Ejercicios de vectores 4º ESO (2)

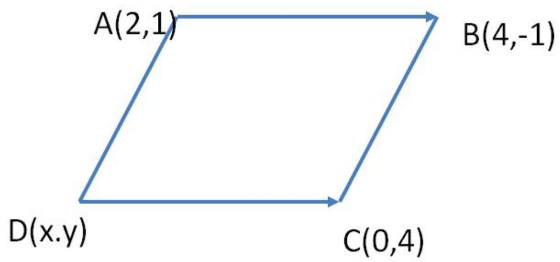
1.Determinar si los vectores a(35,-21) y b(-10,6) tienen o no la misma dirección, hallar el módulo de ambos vectores.
2. Dado el vector a(5,3) y el punto A(4,-1) determinar las coordenadas de un punto B para que el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ sea un representante del vector a
3.Dados los vectores a(5,3) y b(-5,4) a) Calcula el módulo del vector 3a-5b; b) Calcula un vector c tal que 2a+3b-2c=0;
4. a)Calcula y para que el vector a(1/3,y) sea unitario b) calcula k para que el vector u(6,k) sea paralelo al vector v(-3,4)
5. Dado el vector a(5,2) calcula un vector que tiene la misma dirección y sentido que a y cuyo módulo mide 1
6. Del triángulo ABC sabemos que C(6,8); $\overrightarrow{AB}(-6,4)$ y $\overrightarrow{BC}(4,2)$. Hallar A, B y $\overrightarrow{AC}$
7. Averigua si los puntos A,B y C están o no alineados a) A(-3,5); B(4,2) y C(10,-1); b)A(-8,11); B(1,-1) y C(4,-5); c)A(-2,-9), B(0,1) y C(4,20); d) A(0,-5); B(7,-2) y C(21,4)
8. Calcula el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados a) A(m,-1), B(2,5), C(-1,3); b) A(-4,1), B(1,m) y C(-2,6)
9. Dado el vector a(2,k), hallar k sabiendo que |a|=3
10. Los puntos A(2,1), B(4,-1), C(0,4) y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, hallar el vértice D
11. Los puntos A(1,1) y B(3,3) son dos vértices consecutivos de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto M(5,2), Hallar los dos vértices restantes
12. Escribe el vector c(5,-1) como combinación lineal de a(2,1) y b(-1,3). Representalo gráficamente.
13. ¿Son los vectores a(-3,2) y b(1,1) Linealmente dependientes? Justifica la respuesta.
14. Dado el vector a(3,4) Calcula un vector de la misma dirección y sentido que a pero que sea unitario.
15. ¿Los vectores u(0,1) y v(1,-2) constituyen una base del plano? Justifica la respuesta.
16. Calcula m para que el vector a(m+1,2m) a) sea unitario; b) tenga módulo 2
17. Calcula k para que el vector a(6/5,k) sea combinación lineal de b(3,5)
18. El punto medio de un segmento es M(0,-3) y uno de sus extremos es A(7,2), calcula el otro extremo.
19. Calcula el simétrico del punto A(-3,5) respecto de a) P(-2,0); b) Q(2,-3)
20. Calcula x para que los vectores u(x+3,4) y v(2,x-2) tengan el mismo módulo.
21. Calcula las coordenadas de un vector cuyo módulo vale 5 y que forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje OX
22. Sean u y v dos vectores cuyos módulos valen 3 y 4 respectivamente y que forman entre sí un ángulo de 30º. Calcula el múdulo de u+v
23. Razona las siguientes cuestiones:
   - A) ¿Es posible que la suma de dos vectores no nulos sea el vector nulo?
   - B) El módulo de un vector ¿puede ser un número real negativo?
   - C) ¿Existe algún vector sin dirección ni sentido?
   - D) Dos vectores de distinta dirección ¿Pueden ser opuestos?
   - E) El módulo de la suma de dos vectores puede ser menor que el módulo de dichos vectores?
   - F) Si dos vectores tienen distinta dirección pueden ser múltiplos?
   - G)¿ Podemos encontrar dos vectores de distinta dirección y no nulos cuya suma sea el vector cero?

24. Los vectores u y v verifican : |u|=2, |v|=1 y el ángulo que forman es de 30º, calcula u.v
25. Sean u(2,3), v(-1,4) y w(-2,-5) calcula a) u.v; b) ángulo que forman u y w; c) u.(v+w)
26. Calcula un vector perpendicular a u(1,1) cuyo módulo valga 2
27. Calcula un vector v ortogonal a u(-2,3) sabiendo que v.a=1 siendo a(2,-4)
28. Calcula un vector ortogonal a u(-3,2) y cuyo producto escalar por el vector b(4,-1) valga 6
29. Calcula el ángulo que forma el vector u(1,2) con la parte positiva del eje OX.
30. Calcula el producto escalar u.v siendo u(-3,3) y v(2,-1) . Halla un vector paralelo a u y unitario
31. ¿Qué ángulo forman los vectores u y -u? ¿qué ángulo forman los vectores u y 3u?

SOLUCIONES VECTORES (2)

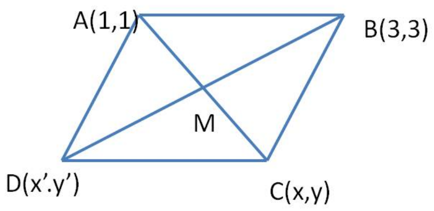
1. a(35,-21); b(-10,6) $\frac{35}{-10} = \frac{-21}{6}$ Por lo tanto tienen la misma dirección
   |a|=$\sqrt{35^2+(-21)^2} = \sqrt{1666}$; |b|=$\sqrt{(-10)^2+6^2} = \sqrt{136}$

2. a(3,5); A(4,-1), B(x,y) $\overrightarrow{AB} = (x-4, y+1) =)/(5,3) \Rightarrow \begin{cases} x-4=5; x=9 \\ y+1=3; y=2 \end{cases}$ B(9,2)
3. a(5,3), b(-5,4) a) 3a-5b=3(5,3)-5(-5,4)=(40.-11): |3a-5b|=$\sqrt{40^2+(-11)^2} = \sqrt{1721}$
   b) 2a+3b-2c=0; c=$\frac{2a+3b}{2} = \frac{2(5,3)+3(-5,4)}{2} = \frac{(-5,18)}{2}) = (-5/2, 9)$
4. a) a(1/3,y); |a|=1; |a|=$\sqrt{\frac{1}{9}+y^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{9}+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-\frac{1}{9} \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$ tiene 2 soluciones
   b) u(6,k)|| v(-3,4) entonces $\frac{6}{-3} = \frac{k}{4}; k=-8$
5. a(5,2); |a|=$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\frac{a}{\|a\|} = (\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}})$ tendrá módulo 1
6. C(6,8), $\overrightarrow{AB} = (-6,4); \overrightarrow{BC} = (4,2)$; sea A(x,y) y B(x',y') $\overrightarrow{BC}$=(6,8)-(x',y')=(4,2);
$\begin{cases} 6-x'=4; x'=2 \\ 8-y'=2; y'=6 \end{cases}$ B(2,6). $\overrightarrow{AB}$=(2,6)-(x,y)=(-6,4);$\begin{cases} 2-x=-6; x=8 \\ 6-y=4; y=2 \end{cases}$ A(8,2)
7. a) $\overrightarrow{AB} =$ (4,2)-(-3,5)=(7,-3); $\overrightarrow{AC}$ =(10,-1)-(-3,5)=(13,-6); como $\frac{7}{13} \neq \frac{-3}{-6}$ los puntos no están alineados.
   b) $\overrightarrow{AB} =$ (1,-1)-(-8,11)=(9,-12); $\overrightarrow{AC}$ =(4,-5)-(-8,11)=(12,-16); como $\frac{9}{12} = \frac{-12}{-16}$ los puntos están alineados.
   c)$\overrightarrow{AB} =$ (0,1)-(-2,-9)=(2,10); $\overrightarrow{AC}$ =(4,20)-(-2,-9)=(6,29); como $\frac{2}{6} \neq \frac{10}{29}$ los puntos no están alineados.
   d)$\overrightarrow{AB} =$ (7,-2)-(0,-5)=(7,3); $\overrightarrow{AC}$ =(21,4)-(0,-5)=(21,9); como $\frac{7}{21} = \frac{3}{9}$ los puntos están alineados.
8. a) $\overrightarrow{AB} =$ (2,5)-(m,-1)=(7,-3); $\overrightarrow{AC}$ =(-1,3)-(m,-1)=(-1-m,4); $\frac{2-m}{-1-m} = \frac{6}{4}$ despejando m=-7
   b) $\overrightarrow{AB} =$ (1,m)-(-4,1)=(5,m-1); $\overrightarrow{AC}$ =(-2,6)-(-4,1)=(2,5); $\frac{5}{2} = \frac{m-1}{5}$ despejando m=27/2
9. A(2,k); |a|=$\sqrt{4+k^2} = 3$; $4+k^2 = 9$; k=± $\sqrt{5}$ hay 2 soluciones
10.



$\overrightarrow{AB} =$ (4,-1)-(2,1)=(2,-2);
$\overrightarrow{DC}$ =(0,4)-(x,y)=(-x,4-y);
(2,-2)=(-x,4-y); x=-2 y=6
D(-2,6)

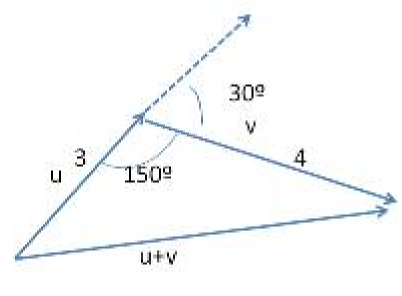
11.



M es el punto medio del segmento AC y del segmento BD, así pues hallamos los puntos medios de dichos segmentos e iualamos a M.
Pto medio de AC=$\frac{(x,y)+((1,1)}{2}=(\frac{x+1}{2},\frac{y+1}{2})=(5,2)$ despejando C(9,3)
Pto medio de BD=$\frac{(x',y')+((3,3)}{2}=(\frac{x'+3}{2},\frac{y'+3}{2})=(5,2)$ despejando D(7,1)

12. C(5,-1)=λ(2,1)+β(−1,3); (5,−1)=(2λ−β,λ+3β)⇒ $\begin{cases} 5=2\lambda-\beta \\ -1=\lambda+3\beta \end{cases}$ Resolviendo el sistema obtenemos λ=2, β=−1; es decir c=2(2,1)-(-1,3). Representación gráfica en clase
13. a(-3,2) y b(1,1) no son LD porque no tienen la misma dirección
14. a(3,4); |a|=$\sqrt{9+16}=5$; $\frac{a}{\|a\|}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ es unitario y de la misma dirección y sentido que a
15. u(0,1) y v(1,-2) si constituyen una base porque son 2 vectores de distinta direccción y en consecuencia son LI y SG
16. a) a(m+1,2m) a) $\sqrt{(m+1)^2+4m^2}=1 \Rightarrow m^2+2m+1+4m^2=1$ resolviendo m=0 ó m=-2/5
    b) $\sqrt{(m+1)^2+4m^2}=2 \Rightarrow m^2+2m+1+4m^2=$4 resolviendo m=-1 ó m=3/5
17. a(6/5,k) CL de b(3,5) esto equivale a decir que tienen la misma dirección y por tanto $\frac{6/5}{3}=\frac{k}{5}$; resolviendo k=2
18. M(0,-3), A(7,2), B(x,y) $\frac{(x,y)+((7,2)}{2}=(\frac{x+7}{2},\frac{y+2}{2})=(0,-3)$Resolviendo x=-7, y=-8; B(-7,-8)
19. A(-3,5) a) P(-2,0) sea S(x,y) el simétrico de A respecto a P, esto significa que P es el punto medio del segmento AS. Entonces $\frac{A+S}{2}=P$; $\frac{(-3,5)+(x,y)}{2}=(-2,0)$ Resolviendo S(-1,-5)
b)Q(2,-3) sea S(x,y) el simétrico de A respecto a Q $\frac{A+S}{2}=Q$; $\frac{(-3,5)+(x,y)}{2}=(2,-3)$. Resolviendo S(7,-11)
20. u(x+3,4) |u|=$\sqrt{(x+3)^2+16}$; v(2, x-2) |v|=$\sqrt{4+(x-2)^2}$; $\sqrt{(x+3)^2+16}=\sqrt{4+(x-2)^2}$
    $X^2+9+6x+16=4+x^2-4x+4$; resolviendo x=-17/10
21. Si a forma 45º con la parte positiva del eje OX a tendrá sus 2 coordenadas iguales y por tanto a(x,x); |a|=5; |a|=$\sqrt{x^2+x^2}=5$; $2x^2=25$; x=$\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$. Solo podemos tomar el signo positivo porque el vector está en el primer cuadrante al formar 45º con la parte positiva del eje OX. a($\frac{5}{\sqrt{2}}$,$\frac{5}{\sqrt{2}}$A(,)
22. |u|=3, |v|=4, (u,v)=30º

Aplicando el teorema del coseno
$|u+v|^2=3^2+4^2-2.3.4.\cos 150$
$|u+v|^2=25+12\sqrt{3}$; $|u+v|=\sqrt{25+12\sqrt{3}}$



23. a) Si, 2 vectores de igual módulo y dirección pero distinto sentido
    b) No, el módulo es una longitud luego tiene que ser positiva
    c) Si, el vector nulo
    d) No, ser opuestos significa tener el mismo módulo y la misma dirección pero distinto sentido
    e) Si,los vectores deben tener la misma dirección y distinto sentido.

f) No, los múltiplos de un vector son vectores de la misma dirección que él aunque pueden tener distinto sentido si multiplicamos por un número negativo.

g) No, la suma sería el tercer lado del triángulo que une el origen del primer vector con el extremo del último. Es imposible que sea el vector cero

24. u.v=|u|.|v|,cos(u,v)=2.1.$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
25. u(2,3), v(-1,4), w(-2,-5)
    a) u.v=-2+12=10
    b) cos(u,w)=$\frac{u.w}{|u|.|w|} = \frac{-4-15}{\sqrt{4+9}\,.\sqrt{4+25}} = \frac{-19}{\sqrt{13}\,.\sqrt{29}}$ (u,w)=168º6'40''
    c) v+w=(-1,4)+(-2,-5)=(-3,-1); u(2,3); u.(v+w)=-6-3=-9
26. v(x,y), u(1,1); u.v=0⇒x+y=0⇒x=-y; |v|=$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-y)^2+y^2} = \sqrt{2y^2} = 2$; $2y^2=4$: $y^2=2$; y=± $\sqrt{2}$ Si y=$\sqrt{2}$ x=-$\sqrt{2}$. Si y= -$\sqrt{2}$ x=$\sqrt{2}$ hay por tanto 2 soluciones: v($-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) o v($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$)
27. v(x,y) u(-2,3) a(2,-4). Que v sea ortogonal a u significa que v.u=0⇒ $-2x+3y=0$
    Por otra parte v-a=1 ⇒ $2x-4y=1$. Resolviendo el sistema formado por las 2 ecuaciones obtenemos x=-3/2, y=-1. Es decir v(-3/2,-1)
28. V(x,y), u(-3,2), b(4,-1). $\left\{\begin{array}{l} \text{v.u=0} \Rightarrow -3x+2y=0 \\ v.b=6 \Rightarrow 4x-y=6 \end{array}\right.$ Resolviendo el sistema x=12/5, y=18/5
29. U(1,2) tgα=2/1; α=63º26'5''
30. U(-3,3), v(2,-1) u.v=-6-3=-9. Los vectores paralelos a v y unitarios son: $\frac{u}{|u|}$ y -$\frac{u}{|u|}$
    Calculamos |u|=$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ Luego los 2 vectores que cumplen el enunciado son: ($\frac{1}{\sqrt{18}}$, $\frac{2}{\sqrt{18}}$) y ($-\frac{1}{\sqrt{18}}$, -$\frac{2}{\sqrt{18}}$)
31. u y -u forman un ángulo de 180º; u y 3u forman un ángulo de 0º