vec{a} que tengan el mismo módulo que \vec{a} . c) Los vectores unitarios y ortogonales a \vec{a} .
16. Siendo $\vec{a} = (5, b)$ y $\vec{b} = (a, 2)$, halla a y b , sabiendo que \vec{a} y \vec{b} son ortogonales y $|\vec{b}| = \sqrt{13}$
17. Dados $\vec{a} = (2, 1)$ y $\vec{b} = (6, 2)$, halla un vector \vec{c} tal que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{c} \perp \vec{b}$
18. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60° , calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$
19. Dados los vectores $a(2,3)$ y $u(-1,4)$. a) Calcula un vector c ortogonal al vector a y de módulo 5. ¿ Es única la solución?. Razona la respuesta b) Calcula un vector d del que sabemos que $d \cdot a = 1$ y $d \cdot u = 3$ ¿ Es única la solución?. Razona la respuesta.
20. Dados los vectores $u(2,-5)$ y $v(5,1)$ Calcula la proyección ortogonal de v sobre u
21. Decide sobre la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones razonando la respuesta a) $a(3,1)$ y $b(2,4)$ son L.I. b) $a(2,1)$; $b(3,6)$ y $c(2,3)$ son L.I. c) $a(3,5)$ es C.L. de $b(2,4)$ d) $a(2,1)$; $b(-6,-3)$ y $c(14,7)$ son un S.G. e) $a(2,3)$ es C.L. de $b(1,5)$ y $c(2,5)$
22. Dados los vectores $a(-3,1)$, $b(2,5)$ y $c(0,-4)$ halla las coordenadas de c en la base formada por a y b

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

23. Si las coordenadas de los vectores a y b son $(3,5)$ y $(-2,1)$ respectivamente, obtén las coordenadas de: a) $-2a + 1/2b$ b) $1/2(a+b) - 2/3(a-b)$
24. Halla el vector b tal que $c = 3a - 1/2b$ siendo $a = (-1,3)$ y $c = (7, -2)$
25. Calcula x de modo que el producto escalar de $a = (3, 5)$ y $b = (x, 2)$ sea igual a 7
26. Determina si los puntos $A(-1, -2)$, $B(2, 7)$ y $C(1, 2)$ están alineados.
27. Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.
28. El punto $P(5, -2)$ es el punto medio del segmento AB del que conocemos el extremo $A(2, 3)$. Halla B
29. Halla el simétrico de $P(1, -2)$ respecto del punto $H(3, 0)$.
30. Dado el vector $a(2,5)$ encuentra el origen de un representante de a cuyo extremo es el punto $E(-5,4)$; encuentra el extremo de un representante de a cuyo origen es $O(2,-3)$

Soluciones Vectores (4)

1. a) Si porque son múltiplos; b) No ya que no tienen la misma dirección, no son múltiplos; c) Si porque a tiene la misma dirección que b y c ; d) No ya que a y b tienen la misma dirección y e la tiene distinta; e) Si porque a y e son S.G. al tener distinta dirección; f) No porque d y f tienen la misma dirección y a la tiene distinta; g) L.D. ya que tienen igual dirección; h) si, tienen distinta dirección; i) No, tienen la misma dirección; j) LD porque son tres vectores; k) si porque entre ellos hay dos de distinta dirección; l) no porque tienen igual dirección; m) si, ya que son dos vectores de distinta dirección.

2. a) Si, son SG y LI al ser dos vectores de distinta dirección; b) No por tener la misma dirección; c) No ya que a no es múltiplo de c al tener distinta dirección; d) si porque tienen la misma dirección; e) LD, tienen la misma dirección; f) LD, son tres vectores; g) No, al tener los tres la misma dirección; h) si porque a y b son base; i) No porque b y e tienen igual dirección y a la tiene distinta; j) coordenadas de $2a - 1/2b + 3c = 2(2,3) - 1/2(1,5) + 3(3,8) = (25/2, 55/2)$; representación gráfica en clase.

3. a) 2 vectores LD deben ser múltiplos, por ejemplo: $a(1,3)$ y $b(2,6)$; b) 3 vectores que no sean sistema generador deben tener todos la misma dirección, por ejemplo: $a(1,3)$, $b(2,6)$ y $c(3,9)$; c) 2 vectores que no sean base deben tener igual dirección, por ejemplo: $a(1,3)$ y $b(2,6)$; d) 2 vectores de la misma dirección y LI es imposible ya que si tienen la misma dirección son LI; e) 2 vectores que sean CL de $(3,5)$, han de ser múltiplos de dicho vector, por ejemplo: $(6,10)$ y $(-3,5)$ f) 3 vectores que formen una base: es imposible ya que 3 vectores son siempre LD y las bases están formadas por vectores LI; g) 3 vectores linealmente dependientes: sirven cualquier trio de vectores ya que 3 vectores del plano son siempre LD; h) 3 vectores que sean sistema generador: llega con que haya entre ellos al menos dos de distinta dirección por ejemplo: $a(1,1)$, $b(3,5)$ y $c(2,4)$

4. Para ver si son o no perpendiculares tenemos que comprobar si su producto escalar da cero
a) $a(-2,4)$ y $b(3,2)$; $a \cdot b = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -6 + 8 = 2$ luego no son perpendiculares. B) $c(4,-3)$ y $d(6,8)$
c. $d = 4 \cdot 6 + (-3) \cdot 8 = 24 - 24 = 0$ luego si son perpendiculares

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

5. Sea $u(x,y)$ por ser u perpendicular a $v(3,5)$ $u \cdot v = 0$, es decir $3x+5y=0$. Como el módulo de u debe valer 2 tiene que ocurrir que $\sqrt{x^2 + y^2}=2$. Resolvemos el sistema formado por las 2

ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$ y obtenemos 2 posibles soluciones: $u\left(\frac{10}{\sqrt{34}}, \frac{-6}{\sqrt{34}}\right)$ o $u\left(\frac{-10}{\sqrt{34}}, \frac{6}{\sqrt{34}}\right)$

6. $\begin{cases} u \cdot v = 3n - m = 0 \\ |u| = \sqrt{9 + m^2} = 5 \end{cases}$ resolviendo obtenemos 2 soluciones: $m=4$ y $n=4/3$ o $m=-4$ y $n=-4/3$

7. $u(7,-2) \cdot v(m,6)$ a) $u \cdot v = 0 \rightarrow 7m - 12 = 0 \rightarrow m = 12/7$; b) $\frac{7}{m} = \frac{-2}{6} \rightarrow m = -24$;

c) $|u|=|v| \rightarrow \sqrt{49+4} = \sqrt{m^2+36} \rightarrow m = \pm\sqrt{17}$

8. $a(-1,5), b(3,2)$; $\cos(a,b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{-3+10}{\sqrt{1+25} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} \rightarrow (a, b) = 67^\circ 37' 51''$

9. $\cos 60 = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$; $\frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10\sqrt{m^2+9}}$, resolviendo $m=7'023$ o $m=0'361$

10. $(-1,-8) = \alpha(3,-2) + \beta(4,1/2)$; $\begin{cases} -1 = 3\alpha + 4\beta \\ -8 = -2\alpha + 1/2\beta \end{cases}$, resolviendo $\alpha=63/19$ y $\beta=-52/19$

11. a) si forman base porque tienen distinta dirección, b) no forman base porque tienen la misma dirección

12. a) $a \cdot b = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = -6 + 3 = -3$; $(a \cdot b) \cdot c = -3(5,2) = (-15,-6)$;

b) $b \cdot b = (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 10$; $(b \cdot b) \cdot a = 10(2,3) = (20,30)$

c) $a \cdot c = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16$; $b \cdot c = -3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = -13$; $a \cdot c - b \cdot c = 16 - (-13) = 29$

d) $(3a-2b) \cdot c = 3(2,3) - 2(-3,1) = (12,7)$; $(3a-2b) \cdot c = 12 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 74$

13. $\sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1$, resolviendo $m = \pm 4/5$

14. $a \cdot b = 3x + 10 = 8 \rightarrow x = -2/3$. $\cos(a,b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{8}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}+4}}$; $(a,b) = 49^\circ 23' 34''$

15. a) $|a| = \sqrt{36 + 64} = 10$ Los vectores unitarios de la misma dirección que a son: $\frac{a}{|a|}$ y $-\frac{a}{|a|}$ en nuestro caso $(6/10, -8/10)$ y $(-6/10, 8/10)$.

b) un vector ortogonal al vector a es por ejemplo $b(8,6)$ ya que el producto escalar de $a \cdot b = 6 \cdot 8 - 8 \cdot 6 = 0$. Si a ese vector lo dividimos por su módulo me dará un vector ortogonal y unitario $|b|=10$ entonces $(8/10, 6/10)$ será ortogonal al vector a y unitario. De la misma forma lo será el vector opuesto $(-8/10, -6/10)$

16. $\begin{cases} a \cdot b = 0 \rightarrow 5a + 2b = 0 \\ |b| = \sqrt{13} \rightarrow \sqrt{a^2 + 4} = \sqrt{13} \end{cases}$ resolviendo el sistema obtenemos $a=3y$ $b = \frac{-15}{2}$ o bien $a=-3y$ $b = \frac{15}{2}$

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

17. Sea $c(x,y)$ entonces: $\begin{cases} c \cdot a = 1 \rightarrow 2x + y = 1 \\ c \cdot b = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \end{cases}$ Resolviendo el sistema obtenemos $x=-1$ $y=3$
es decir $c(-1,3)$

18. $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a,b) = 1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$

19.a) Sea $c(x,y)$ $\begin{cases} c \cdot a = 0 \rightarrow 2x + 3y = 0 \\ |c| = \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{cases}$ Resolviendo obtenemos dos soluciones:
 $((\frac{10}{\sqrt{13}}, \frac{-15}{\sqrt{13}})$ y $((\frac{-10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}})$

b) Sea $d(x,y)$ $\begin{cases} d \cdot a = 1 \rightarrow 2x + 3y = 1 \\ d \cdot u = 3 \rightarrow -x + 4y = 3 \end{cases}$ Resolviendo $d(-5/11, 7/11)$

20 $u \cdot v = |u| P_{uv}$; $u \cdot v = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5$; $|u| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ entonces $5 = \sqrt{29} \cdot P_{uv}$ y por tanto $P_{uv} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

21. a) V porque tienen distinta dirección

b) F, son LD porque son 3 vectores

d) F, a no es CL de b porque no son múltiplos

e) V porque b y c son base y en consecuencia cualquier vector es CL de ellos

22. $(0,-4) = \alpha(-3,1) + \beta(2,5)$; resolviendo $\alpha = -8/17$ y $\beta = -12/17$

23 a) $-2^a + 1/2b = -2(3,5) + 1/2(-2,1) = (-7, -19/2)$

b) $1/2(a+b) - 2/3(a-b) = (1/2 - 2/3)a + (1/2 + 2/3)b = -1/6a + 7/6b = -1/6(3,5) + 7/6(-2,1) = (-17/6, 2/6)$

24. $c = 3a - 1/2b$, despejando $b = -2c + 6a = -2(7,-2) + 6(-1,3) = (-20, 22)$

25. $3x + 10 = 7$; $x = -1$

26. $\overrightarrow{AB}(3,9)$; $\overrightarrow{AC}(2,4)$ dado que $\frac{3}{2} \neq \frac{9}{4}$ los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} no tienen la misma dirección y, por tanto, los puntos A, B y C no están alineados.

27. $\overrightarrow{AB}(5, -4)$; $\overrightarrow{AC}(9, k - 5)$ necesitamos que $\frac{5}{9} = \frac{-4}{k-5}$ despejando $k = -11/5$

28. P(5,-2) es el punto medio, Sea B(x,y) se verificará que $(A+B)/2 = P$ Es decir: $\frac{2+x}{2} = 5 \rightarrow x = 8$
 $y \frac{3+y}{2} = -2 \rightarrow y = -7$; B(8,-7)

29. Sea S(x,y) el simétrico de P respecto a H. Se verificará que H es el punto medio del segmento PS, es decir: $(P+S)/2 = H$; $\frac{1+x}{2} = 3 \rightarrow x = 5$; $\frac{-2+y}{2} = 0 \rightarrow y = 2$; S(5,2)

30. a) $a(2,5)$ O(x,y) E(-5,4). $E-O = a$; $(-5,4) - (x,y) = (2,5)$ despejando O(-7,-1)

b) $a(2,5)$ O(2,-3), E(x,y) $(2,5) = (x,y) - (2,-3)$ despejando E(4,2)