

GUÍA DE LA ACTIVIDAD " MEDICIÓN DEL RADIO DE LA TIERRA"

Exposición inicial.

El Sol alcanza su máxima altura cuando pasa por el meridiano del lugar, sin embargo la inclinación de los rayos solares no es la misma en todos los puntos del meridiano, debido a la forma esférica de la Tierra.

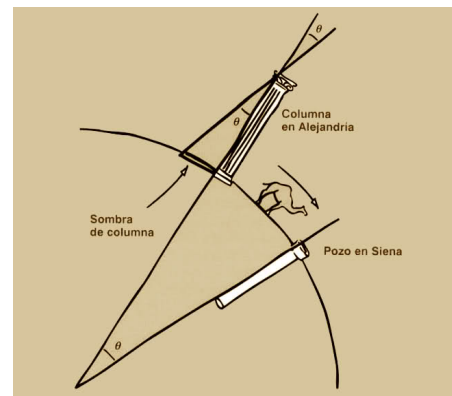
Eratóstenes (275-195 a. C.), científico griego que vivió en Alejandría, era conocedor de la esfericidad de la Tierra e ideó un método para calcular su radio. El procedimiento que siguió es todavía hoy un ejemplo modélico de ingenio y rigurosidad científica

A través de un papiro de la biblioteca de Alejandría, Eratóstenes tiene conocimiento de que en Siena (actual Asuan), había un pozo de agua profundo en el que se reflejaba perfectamente el Sol el día del solsticio de verano al mediodía. Es decir, ese día el Sol se encontraba justo sobre la vertical del lugar (hay que tener en cuenta que Siena se encuentra en el trópico de Cancer)

El mismo día y a la misma hora, observa que en la ciudad de Alejandría, que él cree situada en el mismo meridiano, los objetos producen una determinada sombra, lo que significa que los rayos solares sufren una cierta inclinación. Dado que al estar el sol tan lejos de la tierra se puede considerar que los rayos del sol son paralelos, Eratóstenes deduce que la diferencia entre ambas ciudades se debe a la esfericidad de la tierra, por lo que midiendo el ángulo de inclinación de los rayos solares podía averiguar el radio terrestre.

Para realizar la medición tuvo en cuenta que la distancia entre Siena y Alejandría era de 5000 estadios (un estadio egipcio equivale a unos 157,5 m.) y que Siena se encuentra situada al sur de Alejandría en el mismo meridiano.

De esta manera se tiene el esquema de la figura



Para medir el ángulo α que forma la vertical del lugar con los rayos de Sol en Alejandría, colocó en el suelo un casquete esférico. En el centro de este colocó un palo de altura igual al radio de la esfera de la que provenía dicho casquete. Eratóstenes observó que la sombra del palo sobre el casquete era aproximadamente $1/50$ de su circunferencia máxima ($1/50$ de vuelta equivale a $7^\circ 7'$)

Por consiguiente la longitud total de un meridiano terrestre sería de $5000 \cdot 50 = 250\,000$ estadios; aunque todos los autores de la antigüedad citan la cifra de 252000 estadios.

De esta forma el radio de la Tierra sería: $(252000 \times 157,5) / 2\pi$ metros y tomando $\pi = 3,14$ resulta como valor del radio terrestre 6320 Km.

Para hacernos idea del grado de aproximación alcanzado por Eratóstenes, tengamos en cuenta que actualmente se considera que el radio de la Tierra es de 6378,4 Km.

CUESTIONES:

- ¿En qué influye el hecho de que ambas ciudades se encuentren situadas en el mismo meridiano?
- ¿Qué sucede en el trópico de Cancer al mediodía del solsticio de verano?
- ¿Realmente Alejandría y Siena están situadas sobre el mismo meridiano? ¿Es cierto que Siena se encuentra en el Trópico de Cancer?. Buscar sus coordenadas geográficas.
- ¿Cuál es la distancia real entre ambas ciudades? .
- ¿Cómo crees que pudo medir Eratóstenes la distancia entre ambas ciudades?
- ¿Cómo pudo saber Eratóstenes que la medición se realizaba justo a la misma hora en ambas ciudades?
- ¿Se te ocurre algún método distinto del de Eratóstenes para calcular el ángulo que forma la vertical del lugar con los rayos del Sol?
- Investiga en internet cuales fueron los errores que Eratóstenes cometió en las suposiciones sobre las que basó sus cálculos

MEDICIÓN DEL RADIO TERRESTRE

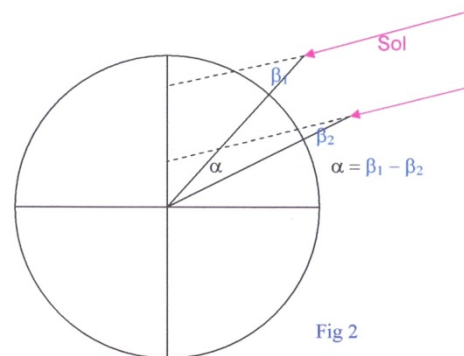
Actualmente, el reloj permite conocer la hora exacta en cualquier lugar de la tierra, por lo que no es preciso ceñirse al mediodía de un solsticio.

Basta conocer la distancia entre dos puntos P y Q de la tierra que estén en el mismo meridiano y medir los ángulos β_1 y β_2 de incidencia de los rayos solares en ambos lugares simultáneamente al mediodía hora solar.

Como los rayos solares pueden considerarse prácticamente paralelos se tiene $\alpha = \beta_1 - \beta_2$ y puede establecerse la siguiente regla de tres

$$360^\circ \text{ ----- } 2\pi r$$

$$\alpha^\circ \text{ ----- } d$$



TRABAJOS A REALIZAR

- Buscar en un atlas una ciudad del mismo meridiano que La Coruña
- Decidir que datos necesitas conocer para que, realizadas las mediciones en La Coruña y en esa ciudad, el cálculo del radio de la Tierra que resulte sea fiable. Decidir asimismo la forma en que realizarías las mediciones.
- Ponerse de acuerdo con alumnos de algún centro de enseñanza de la ciudad buscada para que te ayuden en la medición. Explicarles lo que deben hacer y a qué hora.
- Calcular el radio de la Tierra.
- Presentar por escrito todos los pasos seguidos para desarrollar la experiencia (cálculos, medidas, problemas que han surgido etc.), así como vuestra evaluación de ella.

PARA MI Para responder a las cuestiones:

Para determinar la circunferencia de la Tierra Eratóstenes tuvo que partir de una suposición: el Sol se encuentra a una gran distancia de la Tierra que, por otra parte, es redonda. Hoy día esto no es una suposición ya que sabemos que, de hecho es así. Eratóstenes conocía bien las consecuencias de esta suposición de partida: los rayos del Sol inciden de forma paralela sobre toda la Tierra, y por tanto, la sombra que da una vara recta y vertical difiere en longitud dependiendo del punto de la Tierra donde se encuentre. También conocía, de hecho lo midió, que el eje de la Tierra está inclinado $23'5^{\circ}$ respecto del plano que forman los rayos solares y que sólo hay unos pocos lugares donde dichos rayos inciden perpendicularmente, es decir, la vara no hace sombra alguna cuando el Sol se encuentra en el punto más alto del cielo el mediodía del solsticio de verano (21 de junio). Hoy sabemos que dichos lugares están situados, hablando del hemisferio norte, en el llamado trópico de Cáncer

Imaginemos a Eratóstenes el 21 de junio en Alejandría, con una vara de longitud conocida, midiendo el ángulo con que caen los rayos del Sol gracias a la sombra que la vara deja cuando está vertical sobre la superficie terrestre. Eratóstenes obtuvo un valor de $7'2^{\circ}$ para la inclinación de dichos rayos en Alejandría. Una vez realizada la medida pensaría que si fuera capaz de viajar hacia el sur sin desviarse, en línea recta, podría encontrar otro lugar donde el 21 de junio la misma vara a mediodía no hiciera sombra. Si encontrara ese lugar y midiera la distancia recorrida, ¿podría conocer el tamaño de la Tierra!.

Pero Eratóstenes no tuvo que moverse de Alejandría. Tenía noticias de un hecho peculiar que tenía lugar todos los años en una ciudad llamada Siena que hoy día se conoce como Asuán. En esta ciudad, situada más al sur de Alejandría y a las orillas del Nilo, sucedía que cuando era mediodía de cierto día del año el agua de los pozos reflejaba como un espejo la luz del Sol, además de que las columnas y los obeliscos no producían sombra. Como tal día presagiaba el verano, en Siena se hacían sonadas y famosas fiestas conocidas hasta en Alejandría.

Por lo que se ha dicho anteriormente podemos inferir que Siena se debe encontrar muy cerca del trópico de Cáncer. Además se debe encontrar prácticamente en el mismo meridiano que Alejandría (el viaje en línea recta que "pensaba" Eratóstenes) lo cual permite que el mediodía sea simultáneo en ambas localidades. Pero, ¿cómo pudo saber Eratóstenes que Siena se encontraba prácticamente en línea recta hacia el sur de Alejandría?, es más, ¿cómo midió la distancia entre Siena y Alejandría?. En primer lugar Eratóstenes, como buen geógrafo que era, sabía que el Nilo transcurre prácticamente recto

desde el nacimiento hasta la desembocadura. Si Siena esta asentada en las orillas del Nilo y Alejandría también, ¡las dos ciudades deberían estar prácticamente en la línea recta de dirección Norte-Sur!. En segundo lugar "*quedaba*"medir la distancia entre ambas ciudades. Lo hizo pagando de su propio dinero a los jefes de las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades para que durante el viaje midieran los pasos, o para que extendieran largas cuerdas a lo largo de todo el camino, o para que contaran las vueltas que daban las ruedas de los carros, etc... La distancia estimada fue de 5.000 estadios, unidad de longitud utilizada por entonces.

El error en la determinación de la circunferencia es sólo del 1'5 % ¡para una medida hecha hace 2.400 años!. Es un error pequeño para las condiciones de medida de la época. En primer lugar la distancia entre Siena y Alejandría es de 843 km y además ambas ciudades no están situadas exactamente en el mismo meridiano ya que difieren unos 3° de longitud. Por otra parte, Siena no está en el trópico de Cáncer sino unos 70 km más al norte y, además, el ángulo que forma la sombra y la vara en Alejandría es de 7'08° en lugar de los 7'2° que midió Eratóstenes. Pero seguramente estos errores y otros que pudiera cometer en el experimento se compensaron unos con otros y dieron lugar a un valor casi exacto.

Para finalizar, otra variante que no requiera conocer la distancia al trópico de Cáncer y que se pueda realizar cualquier día del año. Lo primero que hay que hacer es elegir un pueblo o ciudad que diste varios cientos de kilómetros de la nuestra y que esté rigurosamente en el mismo meridiano. De nuevo, en el caso de que se encuentre en Villanueva del Arzobispo (Jaén) se podría elegir, por ejemplo, Guadalajara, situada a 275 km, o a Burgo de Osma, situado a 382 km, o a Portugalete, situado a 572 km. Si se prefiere viajar hacia el sur, desde Villanueva del Arzobispo hasta Adra hay 159 km. Melilla sería otra buena opción ya que sólo se desvía 0'5° en longitud y está situada a 320 km.

Lo ideal sería medir el mismo día y a la misma hora en los dos lugares la longitud de sendas varas o palos verticales situados sobre un lugar plano, así como las sombras que dichas varas proyectan a dicha hora. Las dos varas no tienen por qué tener exactamente la misma longitud pero deben estar perfectamente verticales. La dificultad de medir el mismo día a la misma hora se puede solventar de varias formas: las medidas de cada lugar pueden ser realizadas por personas diferentes que están en contacto, o también las puede realizar la misma persona sin cometer un error apreciable siempre que la diferencia máxima entre las dos medidas sea sólo de 24 horas exactas, o si hay paciencia, puede esperar un año justo entre ambas medidas.

Una vez realizadas las medidas se puede proceder al cálculo de la circunferencia de la Tierra. El esquema de trabajo viene representado en la figura nº 5, en la que el subíndice 1 hace referencia a la localidad situada más al sur y el subíndice 2 a la situada más al norte. Las tangentes de los ángulos α_1 y α_2 pueden calcularse por los cocientes entre las longitudes de las sombras respectivas (s_1 y s_2) y las longitudes de las barras correspondientes (l_1 y l_2)

$$\operatorname{tag} \alpha_1 = \frac{s_1}{l_1} \quad \operatorname{tag} \alpha_2 = \frac{s_2}{l_2}$$

Una vez determinados los ángulos α_1 y α_2 (calculando los respectivos arcos cuyas tangentes son los cocientes anteriores), podemos ver en la figura nº 5 que los ángulos α_2 y α_3 son iguales ya que los rayos del Sol inciden paralelos. Por otra parte, el ángulo α_4 debe ser igual al resultado de restar α_3 al ángulo llano, es decir:

$$\alpha_4 = 180 - \alpha_3 = 180 - \alpha_2 \quad (6)$$

Por tanto, como todos los ángulos de un triángulo deben sumar 180° , el triángulo OAB queda resuelto

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_4 = 180 \quad (7)$$

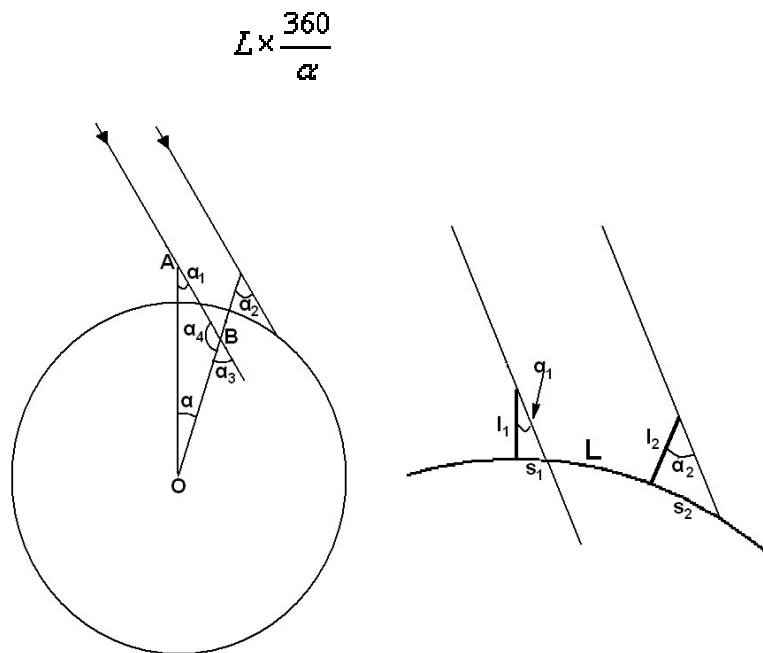
teniendo en cuenta (6)

$$\alpha + \alpha_1 + 180 - \alpha_2 = 180 \quad (8)$$

de donde

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (9)$$

Una vez calculado α , y conociendo la distancia L entre las dos localidades, podemos calcular la circunferencia de la Tierra estableciendo la proporción correspondiente: si el ángulo α de la circunferencia equivale a la distancia L , entonces 360° (una circunferencia completa) equivalen a



Ahora bien, es imposible que Eratóstenes diera con la medida exacta de la circunferencia de la Tierra debido a errores en los supuestos que calculó. Tuvo que haber tenido un margen de error considerable y por lo tanto no pudo haber usado el estadio egipcio:²

1. Supuso que la Tierra es perfectamente esférica, lo que no es cierto. Un grado de **latitud** no representa exactamente la misma distancia en todas las latitudes, sino que varía ligeramente de 110,57 km en el **Ecuador** hasta 111,7 km en los **Polos**. Por eso no podemos suponer que 7° entre Alejandría y Siena representen la misma distancia que 7° en cualquier otro lugar a lo largo de todo el meridiano.
2. Supuso que Siena y Alejandría se encontraban situadas sobre un mismo **meridiano**, lo cual no es así, ya que hay una diferencia de 3 grados de longitud entre ambas ciudades.
3. La distancia real entre Alejandría y Siena (hoy Asuán) no es de 924 km (5000 estadios ático-italiano de 184,8 m por estadio), sino de 843 km (distancia aérea y entre los centros de las dos ciudades), lo que representa una diferencia de 81 km.
4. Realmente Siena no está ubicada exactamente sobre el **paralelo del trópico de cáncer** (los puntos donde los rayos del sol caen verticalmente a la tierra en el solsticio de verano). Actualmente se encuentra situada a 72 km (desde el centro de la ciudad). Pero debido a que las variaciones del eje de la Tierra fluctúan entre $22,1$ y $24,5^\circ$ en un período de 41000 años, hace 2000 años se encontraba a 41 km.
5. La medida de la sombra que se proyectó sobre la vara de Eratóstenes hace 2.200 años debió ser de $7,5^\circ$ o $1/48$ parte de una circunferencia y no $7,2^\circ$ o $1/50$ parte. Puesto que en aquella época no existía el cálculo **trigonométrico**, para calcular el

ángulo de la sombra, Eratóstenes pudo haberse valido de un [compás](#),³ para medir directamente dicho ángulo, lo que no permite una medida tan precisa.

Si rehacemos el cálculo de Eratóstenes con la distancia y medida angular exacta desde Alejandría hasta el lugar geográfico situado justo en la intersección del meridiano que pasa por Alejandría con el paralelo del trópico de cáncer, obtenemos un valor de 40074 km para la circunferencia terrestre.⁴ Eso representa solamente 66 km o un 0,16% de error de la circunferencia real de la Tierra medida por satélites avanzados, que es de 40008 km, lo que demuestra la validez de su razonamiento. Esta ligera diferencia se debe a que la distancia entre Alejandría y la línea del trópico de cáncer es 1/46 parte de una circunferencia, pero la Tierra no es una esfera perfecta.

[Posidonio](#) rehizo el cálculo de Eratóstenes 150 años más tarde y obtuvo una circunferencia sensiblemente menor. Este valor fue adoptado por Ptolomeo y fue en el que probablemente se basó [Cristóbal Colón](#) para justificar la viabilidad del viaje a las [Indias](#) por occidente. Con las mediciones de Eratóstenes, el viaje no se habría llegado a realizar, al menos en aquella época y con aquellos medios, aceptando solo las certezas científicas. Los doctores consultados en [Salamanca](#), a petición real, se basaron en ellos para determinar que el objetivo principal -llegar a [China](#) y [Japón](#)- era imposible dada la distancia. Finalmente, la empresa fue aprobada por [la reina](#) por las ventajas estratégicas y comerciales que preveía el proyecto y sobre objetivos secundarios, como la condición de Colón de obtener prebendas y porcentajes sobre las tierras que descubriera en camino.