

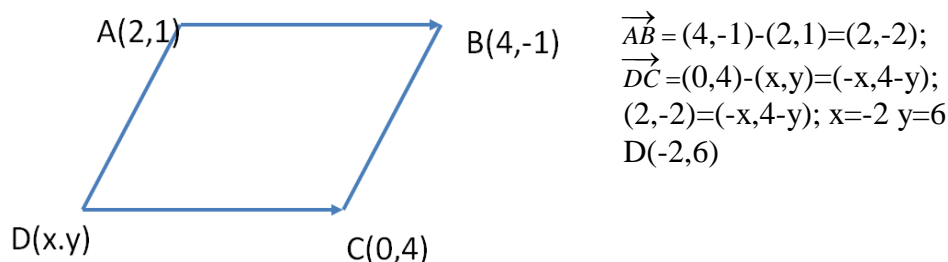
Ejercicios de vectores 4º ESO (2)

1. Determinar si los vectores $a(35,-21)$ y $b(-10,6)$ tienen o no la misma dirección, hallar el módulo de ambos vectores.
2. Dado el vector $a(5,3)$ y el punto $A(4,-1)$ determinar las coordenadas de un punto B para que el vector fijo \overrightarrow{AB} sea un representante del vector a
3. Dados los vectores $a(5,3)$ y $b(-5,4)$ a) Calcula el módulo del vector $3a-5b$; b) Calcula un vector c tal que $2a+3b-2c=0$;
4. a) Calcula y para que el vector $a(1/3,y)$ sea unitario b) calcula k para que el vector $u(6,k)$ sea paralelo al vector $v(-3,4)$
5. Dado el vector $a(5,2)$ calcula un vector que tiene la misma dirección y sentido que y cuyo módulo mide 1
6. Del triángulo ABC sabemos que $C(6,8)$; $\overrightarrow{AB}(-6,4)$ y $\overrightarrow{BC}(4,2)$. Hallar A, B y \overrightarrow{AC}
7. Averigua si los puntos A,B y C están o no alineados a) $A(-3,5)$; $B(4,2)$ y $C(10,-1)$;
b) $A(-8,11)$; $B(1,-1)$ y $C(4,-5)$; c) $A(-2,-9)$, $B(0,1)$ y $C(4,20)$; d) $A(0,-5)$; $B(7,-2)$ y $C(21,4)$
8. Calcula el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados a) $A(m,-1)$, $B(2,5)$, $C(-1,3)$;
b) $A(-4,1)$, $B(1,m)$ y $C(-2,6)$
9. Dado el vector $a(2,k)$, hallar k sabiendo que $|a|=3$
10. Los puntos $A(2,1)$, $B(4,-1)$, $C(0,4)$ y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, hallar el vértice D
11. Los puntos $A(1,1)$ y $B(3,3)$ son dos vértices consecutivos de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto $M(5,2)$, Hallar los dos vértices restantes
12. Escribe el vector $c(5,-1)$ como combinación lineal de $a(2,1)$ y $b(-1,3)$. Representalo gráficamente.
13. ¿Son los vectores $a(-3,2)$ y $b(1,1)$ Linealmente dependientes? Justifica la respuesta.
14. Dado el vector $a(3,4)$ Calcula un vector de la misma dirección y sentido que a pero que sea unitario.
15. ¿Los vectores $u(0,1)$ y $v(1,-2)$ constituyen una base del plano? Justifica la respuesta.
16. Calcula m para que el vector $a(m+1,2m)$ a) sea unitario; b) tenga módulo 2
17. Calcula k para que el vector $a(6/5,k)$ sea combinación lineal de $b(3,5)$
18. El punto medio de un segmento es $M(0,-3)$ y uno de sus extremos es $A(7,2)$, calcula el otro extremo.
19. Calcula el simétrico del punto $A(-3,5)$ respecto de a) $P(-2,0)$; b) $Q(2,-3)$
20. Calcula x para que los vectores $u(x+3,4)$ y $v(2,x-2)$ tengan el mismo módulo.
21. Calcula las coordenadas de un vector cuyo módulo vale 5 y que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje OX
22. Sean u y v dos vectores cuyos módulos valen 3 y 4 respectivamente y que forman entre sí un ángulo de 30° . Calcula el módulo de $u+v$
23. Razona las siguientes cuestiones:
 - A) ¿Es posible que la suma de dos vectores no nulos sea el vector nulo?
 - B) El módulo de un vector ¿puede ser un número real negativo?
 - C) ¿Existe algún vector sin dirección ni sentido?
 - D) Dos vectores de distinta dirección ¿Pueden ser opuestos?
 - E) El módulo de la suma de dos vectores puede ser menor que el módulo de dichos vectores?
 - F) Si dos vectores tienen distinta dirección pueden ser múltiplos?
 - G) ¿Podemos encontrar dos vectores de distinta dirección y no nulos cuya suma sea el vector cero?

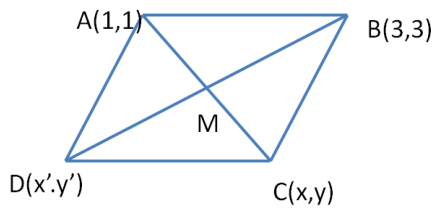
24. Los vectores u y v verifican : $|u|=2$, $|v|=1$ y el ángulo que forman es de 30° , calcula $u \cdot v$
25. Sean $u(2,3)$, $v(-1,4)$ y $w(-2,-5)$ calcula a) $u \cdot v$; b) ángulo que forman u y w ; c) $u \cdot (v+w)$
26. Calcula un vector perpendicular a $u(1,1)$ cuyo módulo valga 2
27. Calcula un vector v ortogonal a $u(-2,3)$ sabiendo que $v \cdot a=1$ siendo $a(2,-4)$
28. Calcula un vector ortogonal a $u(-3,2)$ y cuyo producto escalar por el vector $b(4,-1)$ valga 6
29. Calcula el ángulo que forma el vector $u(1,2)$ con la parte positiva del eje OX.
30. Calcula el producto escalar $u \cdot v$ siendo $u(-3,3)$ y $v(2,-1)$. Halla un vector paralelo a u y unitario
31. ¿Qué ángulo forman los vectores u y $-u$? ¿qué ángulo forman los vectores u y $3u$?

SOLUCIONES VECTORES (2)

1. $a(35,-21)$; $b(-10,6)$ $\frac{35}{-10} = \frac{-21}{6}$ Por lo tanto tienen la misma dirección
 $|a| = \sqrt{35^2 + (-21)^2} = \sqrt{1666}$; $|b| = \sqrt{(-10)^2 + 6^2} = \sqrt{136}$
2. $a(3,5)$; $A(4,-1)$, $B(x,y)$ $\vec{AB} = (x-4, y+1) = (5,3) \Rightarrow \begin{cases} x-4=5; x=9 \\ y+1=3; y=2 \end{cases}$ $B(9,2)$
3. $a(5,3)$, $b(-5,4)$ a) $3a-5b=3(5,3)-5(-5,4)=(40,-11)$; $|3a-5b| = \sqrt{40^2 + (-11)^2} = \sqrt{1721}$
b) $2a+3b-2c=0$; $c = \frac{2a+3b}{2} = \frac{2(5,3)+3(-5,4)}{2} = \frac{(-5,18)}{2} = (-5/2, 9)$
4. a) $a(1/3, y)$; $|a|=1$; $|a| = \sqrt{\frac{1}{9} + y^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$ tiene 2 soluciones
b) $u(6,k) \parallel v(-3,4)$ entonces $\frac{6}{-3} = \frac{k}{4}$; $k = -8$
5. $a(5,2)$; $|a| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\frac{a}{|a|} = (\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}})$ tendrá módulo 1
6. $C(6,8)$, $\vec{AB} = (-6,4)$; $\vec{BC} = (4,2)$; sea $A(x,y)$ y $B(x',y')$ $\vec{BC} = (6,8) - (x',y') = (4,2)$;
 $\begin{cases} 6-x'=4; x'=2 \\ 8-y'=2; y'=6 \end{cases}$ $B(2,6)$. $\vec{AB} = (2,6) - (x,y) = (-6,4)$; $\begin{cases} 2-x=-6; x=8 \\ 6-y=4; y=2 \end{cases}$ $A(8,2)$
7. a) $\vec{AB} = (4,2) - (-3,5) = (7,-3)$; $\vec{AC} = (10,-1) - (-3,5) = (13,-6)$; como $\frac{7}{13} \neq \frac{-3}{-6}$ los puntos no están alineados.
b) $\vec{AB} = (1,-1) - (-8,11) = (9,-12)$; $\vec{AC} = (4,-5) - (-8,11) = (12,-16)$; como $\frac{9}{12} = \frac{-12}{-16}$ los puntos están alineados.
c) $\vec{AB} = (0,1) - (-2,-9) = (2,10)$; $\vec{AC} = (4,20) - (-2,-9) = (8,29)$; como $\frac{2}{8} \neq \frac{10}{29}$ los puntos no están alineados.
d) $\vec{AB} = (7,-2) - (0,-5) = (7,3)$; $\vec{AC} = (21,4) - (0,-5) = (21,9)$; como $\frac{7}{21} = \frac{3}{9}$ los puntos están alineados.
8. a) $\vec{AB} = (2,5) - (m,-1) = (7,-3)$; $\vec{AC} = (-1,3) - (m,-1) = (-1-m,4)$; $\frac{2-m}{-1-m} = \frac{6}{4}$ despejando $m = -7$
b) $\vec{AB} = (1,m) - (-4,1) = (5,m-1)$; $\vec{AC} = (-2,6) - (-4,1) = (6,5)$; $\frac{5}{6} = \frac{m-1}{5}$ despejando $m = 31/6$
9. $A(2,k)$; $|a| = \sqrt{4+k^2} = 3$; $4+k^2 = 9$; $k = \pm \sqrt{5}$ hay 2 soluciones
- 10.



11.



M es el punto medio del segmento AC y del segmento BD, así pues hallamos los puntos medios de dichos segmentos e igualamos a M.
 Pto medio de AC = $\frac{(x,y)+(1,1)}{2} = (\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}) = (5,2)$
 despejando C(9,3)
 Pto medio de BD = $\frac{(x',y')+(3,3)}{2} = (\frac{x'+3}{2}, \frac{y'+3}{2}) = (5,2)$
 despejando D(7,1)

12. $C(5,-1) = \lambda(2,1) + \beta(-1,3)$; $(5,-1) = (2\lambda - \beta, \lambda + 3\beta) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2\lambda - \beta \\ -1 = \lambda + 3\beta \end{cases}$ Resolviendo el sistema

obtenemos $\lambda = 2, \beta = -1$; es decir $c = 2(2,1) - (-1,3)$. Representación gráfica en clase

13. $a(-3,2)$ y $b(1,1)$ no son LD porque no tienen la misma dirección

14. $a(3,4)$; $|a| = \sqrt{9+16} = 5$; $\frac{a}{|a|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es unitario y de la misma dirección y sentido que a

15. $u(0,1)$ y $v(1,-2)$ si constituyen una base porque son 2 vectores de distinta dirección y en consecuencia son LI y SG

16. a) $a(m+1, 2m)$ a) $\sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} = 1 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 + 4m^2 = 1$ resolviendo $m=0$ ó $m=-2/5$

b) $\sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} = 2 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 + 4m^2 = 4$ resolviendo $m=-1$ ó $m=3/5$

17. $a(6/5, k)$ CL de $b(3,5)$ esto equivale a decir que tienen la misma dirección y por tanto $\frac{6/5}{3} = \frac{k}{5}$; resolviendo $k=2$

18. $M(0,-3), A(7,2), B(x,y)$ $\frac{(x,y)+(7,2)}{2} = (\frac{x+7}{2}, \frac{y+2}{2}) = (0,-3)$ Resolviendo $x=-7, y=-8$; $B(-7,-8)$

19. $A(-3,5)$ a) $P(-2,0)$ sea $S(x,y)$ el simétrico de A respecto a P, esto significa que P es el punto medio del segmento AS. Entonces $\frac{A+S}{2} = P$; $\frac{(-3,5)+(x,y)}{2} = (-2,0)$ Resolviendo $S(-1,-5)$

b) $Q(2,-3)$ sea $S(x,y)$ el simétrico de A respecto a Q $\frac{A+S}{2} = Q$; $\frac{(-3,5)+(x,y)}{2} = (2,-3)$. Resolviendo $S(7,-11)$

20. $u(x+3,4)$ $|u| = \sqrt{(x+3)^2 + 16}$; $v(2, x-2)$ $|v| = \sqrt{4 + (x-2)^2}$; $\sqrt{(x+3)^2 + 16} = \sqrt{4 + (x-2)^2}$
 $x^2 + 9 + 6x + 16 = 4 + x^2 - 4x + 4$; resolviendo $x = -17/10$

21. Si a forma 45° con la parte positiva del eje OX a tendrá sus 2 coordenadas iguales y por tanto $a(x,x)$; $|a|=5$; $|a| = \sqrt{x^2 + x^2} = 5$; $2x^2 = 25$; $x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Solo podemos tomar el signo

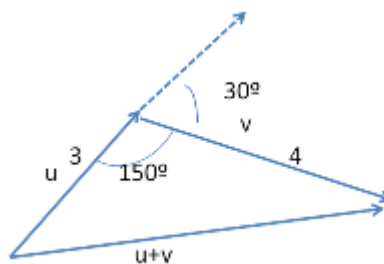
positivo porque el vector está en el primer cuadrante al formar 45° con la parte positiva del eje OX. $a(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$ A(,)

22. $|u|=3, |v|=4, (u,v)=30^\circ$

Aplicando el teorema del coseno

$$|u+v|^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 150$$

$$|u+v|^2 = 25 + 12\sqrt{3}; |u+v| = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$$



23. a) Si, 2 vectores de igual módulo y dirección pero distinto sentido

b) No, el módulo es una longitud luego tiene que ser positiva

c) Si, el vector nulo

d) No, ser opuestos significa tener el mismo módulo y la misma dirección pero distinto sentido

e) Si, los vectores deben tener la misma dirección y distinto sentido.

- f) No, los múltiplos de un vector son vectores de la misma dirección que él aunque pueden tener distinto sentido si multiplicamos por un número negativo.
- g) No, la suma sería el tercer lado del triángulo que une el origen del primer vector con el extremo del último. Es imposible que sea el vector cero

24. $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

25. $u(2,3), v(-1,4), w(-2,-5)$

a) $u \cdot v = -2 + 12 = 10$

b) $\cos(u, w) = \frac{u \cdot w}{|u| \cdot |w|} = \frac{-4 - 15}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{4+25}} = \frac{-19}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} \quad (u, w) = 168^\circ 6' 40''$

c) $v+w = (-1, 4) + (-2, -5) = (-3, -1); u(2, 3); u \cdot (v+w) = -6 - 3 = -9$

26. $v(x, y), u(1, 1); u \cdot v = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y; |v| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-y)^2 + y^2} = \sqrt{2y^2} = 2; 2y^2 = 4; y^2 = 2;$
 $y = \pm \sqrt{2}$ Si $y = \sqrt{2} \quad x = -\sqrt{2}$. Si $y = -\sqrt{2} \quad x = \sqrt{2}$ hay por tanto 2 soluciones: $v(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ o $v(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

27. $v(x, y) \perp u(-2, 3) \Rightarrow v \cdot u = 0 \Rightarrow -2x + 3y = 0$

Por otra parte $v \cdot a = 1 \Rightarrow 2x - 4y = 1$. Resolviendo el sistema formado por las 2 ecuaciones obtenemos $x = -3/2, y = -1$. Es decir $v(-3/2, -1)$

28. $V(x, y), u(-3, 2), b(4, -1). \begin{cases} v \cdot u = 0 \Rightarrow -3x + 2y = 0 \\ v \cdot b = 6 \Rightarrow 4x - y = 6 \end{cases}$ Resolviendo el sistema $x = 12/5, y = 18/5$

29. $U(1, 2) \quad \operatorname{tg} \alpha = 2/1; \alpha = 63^\circ 26' 5''$

30. $U(-3, 3), v(2, -1) \quad u \cdot v = -6 - 3 = -9$. Los vectores paralelos a v y unitarios son: $\frac{v}{|v|}$ y $-\frac{v}{|v|}$

Calculamos $|u| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ Luego los 2 vectores que cumplen el enunciado son:

$(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{2}{\sqrt{18}})$

31. u y $-u$ forman un ángulo de 180° ; u y $3u$ forman un ángulo de 0°