4º ESO. Ejercicios vectores (4).

1. Dados los vectores a(5,-1), b(-10,2), c(15,-3), d(2,2), e(1,-4) y f(-6,-6) Decidir razonadamente las siguientes cuestiones: a) ¿a es CL de b?; b) ¿a es CL de d?; c)¿a es Cl de c y b?; d) ¿e es CL de a y b?; e) ¿d e CL de a y e?; f) ¿a es CL de d y f?; g) ¿a y c son LD o LI?; h) ¿son a y d base?; i) ¿a,b y c son sistema generador; j) ¿a, d y e son LD o LI?; k)¿son a,b y d sistema generador? l) ¿f y d son sistema generador?; m) ¿cy d son base?
2. Dados los vectores a(2,3); b(1,5); c(3,8); d(-4,-6); e(-5,-25); f(3,15) decidir razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿son a y b base?; b)¿Son a y d Sistema generador?; c)¿Es a CL de c?; d) ¿Es e CL de b?; e)¿Son b y f LD o LI?; f)¿Son a,b y f LD o LI?; g)¿Son b,e y f sistema generador?; h)¿Es c CL de a y b? i) ¿Esa CL de b y e? J) Representa gráficamente y halla las coordenadas de 2a-1/2b+3c
3. Dar si es posible un ejemplo de vectores que cumplan las siguientes condiciones, en caso de no ser posible indicar la razón: a) 2 vectores LD; b)3 vectores que no sean sistema generador; c) 2 vectores que no sean base; d) 2 vectores de la misma dirección y LI; e) 2 vectores que sean CL de (3,5); f) 3 vectores que formen una base; g) 3 vectores LD; h) 3 vectores que sean sistema generador.
4. Decide si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares: a) a(-2,4) y b(3,2); b) c(4,-3) y d(6,8)
5. Encontrar un vector u perpendicular a v(3,5) y cuyo módulo sea |u|=2
6. Calcular m y n para que los vectores u(3,m) y v(n,-1) sean perpendiculares y |u|=5
7. Calcular m para que los vectores u(7,-2) y v(m,6) sean; a) perpendiculares; b) paralelos; c) tengan el mismo módulo
8. Calcula el ángulo que forman los vectores a(-1,5) y b(3,2)
9. Calcula m para que los vectores a(8,-6) y b(m,3) formen un ángulo de 60º
10. Expresa $\vec{a}$ = (-1, -8) como combinación lineal de $\vec{b}$ = (3, -2) y $\vec{c}$ = (4, 1/2)
11. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base? ¿Por qué? a) (3, -1) y (1,3) b) (2, 6) y (2/3, 2)
12. Dados $\vec{a}$ = (2, 3), $\vec{b}$ =(-3, 1) y $\vec{c}$ =(5, 2) calcula a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ b) $(\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}$ c) $\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$ d) $(3\vec{a} - 2\vec{b})\vec{c}$
13. Halla el valor de m para que el módulo del vector (3/5, m) sea igual a 1.
14. Calcula x de modo que el producto escalar de $\vec{a}$ = (3, 5) y $\vec{b}$ =(x, 2) sea igual a 8 ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?
15. Dado el vector $\vec{a}$ = (6, -8), determina: a) Los vectores unitarios de la misma dirección que $\vec{a}$. b) Los vectores ortogonales a $\vec{a}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{a}$. c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{a}$.
16. Siendo $\vec{a}$ = (5, b) y $\vec{b}$ = (a, 2), halla a y b, sabiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales y $|\vec{b}| = \sqrt{13}$
17. Dados $\vec{a}$ = (2, 1) y $\vec{b}$ = (6, 2), halla un vector $\vec{c}$ tal que $\vec{c}\cdot\vec{a} = 1$ y $\vec{c} \perp \vec{b}$
18. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60º, calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$
19. Dados los vectores a(2,3) y u(-1,4). a)Calcula un vector c ortogonal al vector a y de módulo 5. ¿ Es única la solución?. Razona la respuesta b)Calcula un vector d del que sabemos que d.a=1 y d.u=3 ¿ Es única la solución?. Razona la respuesta.
20. Dados los vectores u(2,-5) y v(5,1) Calcula la proyección ortogonal de v sobre u
21. Decide sobre la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones razonando la respuesta a) a(3,1) y b(2,4) son L.I. b) a(2,1); b(3,6) y c(2,3) son L.I. c) a(3,5) es C.L. de b(2,4) d) a(2,1); b(-6,-3) y c(14,7) son un S.G. e) a(2,3) es C.L. de b(1,5) y c(2,5)
22. Dados los vectores a(-3,1), b(2,5) y c(0,-4) halla las coordenadas de c en la base formada por a y b

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

23. Si las coordenadas de los vectores a y b son (3,5) y (-2,1) respectivamente, obtén las coordenadas de: a) -2 a + 1/2 b b) 1/2 (a +b)- 2/3 (a -b)
24. Halla el vector b tal que c = 3a - 1/2b siendo a = (-1,3) y c =(7, -2)
25. Calcula x de modo que el producto escalar de a = (3, 5) y b =(x, 2) sea igual a 7
26. Determina si los puntos A(-1, -2), B(2, 7) y C(1, 2) están alineados.
27. Determina k para que los puntos A(-3, 5) , B(2, 1) y C(6, k) estén alineados.
28. El punto P(5, -2) es el punto medio del segmento AB del que conocemos el extremo A(2, 3). Halla B
29. Halla el simétrico de P(1, -2) respecto del punto H(3, 0).
30. Dado el vector a(2,5) encuentra el origen de un representante de a cuyo extremo es el punto E(-5,4); encuentra el extremo de un representante de a cuyo origen es O(2,-3)

Soluciones Vectores (4)

1. a) Si porque son múltiplos; b) No ya que no tienen la misma dirección, no son múltiplos; c) Si porque a tiene la misma dirección que b y c; d) No ya que a y b tienen la misma dirección y e la tiene distinta; e) Si porque a y e son S.G. al tener distinta dirección; f) No porque d y f tienen la misma dirección y a la tiene distinta; g) L.D. ya que tienen igual dirección; h) si, tienen distinta dirección; i) No, tienen la misma dirección; j) LD porque son tres vectores; k) si porque entre ellos hay dos de distinta dirección; l) no porque tienen igual dirección; m) si, ya que son dos vectores de distinta dirección.

2. a) Si, son SG y LI al ser dos vectores de distinta dirección; b) No por tener la misma dirección; c) No ya que a no es múltiplo de c al tener distinta dirección; d) si porque tienen la misma dirección; e) LD, tienen la misma dirección; f) LD, son tres vectores; g) No, al tener los tres la misma dirección; h) si porque a y b son base; i) No porque b y e tienen igual dirección y a la tiene distinta; j) coordenadas de 2a-1/2b+3c=2(2,3)-1/2(1,5)+3(3,8)=(25/2,55/2); representación gráfica en clase.

3. a) 2 vectores LD deben ser múltiplos, por ejemplo: a(1,3) y b(2,6); b) 3 vectores que no sean sistema generador deben tener todos la misma dirección, por ejemplo: a(1,3), b(2,6) y c(3,9); c) 2 vectores que no sean base deben tener igual dirección, por ejemplo: a(1,3) y b(2,6); d) 2 vectores de la misma dirección y LI es imposible ya que si tienen la misma dirección son LI; e) 2 vectores que sean CL de (3,5), han de ser múltiplos de dicho vector, por ejemplo: (6,10) y (-3,5) f)3 vectores que formen una base: es imposible ya que 3 vectores son siempre LD y las bases están formadas por vectores LI; g) 3 vectores linealmente dependientes: sirven cualquier trio de vectores ya que 3 vectores del plano son siempre LD; h) 3 vectores que sean sistema generador: llega con que haya entre ellos al menos dos de distinta dirección por ejemplo: a(1,1), b(3,5) y c(2,4)

4. Para ver si son o no perpendiculares tenemos que comprobar si su producto escalar da cero a) a(-2,4) y b(3,2); a.b=(-2).3+4.2=-6+8=2 luego no son perpendiculares. B)c(4,-3) y d(6,8) c.d=4.6+(-3).8=24-24=0 luego si son perpendiculares

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

5. Sea u(x,y) por ser u perpendicular a v(3,5) u.v =0, es decir 3x+5y=0. Como el módulo de u debe valer 2 tiene que ocurrir que $\sqrt{x^2 + y^2}$=2. Resolvemos el sistema formado por las 2 ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$ y obtenemos 2 posibles soluciones: $u\left(\frac{10}{\sqrt{34}}, \frac{-6}{\sqrt{34}}\right)$ o $u\left(\frac{-10}{\sqrt{34}}, \frac{6}{\sqrt{34}}\right)$

6. $\begin{cases} u.v = 3n - m = 0 \\ |u| = \sqrt{9 + m^2} = 5 \end{cases}$ resolviendo obtenemos 2 soluciones: m=4 y n=4/3 o m=-4 y n=-4/3

7. u(7,-2) v(m,6) a) u.v=0→ $7m - 12 = 0 \rightarrow m = 12/7$; b) $\frac{7}{m} = \frac{-2}{6} \rightarrow m = -24$;

c) |u|=|v|→ $\sqrt{49 + 4} = \sqrt{m^2 + 36} \rightarrow m = \pm\sqrt{17}$

8. a(-1,5), b(3,2); cos(a,b)=$\frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{-3+10}{\sqrt{1+25}.\sqrt{9+4}} = \frac{7}{\sqrt{26}.\sqrt{13}} \rightarrow (a, b) = 67º37'51''$

9. cos60=$\frac{a.b}{|a|.|b|}$; $\frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10\sqrt{m^2+9}}$, resolviendo m=7'023 o m=0'361

10. (-1,-8)=α(3,-2)+β(4,1/2); $\begin{cases} -1 = 3\alpha + 4\beta \\ -8 = -2\alpha + 1/2\beta \end{cases}$, resolviendo α=63/19 y β=-52/19

11. a)si forman base porque tienen distinta dirección, b) no forman base porque tienen la misma dirección

12. a) a.b=2.(-3)+3.1=-6+3=-3; (a.b).c= -3(5,2)=(-15,-6);

b) b.b=(-3).(-3)+1.1=10; (b-b).a=10(2,3)=(20,30)

c) a.c=2.5+3.2=16; b.c=-3.5+1.2=-13; a.c-b.c=16-(-13)=29

d)(3a-2b)= 3(2,3)-2(-3,1)=(12,7); (3a-2b).c=12.5+7.2=74

13. $\sqrt{\frac{9}{25} + m^2} = 1$, resolviendo m=±4/5

14. a.b=3x+10=8→x=-2/3. cos(a,b)=$\frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{8}{\sqrt{9+25}.\sqrt{\frac{4}{9}+4}}$; (a,b)=49º23'34"

15.a)|a|=$\sqrt{36 + 64} = 10$ Los vectores unitarios de la misma dirección que a son : $\frac{a}{|a|}$ y -$\frac{a}{|a|}$ en nuestro caso (6/10, -8/10) y (-6/10, 8/10).

b) un vector ortogonal al vector a es por ejemplo b(8,6) ya que el producto escalar de a.b=6.8-8.6=0. Si a ese vector lo dividimos por su módulo me dará un vector ortogonal y unitario |b|=10 entonces (8/10,6/10) será ortogonal al vector a y unitario. De la misma forma lo será el vector opuesto (-8/10, -6/10)

16. $\begin{cases} a.b = 0 \rightarrow 5a + 2b = 0 \\ |b| = \sqrt{13} \rightarrow \sqrt{a^2 + 4} = 13 \end{cases}$ resolviendo el sistema obtenemos a=$\sqrt{165}$ y $b = \frac{-5\sqrt{165}}{2}$ o bien a=$-\sqrt{165}$ y $b = \frac{5\sqrt{165}}{2}$

4º ESO. Ejercicios vectores (4).

17. Sea c(x,y) entonces: $\begin{cases} c.a = 1 \to 2x + y = 1 \\ c.b = 0 \to 6x + 2y = 0 \end{cases}$ Resolviendo el sistema obtenemos x=-1 y=3 es decir c(-1,3)

18. a.b=|a|.|b|.cos(a,b)=1.1.1/2=1/2

19.a) Sea c(x,y) $\begin{cases} c.a = 0 \to 2x + 3y = 0 \\ |c| = \sqrt{5} \to \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{cases}$ Resolviendo obtenemos dos soluciones: $((\frac{10}{\sqrt{13}}, \frac{-15}{\sqrt{13}})$ y $((\frac{-10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}})$

b)Sea d(x,y) $\begin{cases} d.a = 1 \to 2x + 3y = 1 \\ d.u = 3 \to -x + 4y = 3 \end{cases}$ Resolviendo d(-5/11,7/11)

20 u.v=|u|P_uv; u.v=5.2-5.1=5; |u|=$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ entonces 5=$\sqrt{29}$ .P_uv y por tanto P_uv=$\frac{5}{\sqrt{29}}$

21. a) V porque tienen distinta dirección

b) F, son LD porque son 3 vectores

d) F, a no es CL de b porque no son múltiplos

e)V porque b y c son base y en consecuencia cualquier vector es CL de ellos

22. (0,-4)=α(-3,1)+β(2,5) ; resolviendo α=-8/17 y β=-12/17

23 a) -2ª+1/2b=-2(3,5)+1/2(-2,1)=(-7,-19/2)

b) ½(a+b)-2/3(a-b)=(172-2/3)a+(1/2+2/3)b=-1/6ª+7/6b=-1/6(3,5)+7/6(-2,1)=(-17/6,2/6)

24. c=3a-1/2b, despejando b=-2c+6ª=-2(7,-2)+6(-1,3)=(-20,22)

25.3x+10=7; x=-1

26. $\overrightarrow{AB}(3,9)$; $\overrightarrow{AC}(2,4)$ dado que $\frac{3}{2} \neq \frac{9}{4}$ los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ no tienen la misma dirección y, por tanto, los puntos A,B y C no están alineados.

27 . $\overrightarrow{AB}(5,-4)$; $\overrightarrow{AC}(9, k-5)$ necesitamos que $\frac{5}{9} = \frac{-4}{k-5}$ despejando k=-11/5

28. P(5,-2) es el punto medio, Sea B(x,y) se verificará que (A+B)/2=P Es decir: $\frac{2+x}{2} = 5 \to x = 8$ y $\frac{3+y}{2} = -2 \to y = -7$; B(8,-7)

29. Sea S(x,y) el simétrico de H respecto a P. Se verificará que P es el punto medio del segmento HS, es decir: (H+S)/2=P; $\frac{3+x}{2} = 1 \to x = -1$; $\frac{y}{2} = -2 \to y = -4$; S(-1,-4)

30. a) a(2,5) O(x,y) E(-5,4). E-O=a; (-5,4)-(x,y)=(2,5) despejando O(-7,-1)

b) a(2,5) O(2,-3), E(x,y) (2,5)=(x,y)-(2,-3) despejando E(4,2)